

Teorijska mehanika

Sunčica Elezović-Hadžić

16. april 2012

RADNA VERZIJA
Teorijska mehanika

Sadržaj

I	Diskretni sistemi	7
1	Osnovne postavke	9
1.1	Uvod	9
1.2	Postulati sile	10
1.3	O inercijalnim sistemima	11
1.4	Diferencijalne jednačine kretanja	12
2	Osnovne teoreme mehanike	17
2.1	Teorema kinetičke energije	17
2.1.1	Zakon održanja ukupne mehaničke energije	17
2.2	Teorema impulsa	18
2.2.1	Zakon održanja impulsa	19
2.3	Teorema momenta impulsa	19
2.3.1	Zakon održanja momenta impulsa	21
3	Metod nezavisnih generalisanih koordinata	23
3.1	Veze	23
3.2	Nezavisne generalisane koordinate	24
3.2.1	Kinetička energija	25
3.2.2	Rad	26
4	Dalamber-Lagranžev princip	29
4.1	Moguća i virtuelna pomeranja	29
4.2	Reakcije	29
4.3	Dalamber-Lagranžev princip	30
5	Lagranževe jednačine	31
5.1	Izvođenje Lagranževih jednačina	31
5.2	Standardni oblik Lagranževih jednačina	33
5.3	Osobine Lagranževih jednačina	34
6	Specijalni problemi	41
6.1	Jednodimenzionalni sistemi	41
6.1.1	Linarni harmonijski oscilator	41
6.1.2	Matematičko klatno	42
6.1.3	Jednodimenzionalni konzervativni sistemi sa stacionarnim vezama	44

6.2	Male oscilacije	46
6.2.1	Ležen-Dirihleova teorema	48
6.2.2	Normalne frekvence i koordinate	51
6.3	Centralno kretanje	54
6.3.1	Zakoni održanja i jednačine kretanja	54
6.3.2	Lagranžev formalizam i Bineov obrazac	57
6.3.3	Kretanje u polju privlačne Keplerove sile	57
6.4	Problem dva tela	60
6.5	Rasejanja	63
6.6	Kruto telo	68
6.6.1	Ojlerovi uglovi	68
6.6.2	Ojlerova i Šalova teorema	69
6.6.3	Ugaona brzina	70
6.6.4	Moment impulsa, kinetička energija i tenzor inercije krutog tela	75
6.6.5	Rotacija oko fiksirane ose	80
6.6.6	Korolisova teorema	82
6.6.7	Ojlerove jednačine za kruto telo	85
6.6.8	Analitički metod u dinamici krutog tela	86
6.6.9	Kretanje teške simetrične čigre	88
7	Hamiltonov formalizam	93
7.1	Hamiltonove jednačine	93
7.2	Fizički smisao hamiltonijana	97
7.3	Integrali kretanja	97
7.4	Generalisano potencijalne sile	101
8	Princip najmanjeg dejstva	105
8.1	Varijacioni račun	105
8.2	Hamiltonov princip	108
8.3	Hamiltonovi sistemi	109
9	Rešenja zadataka	113
9.1	Osnovne postavke klasične mehanike	113
9.2	Dalamber-Lagranžev princip	116
9.3	Lagranževe jednačine	117
II	Mehanika neprekidnih sistema	131
10	Opisivanje kretanja	133
10.1	Hipoteza kontinuuma	133
10.2	Lagranžev i Ojlerov metod	134
10.3	Supstancijalni izvod	136
10.4	Jednačina kontinuiteta	137
10.5	Tenzor brzine deformacije i vektor vrtložnosti	141

11 Sile u fizici neprekidnih sredina	149
11.1 Zapreminske i površinske sile	149
11.2 Osnovni dinamički zakon za kontinuum	155
12 Fluidi	157
12.1 Viskozni fluidi	157
12.2 Navije-Stoksovi fluidi	157
12.2.1 Navije-Stoksova jednačina	158
12.3 Idealan fluid	162
12.3.1 Ojlerova jednačina	162
12.3.2 Bernulijev i Koši–Lagranžev integral	163
13 Elastično telo	169
13.1 Vektor pomeranja i tenzor deformacije	169
13.2 Generalisani Hukov zakon	169
13.3 Osnovna jednačina dinamike za elastično telo	171
14 Rešenja zadataka	173
14.1 Opisivanje kretanja	173
14.2 Sile u fizici neprekidnih sistema	175
14.3 Fluidi	177
14.4 Elastično telo	180
III Specijalna teorija relativnosti	183
15 Postulati specijalne teorije relativnosti	185
15.1 Istorijski uvod	185
15.1.1 Majkelson-Morlijev eksperiment	185
15.2 Postulati specijalne teorije relativnosti	188
15.2.1 Direktnе posledice Ajnštajnovih postulata	188
15.3 Lorencove transformacije	189
15.3.1 Izvođenje Lorencovih transformacija	190
15.3.2 Posledice Lorencovih transformacija	190
16 Tenzorski račun u specijalnoj teoriji relativnosti	195
16.1 Prostor Minkovskog	195
16.1.1 Svetlosni konus	195
16.1.2 Razni oblici pisanja Lorencovih transformacija	197
16.2 Tenzori u prostoru Minkovskog	197
16.2.1 Definicije	197
16.2.2 Veza između kontra- i kovarijantnih 4-vektora	198
16.2.3 Skalarni proizvod 4-vektora	199
16.2.4 4-tenzori višeg ranga	199
16.3 Osnovne tenzorske veličine u specijalnoj teoriji relativnosti	200
16.4 Rimanovi prostori	200

17 Dinamika čestice u specijalnoj teoriji relativnosti	203
17.1 Kovariantna formulacija zakona	203
17.1.1 Osnovni zakon dinamike u kovariantnoj formi	203
17.1.2 Relativistički impuls \vec{p} čestice	204
17.1.3 Relativistička kinetička energija	204
17.1.4 Energija mirovanja	205
17.1.5 4-vektor impulsa - energija i impuls ujedinjeni	205
17.1.6 Sudari čestica - Komptonov efekat	208
17.2 Analitički formalizam u specijalnoj teoriji relativnosti	208

Deo I

Diskretni sistemi

Glava 1

Osnovne postavke klasične nerelativističke mehanike

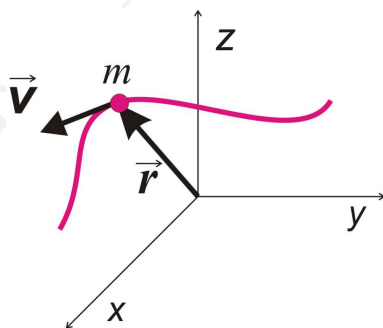
1.1 Uvod

Osnovni model koji koristimo u mehanici je **materijalna tačka** (ili **čestica**). Jednostavno rečeno, materijalna tačka je geometrijska tačka kojoj pridružujemo masu. Da li neko telo može da se tretira kao materijalna tačka ili ne, zavisi od toga kakav fenomen posmatramo. Generalno, fizičko telo aproksimiramo modelom materijalne tačke, tj. njegova unutrašnja struktura i dimenzije mogu da se zanemare, pri kretanjima u toku kojih se ono kreće u oblasti čija je zapremina mnogo veća od njegove sopstvene zapremine.

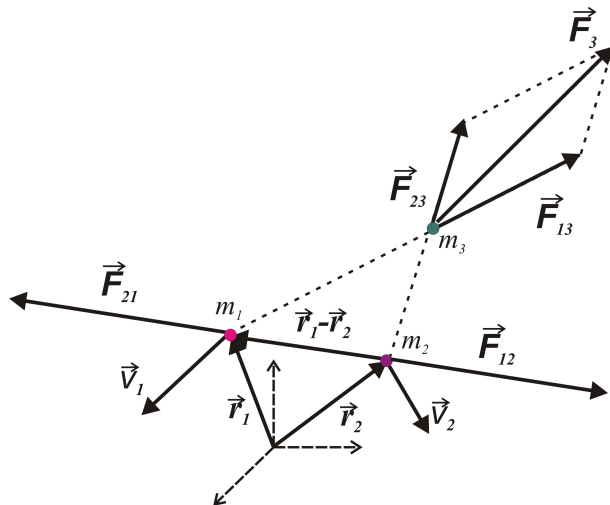
Kretanje čestice posmatra se u odnosu na neki **referentni sistem**. U referentnom sistemu definišemo **koordinatni sistem**. Najjednostavniji koordinatni sistem je *Dekartov pravougli sistem*, ali se osim njega često koriste i drugi, krivolinijski koordinatni sistemi: *cilindrični*, *sferni* itd.

Osnovna veličina koju pridružujemo čestici je njen vektor položaja $\vec{r}(t)$. Zavisnost vektora položaja čestice od vremena t , tj. izraz $\vec{r} = \vec{r}(t)$, zvaćemo **konačna jednačina kretanja**. **Brzina čestice** se definiše kao izvod njenog vektora položaja po vremenu, tj.

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}},$$



Slika 1.1: Dekartov koordinatni sistem, vektor položaja čestice \vec{r} , vektor brzine čestice \vec{v} . Vektor brzine tangentan je na trajektoriju čestice (roze linija)



Slika 1.2: Postulati sile

a ubrzanje

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} \equiv \ddot{\vec{r}}.$$

Impuls čestice mase m , koja se kreće brzinom \vec{v} definiše se kao

$$\vec{p} = m\vec{v}.$$

Ako se impuls \vec{p} čestice menja u toku vremena kažemo da na česticu deluje sila \vec{F} , pri čemu važi

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad (1.1)$$

što predstavlja **osnovni dinamički zakon** (*II Njutnov zakon*). Ako je masa m konstantna, prethodna jednačina se svodi na poznati izraz

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (1.2)$$

Izraz $m\vec{a}$ ćemo zvati *dinamička sila*, a sila \vec{F} u inercijalnim sistemima potiče samo od interakcije među česticama (tzv. *prava sila*). U daljem toku izlaganja ćemo pretpostavljati da radimo u *inercijalnim sistemima* (osim ako se posebno ne naglasi suprotno), tj. pod \vec{F} ćemo uvek podrazumevati pravu silu, čije su osnovne osobine ustanovljene tzv. postulatima sile.

1.2 Postulati sile

Iskustvo pokazuje da sila u inercijalnim sistemima zadovoljava sledeće osobine:

1. *Zakon inercije*: u inercijalnim sistemima čestica (stalne mase) ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja ako ne interaguje ni sa kakvim drugim česticama, tj. ako na nju ne deluje nikakva sila (*I Njutnov zakon*).

2. Sila interakcije između dve čestice, čije su mase, vektori položaja i brzine redom jednaki m_1 , \vec{r}_1 , \vec{v}_1 i m_2 , \vec{r}_2 , \vec{v}_2 , zavisi samo od relativnog radijus vektora i relativne brzine čestica. Znači, ako sa \vec{F}_{21} označimo silu kojom čestica 2 deluje na česticu 1, onda je

$$\vec{F}_{21} = \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2). \quad (1.3)$$

3. Štaviše, sila interakcije između dve čestice je kolinearna sa relativnim vektorom položaja čestica i ima oblik

$$\vec{F}_{21} = f(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}, \quad (1.4)$$

pri čemu važe principi

- *superpozicije*, tj. ukupna sila \vec{F}_3 kojom čestice 1 i 2 deluju na neku treću česticu, jednaka je vektorskom zbiru sila kojom čestice 1 i 2 pojedinačno deluju na nju, tj. $\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23}$;
- *akcije i reakcije*, tj. sile kojom dve čestice uzajamno deluju jedna na drugu, jednake su po intenzitetu i pravcu, a suprotnog su smera:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12} \quad (1.5)$$

(III Njutnov zakon).

1.3 O inercijalnim sistemima

Sve do zasnivanja specijalne teorije relativnosti, smatralo se da postoji apsolutni referentni sistem koji miruje, a svi sistemi, koji se kreću konstantnom brzinom u odnosu na njega nazivani su inercijalnim sistemima. Danas se zna da postojanje apsolutno mirujućeg sistema nije moguće utvrditi, pa se koristi tzv. *Ajnshtajnova definicija*: **inercijalni sistem** je referentni sistem u kome telo koje ne interaguje sa drugim telima ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja.

Za naše potrebe za sada je dovoljno pretpostaviti da postoji barem jedan inercijalni sistem, a svaki drugi koji se u odnosu na njega kreće konstantnom brzinom je takođe inercijalan.

Galilejeve transformacije opisuju kako se menjaju koordinate nekog fizičkog događaja pri prelasku iz jednog u drugi inercijalni sistem. U nerelativističkoj fizici smatra se da je *vreme apsolutno*, tj. da je vremenski interval između dva događaja isti u svim inercijalnim sistemima. Posmatrajmo dva inercijalna sistema S i S' , u kojima smo koordinatne sisteme (Dekartove) izabrali tako da se u početnom trenutku poklapaju, dok im u daljem kretanju ose ostaju paralelne, a sistem S' se u odnosu na S kreće duž zajedničke x -ose, brzinom konstantnog intenziteta u . Sa slike 1.3 se onda jasno vidi da Galilejeve transformacije imaju oblik

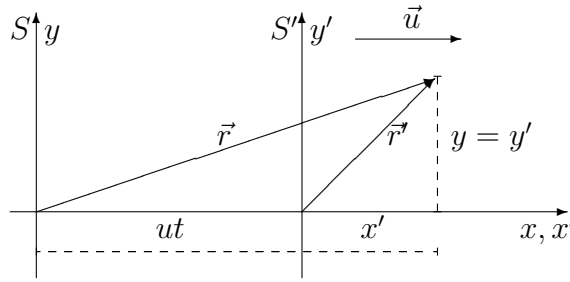
$$x' = x - ut, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (1.6)$$

pri čemu je, zbog apsolutnosti vremena:

$$t' = t. \quad (1.7)$$

Očigledna posledica Galilejevih transformacija je da je vektor relativnog položaja između dve tačke isti u svim inercijalnim sistemima, tj.

$$\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \quad (1.8)$$



Slika 1.3: Galilejeve transformacije

kao i da se relativna brzina ne menja pri prelasku iz jednog u drugi inercijalni sistem (pošto je vreme apsolutno), tj.

$$\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2. \quad (1.9)$$

Takođe se lako proverava da je i ubrzanje čestice isto u svim inercijalnim sistemima

$$\vec{a} = \vec{a}'. \quad (1.10)$$

Ako sada uočimo sistem od dve čestice, onda osnovni dinamički zakon za česticu 1 u sistemu S ima oblik¹

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_{21}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2, \vec{v}_1 - \vec{v}_2), \quad (1.11)$$

odakle, zbog Galilejevih transformacija, važi

$$m_1 \vec{a}'_1 = \vec{F}_{21}(\vec{r}'_1 - \vec{r}'_2, \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2), \quad (1.12)$$

što znači da osnovni dinamički zakon u ovom slučaju ima isti oblik u svim inercijalnim sistemima, pri čemu smo iskoristili i iskustvom potvrđenu činjenicu da je masa čestice ista u svim inercijalnim sistemima.

1.4 Diferencijalne jednačine kretanja za sistem čestica

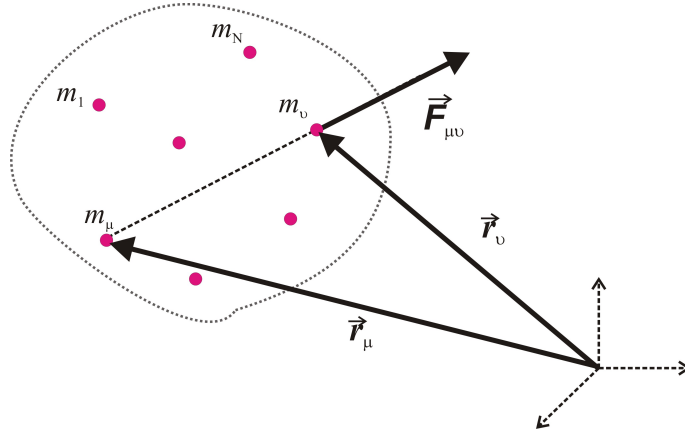
Posmatrajmo sistem od N čestica, koje interaguju međusobno, ali ne i sa okolnim telima. Takav sistem zovemo *izolovan sistem* čestica. Sila koja deluje na ν -tu česticu jednaka je zbiru svih sila kojima ostale čestice iz sistema deluju na nju, tj.

$$\vec{F}_\nu = \sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu}, \quad \text{pri čemu je} \quad \vec{F}_{\mu\mu} = 0, \quad (1.13)$$

za svako μ , tj. čestice ne interaguju same sa sobom. Pošto je, po postulatima sile

$$\vec{F}_{\mu\nu} = \vec{F}_{\mu\nu}(\vec{r}_\mu - \vec{r}_\nu, \vec{v}_\mu - \vec{v}_\nu), \quad (1.14)$$

¹Ovde pretpostavljamo da čestice interaguju samo međusobno, a ne i sa nekim drugim telima.



Slika 1.4: Izolovan sistem čestica

ukupna sila koja deluje na ν -tu česticu je funkcija vektora položaja i brzina svih čestica sistema, tj.

$$\vec{F}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_N). \quad (1.15)$$

Posmatrajmo sada *neizolovan sistem*, koji se sastoji od n čestica. Ako taj sistem „dopunimo“ do izolovanog sistema, koji sadrži ukupno N čestica, silu koja deluje na proizvoljnu česticu iz uočenog neizolovanog sistema, možemo da napišemo u obliku

$$\begin{aligned} \vec{F}_\nu &= \vec{F}_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{r}_{n+1}, \dots, \vec{r}_N(t), \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, \vec{v}_{n+1}(t), \dots, \vec{v}_N(t)) \\ &= \vec{F}_\nu^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t), \end{aligned} \quad (1.16)$$

gde smo eksplicitnu zavisnost sile \vec{F}_ν od vektora položaja i brzina čestica kojima smo sistem „dopunili“ do izolovanog, zamenili eksplicitnom zavisnošću od vremena, čime je dobijena funkcija \vec{F}_ν^* . Odatle zaključujemo da eksplicitna zavisnost sile od vremena ukazuje na neizolovanost sistema.

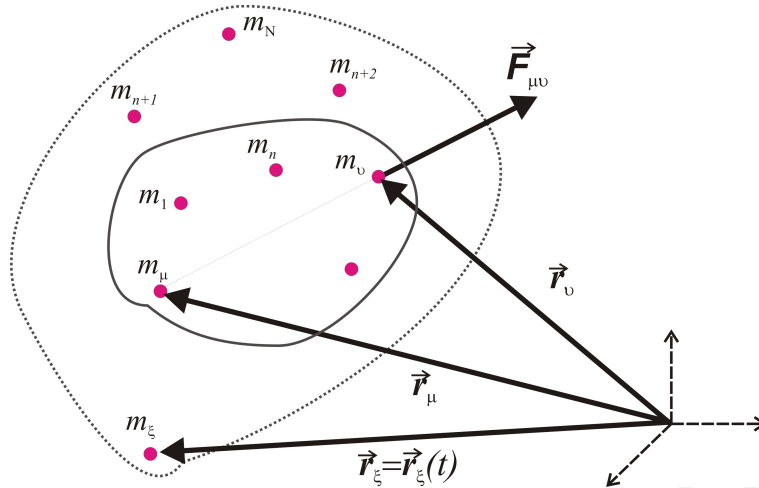
Ako napišemo osnovnu jednačinu dinamike za svaku česticu neizolovanog sistema, dobijamo sistem vektorskih jednačina

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= \vec{F}_1^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t) \\ &\dots \\ m_n \vec{a}_n &= \vec{F}_n^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n, t), \end{aligned} \quad (1.17)$$

odnosno, uzimajući u obzir definicije brzine i ubrzanja

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{\vec{r}}_1 &= \vec{F}_1^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t), \\ &\dots \\ m_n \ddot{\vec{r}}_n &= \vec{F}_n^*(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_n, t). \end{aligned} \quad (1.18)$$

Ako poznajemo sve sile koje deluju na čestice, ovaj sistem predstavlja sistem od n običnih diferencijalnih vektorskih jednačina drugog reda, u kome su nepoznate funkcije vektori položaja svih n čestica sistema, a nezavisno promenljiva vreme t . Ove jednačine predstavljaju **diferencijalne**



Slika 1.5: Neizolovan sistem čestica (unutar pune zatvorene linije), dopunjen do izolovanog (sve unutar isprekidane zatvorene linije).

jednačine kretanja i, ako su poznati *početni uslovi*, tj. položaji i brzine čestica u početnom trenutku, u principu je moguće naći konačne jednačine kretanja $\vec{r}_1(t), \dots, \vec{r}_n(t)$.

Iz Galilejevih transformacija (odnosno njihovih posledica (1.8), (1.9) i (1.10)) sledi da diferencijalne jednačine kretanja zadržavaju isti oblik u svim inercijalnim sistemima, što znači da su *zakoni mehanike isti u svim inercijalnim sistemima*. Ovaj stav poznat je kao **Galilejev princip relativnosti**. Takođe, iz činjenice da su u njima izvodi nepoznatih funkcija $\vec{r}(t)$ najvišeg, tj. drugog reda, izraženi eksplicitno u funkciji svih ostalih veličina, sledi da ove jednačine za proizvoljne početne uslove imaju *jednoznačno rešenje* (pod dosta širokim opštim uslovima, koji su u mehanici po pravilu zadovoljeni). Ovo je posledica jedne matematičke teoreme, a fizički to znači da *sile koje deluju na sistem i kinematičko stanje sistema (tj. položaji i brzine čestica) u bilo kom trenutku jednoznačno određuju kretanje tog sistema*, što predstavlja sadržaj tzv. **mehaničkog principa kauzalnosti**.

ZADACI

Zadatak 1.4.1. Projektil mase m kreće se kroz atmosferu pod delovanjem gravitacione sile $m\vec{g}$. Osim gravitacione sile na projektil deluje i sila otpora vazduha \vec{F}^* proporcionalna brzini projektila \vec{v} , sa koeficijentom proporcionalnosti γm ($\vec{F}^* = -\gamma m \vec{v}$).

(i) Uzimajući da je početak koordinatnog sistema postavljen u tačku iz koje je projektil izbačen, da je osa z izabrana tako da je $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, a da je početna brzina projektila $\vec{v}(t=0) = v_1\vec{e}_x + v_3\vec{e}_z$, pokazati da se jednačina trajektorije projektila može napisati u obliku:

$$z = \frac{\gamma v_3 + g}{\gamma v_1} x + \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_1} \right).$$

Razvijajući logaritam u prethodnom izrazu u red, naći aproksimativnu jednačinu trajektorije projektila u sredini u kojoj je sila otpora mala, do člana linearnog po γ . (Primetiti da je za to u razvoju

logaritma potrebno ići do člana proporcionalnog trećem stepenu γ .) Pokazati da je u tom slučaju domet (u ravni $z = 0$) jednak

$$D = \frac{2v_1v_3}{g} - \frac{8\gamma v_1v_3^2}{3g^2}.$$

(ii) Na osnovu izraza izvedenog u prethodnom delu zadatka pokazati da ugao α (u odnosu na ravan $z = 0$), pod kojim treba izbaciti projektil da bi domet D pri zadatom intenzitetu v_0 početne brzine bio maksimalan, zadovoljava jednačinu

$$\cos 2\alpha = \frac{\sqrt{2}\gamma v_0}{3g}.$$

(Uputstvo: u članu koji sadrži γ uzeti vrednost nulte aproksimacije za ugao.)

(iii) Proceniti optimalni ugao α i domet D za projektil izbačen početnom brzinom $v_0 = 100 \text{ m/s}$, ako je poznato da u slučaju kada se taj projektil ispusti bez početne brzine sa velike visine njegova brzina dostiže graničnu vrednost $v_G = 500 \text{ m/s}$.

©2010 S. Elezović-Hadžić

RADNA VERZIJA
Teorijska mehanika

Glava 2

Osnovne teoreme mehanike

2.1 Teorema kinetičke energije

Posmatrajmo proizvoljan fizički sistem, koji se sastoji od N čestica. Interesuje nas za koliko se promeni njegova ukupna kinetička energija T u toku infinitezimalno kratkog vremenskog intervala dt . Pošto je

$$T = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_{\nu} \vec{v}_{\nu}^2,$$

odgovarajuća promena kinetičke energije jednaka je

$$dT = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu} \cdot d\vec{v}_{\nu},$$

gde je $d\vec{v}_{\nu}$ promena brzine ν -te čestice do koje je došlo za vreme dt . Kako je $d\vec{v}_{\nu} = \vec{a}_{\nu} dt$, izraz za dT može da se prepíše kao

$$dT = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu} \cdot \vec{a}_{\nu} dt,$$

a pošto je $d\vec{r}_{\nu} = \vec{v}_{\nu} dt$, konačno se dobija

$$dT = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{a}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu}. \quad (2.1)$$

Izraz $\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu}$ je, po definiciji, ukupni rad izvršen na česticama sistema za vreme dt . Odavde je jasno da je *promena ΔT ukupne kinetičke energije sistema, do koje dođe za proizvoljno vreme Δt , jednaka ukupnom radu ΔA izvršenom na sistemu za to vreme.* Ovaj stav je poznat kao **teorema kinetičke energije**.

2.1.1 Zakon održanja ukupne mehaničke energije

Sile \vec{F}_{ν} koje mogu da se izraze preko skalarne funkcije $U(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_n, t)$ kao

$$\vec{F}_{\nu} = -\text{grad}_{\nu} U = - \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} \vec{e}_x + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} \vec{e}_y + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} \vec{e}_z \right) \quad (2.2)$$

nazivaju se *potencijalne sile*, a funkcija U *potencijalna energija* sistema. Ako U ne zavisi eksplicitno od vremena, kažemo da su odgovarajuće sile *konzervativne*. (Primeri: gravitaciona sila, sila elastičnosti opruge itd.)

Ukupna mehanička energija E sistema se definiše kao zbir njegove kinetičke T i potencijalne energije U : $E = T + U$.

Ako su sve sile koje deluju na sistem konzervativne, onda je ukupni rad izvršen na sistemu za vreme dt jednak

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = - \sum_{\nu=1}^N \text{grad}_{\nu} U \cdot d\vec{r}_{\nu} = - \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} dy_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} dz_{\nu} \right) = -dU,$$

što znači da rad koji izvrše konzervativne sile zavisi samo od početnih i krajnjih položaja čestica na koje te sile deluju, a ne i od puta, tj. načina na koji su se čestice premestile iz početnih u krajnje položaje. Pošto je prema teoremi kinetičke energije (2.1) taj rad upravo jednak promeni kinetičke energije, sledi da je

$$dT = -dU \quad \Rightarrow \quad d(T + U) = dE = 0 \quad \Rightarrow \quad E = \text{const}, \quad (2.3)$$

tj. važi **zakon održanja energije**: ako su sve sile koje deluju na čestice sistema konzervativne, onda se ukupna mehanička energija sistema održava u toku kretanja. Jasno je da zakon održanja energije važi i ako osim konzervativnih sila deluju i tzv. *giroskopske sile*, tj. sile koje ne vrše rad (npr. Lorencova sila $q\vec{v} \times \vec{B}$, kojom magnetno polje \vec{B} deluje na česticu naelektrisanja q , koja se kreće brzinom \vec{v}).

Ako potencijalna energija U eksplicitno zavisi od vremena, onda je

$$dU = \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial y_{\nu}} dy_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial z_{\nu}} dz_{\nu} \right) + \frac{\partial U}{\partial t} dt = - \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} + \frac{\partial U}{\partial t} dt = -dT + \frac{\partial U}{\partial t} dt,$$

pa je jasno da zakon održanja energije u tom slučaju ne važi.

2.2 Teorema impulsa

Ukupni impuls \vec{p} proizvoljnog sistema od N čestica jednak je

$$\vec{p} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu},$$

a brzina njegove promene je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \frac{d\vec{v}_{\nu}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_{\nu},$$

gde smo iskoristili osnovni dinamički zakon (1.1) za česticu. Silu koja deluje na ν -tu česticu možemo da razložimo na silu koja potiče od čestica unutar sistema i na spoljašnju silu \vec{F}_{ν}^{spolj} (koja postoji ako sistem nije izolovan):

$$\vec{F}_{\nu} = \sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}_{\nu}^{spolj},$$

tako da je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \left(\sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}_{\nu}^{spolj} \right) = \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}^{spolj}.$$

Ukupna unutrašnja sila jednaka je nuli, pošto je

$$\sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^N \vec{F}_{\nu\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu,\nu=1}^N (\vec{F}_{\mu\nu} + \vec{F}_{\nu\mu}) = 0,$$

gde smo prvo u drugoj dvostrukoj sumi promenili mesta nemim indeksima μ i ν , a zatim iskoristili zakon akcije i reakcije. Znači, *brzina promene ukupnog impulsa sistema jednaka je ukupnoj spoljašnjoj sili koja deluje na sistem*, tj.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{spolj}, \quad (2.4)$$

što predstavlja **teoremu impulsa**.

Vektor položaja *centra mase* \vec{r}_c je po definiciji jednak

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{r}_{\nu}}{\sum_{\nu=1}^N m_{\nu}} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{r}_{\nu}, \quad (2.5)$$

gde je $m = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu}$ ukupna masa sistema, pa je

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{m} \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu} \Rightarrow \vec{p} = \sum_{\nu=1}^N m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = m \vec{v}_c.$$

Ako dobijeni izraz za impuls zamenimo u (2.4) zaključujemo da je

$$m \vec{a}_c = \vec{F}^{spolj}, \quad (2.6)$$

što znači da se *centar mase sistema kreće kao čestica mase jednake ukupnoj masi sistema, na koju deluje sila jednaka ukupnoj spoljašnjoj sili koja deluje na sistem*.

2.2.1 Zakon održanja impulsa

Iz teoreme impulsa (2.4) direktno sledi **zakon održanja impulsa**: *ako je ukupna spoljašnja sila koja deluje na sistem jednaka nuli, impuls sistema se ne menja u toku vremena*.

2.3 Teorema momenta impulsa

Moment proizvoljne vektorske veličine \vec{A} u odnosu na neku tačku O (tzv. *pol*) definiše se kao vektorski proizvod $\vec{r} \times \vec{A}$, gde je \vec{r} vektor položaja tačke u kojoj posmatramo \vec{A} . **Moment impulsa** $\vec{M}^{(O)}$ čestice u odnosu na pol O je onda

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r} \times m \vec{v}, \quad (2.7)$$

a **moment sile** $\vec{K}^{(O)}$:

$$\vec{K}^{(O)} = \vec{r} \times \vec{F}. \quad (2.8)$$

Ukupni moment impulsa sistema od N čestica u odnosu na koordinatni početak inercijalnog sistema u kome posmatramo sistem jednak je

$$\vec{M} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu},$$

pa je brzina njegove promene

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \underbrace{\sum_{\nu=1}^N \frac{d\vec{r}_{\nu}}{dt} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu}}_{=0} + \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \frac{d\vec{v}_{\nu}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{a}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}. \quad (2.9)$$

Ako silu koja deluje na ν -tu česticu razložimo na njenu unutrašnju i spoljašnju komponentu, slično kao pri izvođenju teoreme impulsa, zaključujemo da je ukupni moment unutrašnjih sila jednak nuli. Naime,

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}^{unutr} &= \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \sum_{\mu=1}^N \vec{F}_{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu}}_{\nu \leftrightarrow \mu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\mu} \times \vec{F}_{\nu\mu}}_{\text{akcija-reakcija}} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \sum_{\mu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^N \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\mu} \times \vec{F}_{\mu\nu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu=1}^N (\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}) \times \vec{F}_{\mu\nu} = 0, \end{aligned}$$

gde smo u poslednjem redu iskoristili postulat sile po kome je sila interakcije između dve čestice kolinearna sa njihovim relativnim vektorom položaja. Konačno, iz (2.9) onda sledi

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \sum_{\nu=1}^N \vec{r}_{\nu} \times \vec{F}_{\nu}^{spolj} = \vec{K}^{spolj}, \quad (2.10)$$

tj. *brzina promene momenta impulsa sistema jednaka je ukupnom momentu svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem*, što predstavlja **teoremu momenta impulsa**.

2.3.1 Zakon održanja momenta impulsa

Ako je ukupni moment svih spoljašnjih sila jednak nuli, onda je

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = 0,$$

pa je ukupni moment impulsa sistema stalan u toku vremena.

ZADACI

©2010 S. Elezović-Hadžić

RADNA VERZIJA
Teorijska mehanika

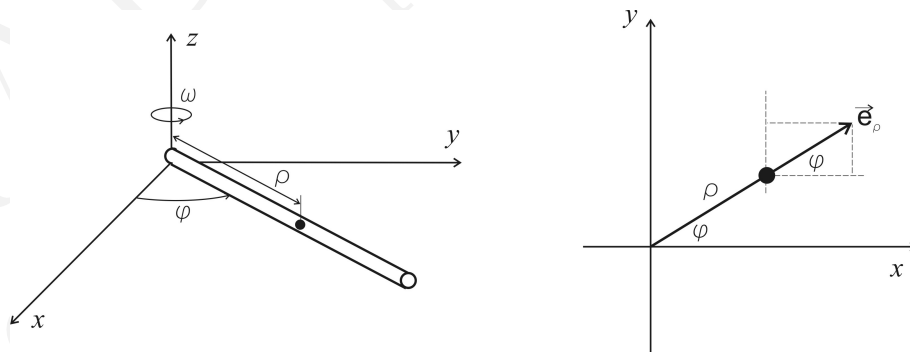
Glava 3

Metod nezavisnih generalisanih koordinata

3.1 Veze

Ako pri kretanju sistema postoje izvesna ograničenja na položaje i brzine čestica, kažemo da sistem vrši **prinudno kretanje**. U suprotnom, tj. ako nema takvih ograničenja, kaže se da je sistem slobodan ili da vrši **slobodno kretanje**. Pomenuta ograničenja se nazivaju **veze** i ona se realizuju pomoću površina, poluga, osovina ili drugih mehanizama. Matematički se veze izražavaju relacijama između koordinata i brzina čestica, i vremena. Ovde će biti razmatrani samo slučajevi kada su te relacije izražene jednačinama koje sadrže samo koordinate čestica i vreme. Takve veze nazivaju se **holonomne**. U zavisnosti od toga da li eksplicitno zavise od vremena ili ne, one se nazivaju *nestacionarne* odnosno *stacionarne*, redom.

Primer 3.1.1. Na slici 3.1 prikazan je sistem koji se sastoji od jedne čestice, čije je kretanje ograničeno uslovom da se ona u svakom trenutku nalazi u uskoj cevi koja rotira konstantnom ugaoonom brzinom ω oko z ose i stalno je u Oxy ravni. Ako za određivanje položaja čestice izaberemo cilindrične koordinate (ρ, φ, z) , onda su u svakom trenutku zadovoljeni uslovi: $z = 0$, $\varphi = \omega t + \varphi_0$, gde je φ_0 ugao koji je cev zaklapala sa x osom u trenutku $t = 0$. Ove dve jednačine predstavljaju



Slika 3.1: U tankoj cevi koja u Oxy ravni rotira oko z ose (konstantnom ugaoonom brzinom ω) nalazi se čestica.

veze i jasno je da se radi o holonomnim vezama, pri čemu je prva stacionarna, a druga nestacionarna.

3.2 Nezavisne generalisane koordinate

Posmatrajmo sistem od N čestica, čiji su položaji ograničeni sa k holonomnih veza. Skup od zadatih k holonomnih jednačina veza

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) &= 0, \\ &\vdots \\ f_k(x_1, y_1, z_1, \dots, x_N, y_N, z_N, t) &= 0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

može da se shvati kao sistem algebarskih jednačina po k , proizvoljno izabranih, Dekartovih koordinata čestica. Rešavanjem tog sistema, izabranih k koordinata može da se izrazi preko preostalih $n = 3N - k$ koordinata. Broj n naziva se **broj stepeni slobode** i predstavlja minimalan broj veličina potrebnih da se potpuno opiše položaj svih čestica, odnosno konfiguracija sistema. Ukoliko simetrija problema to nameće, umesto Dekartovih koordinata mogu da se izaberu neke druge, tzv. *generalisane* koordinate, ali je i u tom slučaju od prvobitnih $3N$ koordinata moguće izabrati $n = 3N - k$ **nezavisnih generalisanih koordinata** koje u svakom trenutku jednoznačno određuju konfiguraciju sistema. Nezavisne generalisane koordinate ćemo označavati sa q_i , $i = 1, \dots, n$ i u daljem toku izlaganja ćemo ih kratko zvati generalisane koordinate (kada ne postoji mogućnost zabune), a njihove izvode po vremenu $\dot{q} = \frac{dq}{dt}$ – **generalisane brzine**. Generalisane koordinate, dakle, potpuno opisuju položaj sistema čestica, ali ne moraju biti vezane za pojedinačne čestice. Npr. ako posmatramo sistem od 2 čestice, koje se kreću duž x -ose, za generalisane koordinate možemo izabrati x -koordinatu centra mase tog sistema i rastojanje između čestica.

Formalno, postupak određivanja nezavisnih generalisanih koordinata se izvodi na sledeći način. Prepostavimo da smo sa prvobitnih $3N$ Dekartovih koordinata prešli na $3N$ nekih drugih, pogodnijih, koordinata koje ćemo označiti sa q_1, q_2, \dots, q_{3N} , tako da važi

$$x_i = x_i(q_1, \dots, q_{3N}), \quad y_i = y_i(q_1, \dots, q_{3N}), \quad z_i = z_i(q_1, \dots, q_{3N}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (3.2)$$

U jednačinama veza (3.1) Dekartove koordinate sada mogu da se izraze preko generalisanih koordinata q_i , čime se dobija sistem od k algebarskih jednačina u kojima figuriše $3N$ generalisanih koordinata. Od tih $3N$ generalisanih koordinata izaberemo $n = 3N - k$ nezavisnih generalisanih koordinata: q_1, \dots, q_n , a sve ostale $q_{n+1}, q_{n+2}, \dots, q_{3N}$ izrazimo preko njih. Konačno, pomoću jednačina (3.2), sve Dekartove koordinate mogu da se izraze preko nezavisnih generalisanih koordinata q_1, \dots, q_n , tako da se *vektor položaja \vec{r}_ν proizvoljne čestice sistema izražava u funkciji nezavisnih generalisanih koordinata i vremena t* kao

$$\vec{r}_\nu = x_\nu(q_1, \dots, q_n, t)\vec{e}_x + y_\nu(q_1, \dots, q_n, t)\vec{e}_y + z_\nu(q_1, \dots, q_n, t)\vec{e}_z = \vec{r}_\nu(q_1, \dots, q_n, t). \quad (3.3)$$

Vreme t se eksplicitno javlja u ovom izrazu ako ono postoji i u jednačinama veza (3.1), tj. u slučaju nestacionarnih veza, ili ako relacije između Dekartovih i generalisanih koordinata (3.2) eksplicitno sadrže vreme. Položaj svake čestice je, dakle, potpuno određen u svakom trenutku, ako su poznate zavisnosti nezavisnih generalisanih koordinata od vremena $q_i(t)$. Brzina čestice je onda

$$\vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = \vec{v}_\nu(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t), \quad (3.4)$$

tj. predstavlja funkciju generalisanih koordinata q_i , generalisanih brzina \dot{q}_i i vremena t .

Primer 3.2.1. Kao što je pokazano, u primeru 3.1.1 postoje dve veze, pa, pošto se sistem sastoji od jedne čestice, broj stepeni slobode je $n = 3 \cdot 1 - 2 = 1$. Za jedinu generalisanu koordinatu ovde je najprirodnije izabrati cilindričnu koordinatu ρ , tj. rastojanje čestice od z ose. Korišćenjem jednačina veza: $z = 0$ i $\varphi = \omega t + \varphi_0$, radijus-vektor čestice onda može da se napiše u obliku:

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho = \rho(\cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y) = \rho[\cos(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_x + \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_y] = \vec{r}(\rho, t), \quad (3.5)$$

a brzina je jednaka:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \dot{\rho} + \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = \dot{\rho}[\cos(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_x + \sin(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_y] + \rho \omega [-\sin(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_x + \cos(\omega t + \varphi_0) \vec{e}_y] \\ &= \vec{v}(\rho, \dot{\rho}, t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.1 Kinetička energija

Kinetička energija se na sledeći način izražava u funkciji generalisanih koordinata i brzina :

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \vec{v}_\nu^2 = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 \\ &= \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right) \\ &= \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + 2 \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \cdot \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_i + \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i + C(q_1, \dots, q_n, t), \end{aligned} \quad (3.7)$$

gde su

$$A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j}, \quad (3.8)$$

$$B_i(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t}, \quad (3.9)$$

$$C(q_1, \dots, q_n, t) = \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \left(\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right)^2. \quad (3.10)$$

Znači, kinetička energija je kvadratna funkcija generalisanih brzina, a u slučaju kada \vec{r}_ν ne zavisi eksplicitno od vremena ni za jedno ν , ona će sigurno biti i homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, pošto su tada svi koeficijenti B_i i C jednaki nuli.

Primer 3.2.2. Kinetička energija čestice (mase m) iz primera 3.1.1 je na osnovu formule 3.7 jednaka

$$T = \frac{1}{2}A(\rho, t)\dot{\rho}^2 + B(\rho, t)\dot{\rho} + C(\rho, t),$$

gde su, prema gore izvedenim formulama, koeficijenti A , B i C jednaki

$$A(\rho, t) = m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \right)^2 = m, \quad B(\rho, t) = m \frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} = 0, \quad C(\rho, t) = \frac{1}{2}m \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)^2 = m\rho^2\omega^2,$$

pa je

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2).$$

Kinetička energija je ovde (što je često slučaj) brže mogla da se dobije zamenom opšteg izraza za kvadrat brzine u cilindričnim koordinatama u definicioni izraz za kinetičku energiju, u kome se onda iskoriste jednačine veza:

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2 \underbrace{\dot{\varphi}^2}_{=\omega^2} + \underbrace{\dot{z}^2}_{=0}) = \frac{1}{2}m(\dot{\rho}^2 + \rho^2\omega^2).$$

U ovom primeru kinetička energija je nehomogena kvadratna funkcija generalisane brzine zato što postoji nestacionarna veza. Iako je $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \neq 0$, linearni član u kinetičkoj energiji ne postoji zato što su vektori $\frac{\partial \vec{r}}{\partial t}$ i $\frac{\partial \vec{r}}{\partial \rho}$ međusobno ortogonalni.

3.2.2 Rad

Izračunajmo sada ukupni rad pri kretanju u toku kojeg se čestice pod delovanjem sila \vec{F}_ν pomere za $d\vec{r}_\nu$:

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) dq_i + \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt. \quad (3.11)$$

Suma koja u prvom sabirku u poslednjem izrazu stoji uz dq_i naziva se **generalisanom silom**, koja odgovara generalisanoj koordinati q_i , i označićemo je sa Q_i , tako da je

$$Q_i = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}. \quad (3.12)$$

Primer 3.2.3. U slučaju slobodnog kretanja sistema od N čestica za nezavisne generalisane koordinate možemo da uzmemo Dekartove koordinate čestica: $x_\nu, y_\nu, z_\nu, \nu = 1, N$. Tada je ukupni elementarni rad:

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot d\vec{r}_\nu = \sum_{\nu=1}^N (F_{\nu,x}dx_\nu + F_{\nu,y}dy_\nu + F_{\nu,z}dz_\nu),$$

pa je jasno da se generalisane sile u ovom slučaju poklapaju sa odgovarajućim Dekartovim komponentama sila koje deluju na čestice.

Primer 3.2.4. Ako za generalisane koordinate u slučaju jedne čestice koja se slobodno kreće izaberemo cilindrične koordinate i ako na česticu deluje sila

$$\vec{F} = F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z ,$$

za elementarni rad dobijamo izraz

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = (F_\rho \vec{e}_\rho + F_\varphi \vec{e}_\varphi + F_z \vec{e}_z) \cdot (d\rho \vec{e}_\rho + \rho d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z) = F_\rho d\rho + F_\varphi \rho d\varphi + F_z dz ,$$

odakle se vidi da su generalisane sile

$$Q_\rho = F_\rho , \quad Q_\varphi = F_\varphi \rho , \quad Q_z = F_z .$$

Glava 4

Dalamber-Lagranžev princip

4.1 Moguća i virtuelna pomeranja

Infinitezimalno pomeranje $d\vec{r}_\nu$ čestice ν nazivamo **mogućim** ako je ono u skladu sa vezama. **Virtuelno** pomeranje čestice $\delta\vec{r}_\nu$ je po definiciji jednako razlici dva moguće pomeranja, $d\vec{r}_\nu$ i $d'\vec{r}_\nu$, iz iste tačke \vec{r}_ν , u istom trenutku i koja traju isto vreme dt . Ako pomeranju $d\vec{r}_\nu$ odgovara promena generalisanih koordinata dq_i , $i = 1, \dots, n$, a pomeranju $d'\vec{r}_\nu$ promena $d'q_i$, $i = 1, \dots, n$, onda virtuelno pomeranje preko generalisanih koordinata može da se izrazi na sledeći način:

$$\begin{aligned}\delta\vec{r}_\nu &= d'\vec{r}_\nu - d\vec{r}_\nu = \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} d'q_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt \right) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} dt \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i,\end{aligned}\tag{4.1}$$

gde δq_i označava razliku odgovarajućih pomeranja $d'q_i$ i dq_i :

$$\delta q_i = d'q_i - dq_i, \quad i = 1, \dots, n.\tag{4.2}$$

Primeri...

4.2 Reakcije

Sile koje se javljaju usled postojanja veza nazivaju se **silama reakcije**. Kažemo da su sile reakcije **idealne** ako su jednake linearnoj kombinaciji gradijenata $\text{grad}_\nu f_i$

$$\vec{R}_\nu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad}_\nu f_i,\tag{4.3}$$

gde λ_i (tzv. Lagranževi množitelji veza) mogu biti funkcije koordinata i brzina svih čestica, kao i vremena, ali su isti za sve čestice. Izračunajmo ukupni rad svih sila reakcije na mogućem pomeranju:

$$\begin{aligned}
 \sum_{\nu=1}^N \vec{R}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{i=1}^k \lambda_i \text{grad}_{\nu} f_i \cdot d\vec{r}_{\nu} \\
 &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_{\nu}} dx_{\nu} + \frac{\partial f_i}{\partial y_{\nu}} dy_{\nu} + \frac{\partial f_i}{\partial z_{\nu}} dz_{\nu} \right) \\
 &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(df_i - \frac{\partial f_i}{\partial t} dt \right) = - \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial f_i}{\partial t} dt.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Odatle je jasno da je ukupni rad svih sila reakcije na virtuelnom pomeranju jednak nuli:

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{R}_{\nu} \cdot \delta\vec{r}_{\nu} = \sum_{\nu=1}^N \vec{R}_{\nu} \cdot d'\vec{r}_{\nu} - \sum_{\nu=1}^N \vec{R}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = 0. \tag{4.5}$$

4.3 Dalamber-Lagranžev princip

Napišimo sada osnovni dinamički zakon za proizvoljnu česticu ν :

$$m_{\nu} \vec{a}_{\nu} = \vec{F}_{\nu} + \vec{R}_{\nu},$$

gde smo ukupnu silu koja deluje na česticu razdvojili na **aktivnu silu** \vec{F}_{ν} i silu reakcije \vec{R}_{ν} . Ako svaku takvu jednačinu pomnožimo virtuelnim pomeranjem $\delta\vec{r}_{\nu}$ i prosumiramo po svim česticama dobijamo **Dalamber–Lagranžev princip**:

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\vec{F}_{\nu} - m_{\nu} \vec{a}_{\nu} \right) \cdot \delta\vec{r}_{\nu} = 0,$$

tj, ukupni rad svih aktivnih sila i *fiktivnih sila inercije* $(-m_{\nu} \vec{a}_{\nu})$ na virtuelnim pomeranjima idealnih holonomnih sistema jednak je nuli.

ZADACI

Zadatak 4.3.1. Eksplicitnim računom pokazati da je rad idealnih sila reakcije na virtuelnom pomeranju u slučaju Tejlorovog klatna jednak nuli. Tejlorovo klatno je čestica mase m koja se u homogenom gravitacionom polju bez trenja kreće po tankom prstenu poluprečnika R , koji rotira oko svog vertikalnog prečnika konstantnom ugaonom brzinom ω .

Glava 5

Lagranževe jednačine

Iz Dalamber–Lagranževog principa mogu se dobiti tzv. **Lagranževe jednačine**:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

gde generalisane sile Q_i potiču samo od aktivnih sila.

5.1 Izvođenje Lagranževih jednačina

- Pošto je

$$\delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i \quad \text{i} \quad \vec{a}_\nu = \frac{d\vec{v}_\nu}{dt},$$

izraz $\vec{a}_\nu \delta \vec{r}_\nu$ jednak je

$$\vec{a}_\nu \delta \vec{r}_\nu = \frac{d\vec{v}}{dt} \sum_{i=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) - \vec{v}_\nu \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \quad (5.2)$$

Dalje se ovaj izraz može transformisati uz pomoć relacija

$$\frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i}, \quad (5.3)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\vec{r}_\nu}{dt}. \quad (5.4)$$

Relacija (5.3) se dokazuje polazeći od izraza (3.4) za brzinu u generalisanim koordinatama:

$$\vec{v}_\nu = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t},$$

odakle je

$$\frac{\partial \dot{\vec{r}}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}, \quad (5.5)$$

pošto je

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} = 0, \quad \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_i} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = 0. \quad (5.6)$$

Da bismo pokazali (5.4) potražićemo eksplicitan izraz za $\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}.$$

Kako, međutim, parcijalni izvodi po koordinatama i vremenu komutiraju, poslednji izraz se može prepisati kao

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial q_i} \frac{d\vec{r}_\nu}{dt},$$

gde smo uzeli u obzir i

$$\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} = 0, \quad (5.7)$$

čime je relacija (5.4) dokazana. Pomoću relacija (5.3) i (5.4) izraz (5.2) dobija oblik

$$\vec{a}_\nu \delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial \dot{q}_i} \right) - \vec{v}_\nu \frac{\partial \vec{v}_\nu}{\partial q_i} \right] \delta q_i = \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial q_i} \right] \delta q_i,$$

pa je

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \vec{a}_\nu \delta \vec{r}_\nu &= \sum_{\nu=1}^N m_\nu \sum_{i=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial q_i} \right] \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial \dot{q}_i} - \sum_{\nu=1}^N m_\nu \frac{1}{2} \frac{\partial \vec{v}_\nu^2}{\partial q_i} \right) \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_i} \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \vec{v}_\nu^2 - \frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{\nu=1}^N \frac{1}{2} m_\nu \vec{v}_\nu^2 \right) \delta q_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i. \end{aligned} \quad (5.8)$$

- Kako je

$$\sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \delta \vec{r}_\nu = \sum_{i=1}^n Q_i \delta q_i$$

iz (5.8) i Dalamber–Lagranževog principa (4.3) sledi jednakost

$$\sum_{i=1}^n \left[Q_i - \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \right] \delta q_i = 0. \quad (5.9)$$

Pošto su generalisane koordinate međusobno nezavisne, to su i njihove virtuelne promene δq_i takođe međusobno nezavisne, a kako poslednja jednakost treba da bude zadovoljena za sve moguće vrednosti δq_i sledi da svi koeficijenti uz δq_i moraju biti jednaki nuli, odnosno, zaista važe Lagranževe jednačine u obliku (5.1).

5.2 Standardni oblik Lagranževih jednačina

U opštem slučaju sile koje deluju na sistem mogu biti potencijalne i nepotencijalne, pa je

$$\vec{F}_\nu = -\text{grad}_\nu U + \vec{F}_\nu^*,$$

gde smo zvezdicom obeležili nepotencijalne aktivne sile. Onda i generalisane sile Q_i možemo razdvojiti na njihov potencijalni i nepotencijalni deo:

$$\begin{aligned} Q_i &= \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} = -\sum_{\nu=1}^N \text{grad}_\nu U \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i} \\ &= -\sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right) + Q_i^*, \end{aligned}$$

gde je

$$Q_i^* = \sum_{\nu=1}^N \vec{F}_\nu^* \cdot \frac{\partial \vec{r}_\nu}{\partial q_i}$$

generalisana sila koja odgovara nepotencijalnim silama, a

$$\sum_{\nu=1}^N \left(\frac{\partial U}{\partial x_\nu} \frac{\partial x_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial y_\nu} \frac{\partial y_\nu}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial z_\nu} \frac{\partial z_\nu}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

pa je

$$Q_i = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^*.$$

Ako ovakav izraz za generalisane sile zamenimo u jednačine (5.1) dobijamo

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i^*,$$

odnosno

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial (T - U)}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial (T - U)}{\partial q_i} = Q_i^*.$$

Funkcija

$$L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) = T - U \quad (5.10)$$

naziva se Lagranževa funkcija, ili **lagranžijan**, i pomoću nje se Lagranževe jednačine pišu u uobičajenom obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^* \quad , \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.11)$$

5.3 Osobine Lagranževih jednačina

Pošto prema (3.7) kinetička energija T ima oblik

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i + C(q_1, \dots, q_n, t),$$

a potencijalna energija U ne zavisi od generalisanih brzina, parcijalni izvodi lagranžijana su jednaki:

$$\frac{\partial L}{\partial q_l} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \frac{\partial B_i}{\partial q_l} \dot{q}_i + \frac{\partial C}{\partial q_l} - \frac{\partial U}{\partial q_l}$$

i

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{q}_i \dot{q}_j) + B_l.$$

Kako je, međutim,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}_l} (\dot{q}_i \dot{q}_j) = \delta_{li} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jl},$$

dvostruka suma u izrazu za izvod lagranžijana po generalisanoj brzini svodi se na jednu sumu, tj.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} (\delta_{li} \dot{q}_j + \dot{q}_i \delta_{jl}) + B_l = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n A_{lj} \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n A_{il} \dot{q}_i \right) + B_l.$$

S druge strane, iz izraza (3.8) za koeficijente A_{ij} je jasno da je $A_{ij} = A_{ji}$, pa je

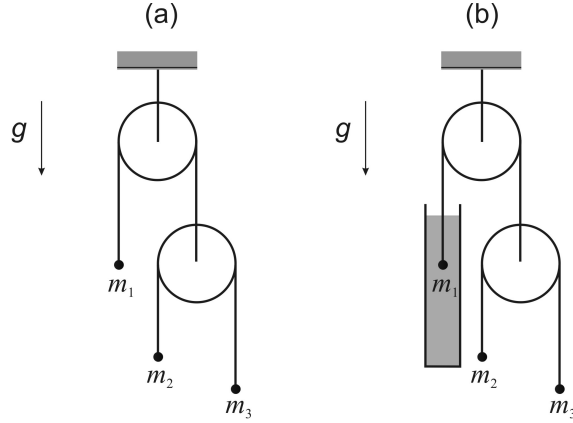
$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n A_{il} \dot{q}_i \right) + B_l \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i \right) + B_l = \sum_{i=1}^n A_{li} \dot{q}_i + B_l. \end{aligned}$$

Dalje je

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_l} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial B_l}{\partial q_j} \dot{q}_j + A_{lj} \ddot{q}_j \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial t} \dot{q}_i + \frac{\partial B_l}{\partial t} \\ &= \sum_{j=1}^n A_{lj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A_{li}}{\partial t} + \frac{\partial B_l}{\partial q_i} \right) \dot{q}_i + \frac{\partial B_l}{\partial t}, \end{aligned}$$

tako da, konačno, Lagranževe jednačine u opštem slučaju imaju oblik:

$$\sum_{j=1}^n A_{lj}(q, t) \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^n f_{lij}^1(q, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n f_{li}^2(q, t) \dot{q}_i + f_l^3(q, t) = Q_l^*(q, \dot{q}, t), \quad l = 1, \dots, n, \quad (5.12)$$



Slika 5.1: Zadatak 5.3.1: Modifikovana Atvudova mašina.

gde smo sa q i \dot{q} kratko označili skupove (q_1, \dots, q_n) i $(\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n)$. Lagranževe jednačine, dakle, predstavljaju sistem od n simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, u kome su nepoznate funkcije sve generalisane koordinate $q_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, a nezavisno promenljiva vreme t . One su linearne po izvodima najvišeg reda, \ddot{q}_i , a može se pokazati [1] da se iz njih eksplicitno svi \ddot{q}_i mogu izraziti preko generalisanih brzina, koordinata i vremena, pa se onda i odatle može izvući zaključak da važi princip kauzalnosti.

Iz Lagranževih jednačina se za sisteme sa isključivo potencijalnim silama ponekad neposredno mogu dobiti prvi integrali kretanja. Naime, ako lagranžijan ne zavisi eksplicitno od koordinate q_i (takva koordinata zove se *ciklična*), odgovarajuća Lagranževa jednačina ima oblik

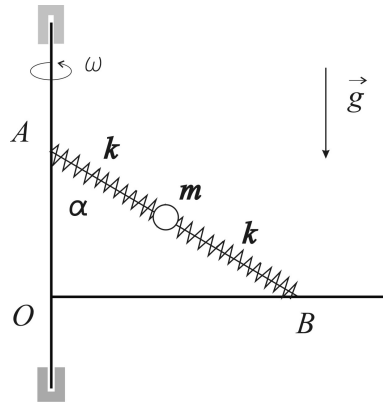
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0,$$

odakle je

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const.}$$

ZADACI

Zadatak 5.3.1. (i) Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine za sistem prikazan na slici 5.1 (a). Čestice masa m_1 , m_2 i m_3 kreću se duž odgovarajućih vertikalnih, mase koturova preko kojih su prebačene niti za koje su zakačene čestice su zanemarljive, a niti su neistegljive i takođe zanemarljive mase. (ii) Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine za sistem prikazan na slici 5.1 (b). Čestica mase m_1 potopljena je u posudu sa tečnošću, tako da na tu česticu od aktivnih sila osim sile gravitacije deluje i sila otpora sredine oblika $\vec{F}^* = -\gamma \vec{v}$, gde je γ zadata konstanta, a \vec{v} brzina čestice. (iii) Za sistem opisan u delu (b), naći konačne jednačine kretanja čestica, uzimajući da je $m_1 = 5m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = 2m$. U početnom trenutku čestice su mirovale, a položaje čestica odrediti u odnosu na njihove početne položaje. (iv) Pod uslovima definisanim u delu (c) odrediti sile zatezanja niti u proizvoljnom trenutku.



Slika 5.2: Slika uz zadatak 5.3.3.

Zadatak 5.3.2. Po strmoj ravni mase M , koja leži na glatkoj horizontalnoj ravni može da klizi materijalna tačka mase m . Ceo sistem se kreće pod delovanjem homogene gravitacione sile ($\vec{g} = -g\vec{e}_y$), a trenje se može zanemariti. Ugao pod kojim je strma ravan nagnuta u odnosu na horizontalu jednak je α , a visina strme ravni je h . Smatrati da se materijalna tačka kreće u vertikalnoj ravni Oxy , a strma ravan duž x ose.

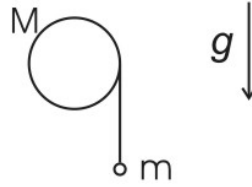
- (i) Vektorskom metodom naći diferencijalne jednačine kretanja strme ravni i materijalne tačke. Ako je u početnom trenutku sistem mirovao, a materijalna tačka se nalazila na vrhu strme ravni, izračunati vreme za koje ce ona spustiti do dna strme ravni.
- (ii) Eksplicitnim računom pokazati da je rad sila reakcije (koje treba smatrati idealnim) na virtuelnom pomeranju jednak nuli.
- (iii) Sastaviti lagranžijan i pomoću njega diferencijalne jednačine kretanja.

Zadatak 5.3.3. Kuglica mase m može da klizi duž glatke šipke, učvršćene svojim krajevima u tačkama A i B na krakima pravog ugla AOB , koji rotira oko svog vertikalnog kraka OA konstantnom ugaonom brzinom ω . Kuglica je za tačke A i B zakačena jednakim oprugama, konstanta elastičnosti k i nominalne dužine l . Poznato je da je $\angle OAB = \alpha$, kao i da je $AB = 2l$.

- (i) Sastaviti lagranžijan i Lagranževu jednačinu.
- (ii) Ako je $\omega^2 = k/(m \sin^2 \alpha)$, a u trenutku $t = 0$ se kuglica nalazila na jednakom rastojanju od tačaka A i B , pri čemu joj je kinetička energija bila jednaka $\frac{1}{2}ml^2\omega^2 \sin^2 \alpha$, naći konačne jednačine kretanja kuglice.

Zadatak 5.3.4. Čestica mase m kreće se po nepokretnoj sferi poluprečnika R u homogenom gravitacionom polju (tzv. sferno klatno). Smatrajući da je sila reakcije idealna i uzimajući za generalisane koordinate sferne uglove θ i φ :

- (i) Sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine.
- (ii) Polazeći od Lagranževih jednačina pokazati da θ zadovoljava diferencijalnu jednačinu oblika $\ddot{\theta} = f(\theta)$. Kog oblika je funkcija $f(\theta)$?



Slika 5.3: Slika uz zadatak 5.3.5.

(iii) Koristeći smenu $\ddot{\theta} = \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2)$ razdvojiti promenljive u diferencijalnoj jednačini dobijenoj pod (ii) i prointegraliti je. Pokazati da je tako dobijeni integral kretanja ekvivalentan zakonu održanja ukupne mehaničke energije čestice.

(iv) Izraziti Dekartove komponente impulsa i momenta impulsa čestice u funkciji generalisanih koordinata i generalisanih brzina. Pomoću teorema impulsa i momenta impulsa ispitati koje se od ovih veličina održavaju, a zatim to pokazati i direktno iz Lagranževih jednačina.

(v) Naći konačne jednačine kretanja čestice, ako se ona u početnom trenutku nalazila u najnižoj tački sfere i imala brzinu intenziteta $v = 2\sqrt{gR}$.

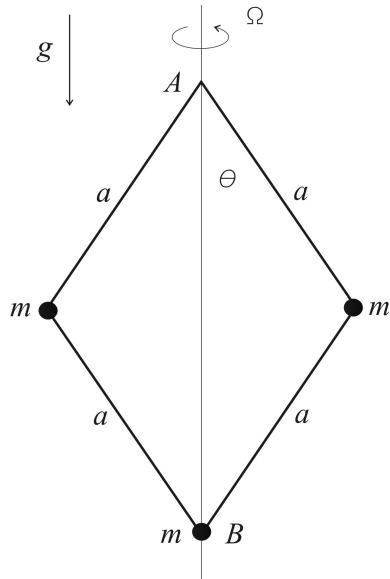
Zadatak 5.3.5. Homogeni disk mase M i poluprečnika a može da rotira oko svoje ose, koja je horizontalno postavljena i ne pomera se. Poznato je da je kinetička energija diska jednaka $Ma^2\dot{\varphi}^2/4$, gde je φ ugao koji opisuje rotaciju diska oko njegove ose. Na disk je namotan konac zanemarljive mase i dužine l , koji na svom slobodnom kraju ima zakačenu materijalnu tačku mase m . Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju, a materijalna tačka se kreće samo duž vertikalne ose (slika 5.3).

(i) Smatrajući da je konac neistegljiv, kao i da nema proklizavanja, i uzimajući ugao φ za generalisanu koordinatu, sastaviti lagranžijan i diferencijalnu jednačinu kretanja ovog sistema. Ako je u početnom trenutku konac bio potpuno namotan, a disk i materijalna tačka mirovali (materijalna tačka se nalazila na kraju horizontalnog prečnika diska), naći ugaonu brzinu $\dot{\varphi}$ diska u trenutku kada se konac potpuno razmoti.

(ii) Sastaviti lagranžijan i diferencijalne jednačine kretanja pretpostavljajući da je konac istegljiv. Smatrati da je potencijalna energija elastičnosti konca jednaka $\frac{1}{2}kx^2$, gde je x izduženje konca, a k konstanta elastičnosti. Pokazati da se kretanje tačke m može opisati kao superpozicija ravnomerno ubrzanog kretanja, sa istim ubrzanjem kao u delu pod (i), i oscilacija sa frekvencom $\omega = \sqrt{k(M+2m)/(mM)}$. Naći amplitudu tih oscilacija, ako je u početnom trenutku sistem mirovao, a konac bio neistegnut.

Zadatak 5.3.6. Na slici je prikazan sistem koji se sastoji od tri materijalne tačke, jednakih masa m , koje su međusobno povezane krutim tankim šipkama istih dužina a i zanemarljivih masa. Ceo sistem rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω oko vertikalne ose u homogenom gravitacionom polju, pri čemu je tačka A fiksirana na osi rotacije, a čestica u tački B može da se kreće duž te ose bez trenja (slika 5.4).

(i) Uzimajući ugao θ za generalisanu koordinatu sastaviti lagranžijan i Lagranževu jednačinu za ovaj sistem.



Slika 5.4: Slika uz zadatak 5.3.6.

- (ii) Pomoću Lagranževe jednačine ispitati da li se ukupna mehanička energija sistema održava.
- (iii) Pokazati da za $\Omega > \sqrt{\frac{2g}{a}}$ postoji ugao θ_0 , takav da za $\theta = \theta_0 + \eta$, gde je η mala veličina, Lagranževa jednačina dobija oblik jednačine linearnog harmonijskog oscilatora. Čemu je jednako θ_0 i kolika je frekvenca odgovarajućih malih oscilacija?
- (iv) Ako je $\Omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$, a u početnom trenutku je $\theta(0) = \alpha \ll 1$ i $\dot{\theta}(0) = 0$, pokazati da je vreme τ potrebno da se tačka B spusti u najniži mogući položaj približno jednako:

$$\tau = 4\sqrt{\frac{a}{2g}} \int_0^\alpha d\theta \frac{\sqrt{1+2\theta^2}}{\sqrt{\alpha^4 - \theta^4}}.$$

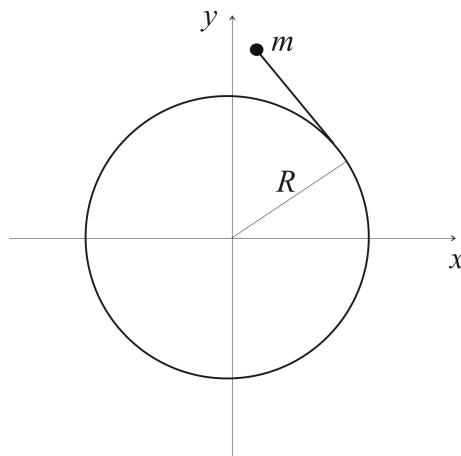
Uputstvo: U ovom slučaju nije dovoljno linearizovati Lagranževu jednačinu, već je potrebno sve funkcije promenljive θ koje se javljaju u jednačini razviti u red do članova drugog stepena.

Zadatak 5.3.7. Materijalna tačka mase m kreće se po površini glatkog nepokretnog kružnog konusa čiji je vrh centar privlačne sile obrnuto proporcionalne kubu rastojanja r od njega:

$$\vec{F} = -\frac{k^2 m}{r^3} \vec{e}_r,$$

gde je k zadata realna konstanta, a $\vec{e}_r = \vec{r}/r$. Ugao između ose konusa i njegove izvodnice je α .

- (i) Uzimajući za generalisane koordinate sferne koordinate r i φ , u sistemu u kome se ugao θ definiše u odnosu na osu konusa, sastaviti lagranžijan i Lagranževe jednačine.
- (ii) Naći $r(t)$ za proizvoljne početne uslove.



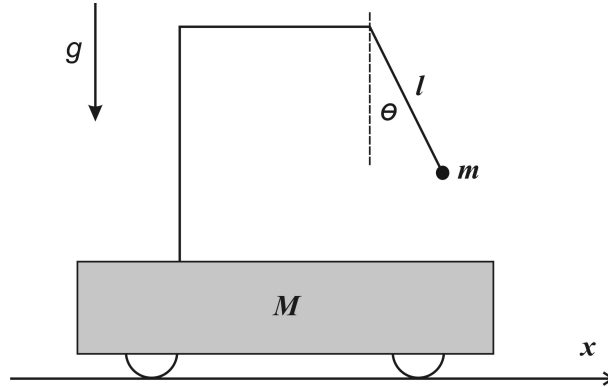
Slika 5.5: Slika uz zadatak 5.3.8.

- (iii) Kakva treba da bude početna brzina čestice da bi se ona u svakom trenutku nalazila na rastojanju r_0 od vrha konusa? Kolika je sila reakcije konusa u tom slučaju?

Zadatak 5.3.8. Čestica mase m , na koju ne deluju spoljašnje sile, laganim neistegljivim koncem zakačena je za nepokretan cilindar radijusa R . U početku je konac bio potpuno namotan na cilindar, tako da ga je čestica dodirivala. U trenutku $t = 0$ čestici je saopštena brzina intenziteta v_0 u radijalnom pravcu, pa konac počinje da se odmotava.

- (i) Sastaviti lagranžijan i Lagranževu jednačinu, birajući generalisanu koordinatu na najpogodniji način.
- (ii) Ako se kretanje čestice odvija u ravni Oxy , gde O leži na osi cilindra, a orijentacija osa je izabrana tako da se u početnom trenutku čestica nalazila na y osi, tj. u tački $(x = 0, y = R)$, naći $x(t)$ i $y(t)$.
- (iii) Ako je ukupna dužina konca jednaka L , nakon kog vremena će se konac potpuno razmotati?
- (iv) Izračunati intenzitet N sile zatezanja konca u proizvoljnom trenutku.
- (v) Izračunati moment impulsa čestice u proizvoljnom trenutku.

Zadatak 5.3.9. Na kolicima mase M , koja mogu da se kreću duž x -ose, nalazi se matematičko klatno dužine l i mase m . Za generalisane koordinate uzeti x i θ - ugao odklona klatna od vertikale (x -osa leži u ravni oscilovanja klatna).



1. Formirati lagranžijan sistema i Lagranževe jednačine.
2. Naći diferencijalnu jednačinu koja opisuje samo $\theta(t)$.
3. Ako je $M = 2m$, $\theta(0) = \pi/3$, $x(0) = 0$, $\dot{\theta}(0) = 0$ i $\dot{x}(0) = 0$, naći brzinu kolica u trenutku kada klatno zauzme vertikalni položaj.
4. Za slučaj $M = 2m$ naći opšte rešenje diferencijalnih jednačina kretanja, tj. $x(t)$ i $\theta(t)$, smatrajući da ugao θ u toku kretanja ima male vrednosti.

Glava 6

Specijalni problemi

6.1 Jednodimenzionalni sistemi

6.1.1 Linarni harmonijski oscilator

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od jedne čestice mase m , koja se kreće duž x -ose, tako što je vezana za elastičnu oprugu, koeficijenta elastičnosti k . Ako za koordinatni početak uzmemo ravnotežni položaj, onda je sila kojom opruga deluje na česticu $\vec{F} = -kx\vec{e}_x$. Jednačine veze su $y = 0$ i $z = 0$, a za generalisanu koordinatu je najzgodnije uzeti x -koordinatu. Rad koji izvrši elastična sila na elementarnom pomeranju $d\vec{r} = dx\vec{e}_x$ jednak je: $\vec{F} \cdot d\vec{r} = -kx dx = -d(\frac{1}{2}kx^2)$, što znači da se radi o potencijalnoj sili kojoj odgovara potencijalna energija $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Kinetička energija jednaka je $T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$, pa je lagranžijan: $L = T - U = \frac{1}{2}(m\dot{x}^2 - kx^2)$. Ako uvedemo konstantu ω , tako da je koeficijent elastičnosti jednak $k = m\omega^2$, lagranžijan postaje

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 - \omega^2 x^2), \quad (6.1)$$

a Lagranževa jednačina se lako dovodi na oblik

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (6.2)$$

Opšte rešenje ove jednačine (*jednačina linearnog harmonijskog oscilatora*) je

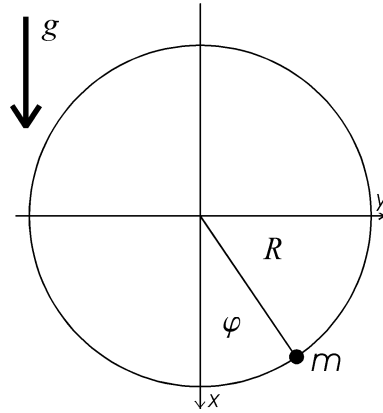
$$x(t) = A \cos(\omega t + \alpha),$$

gde su A i α konstante koje se određuju iz početnih uslova:

$$x_0 = x(0) = A \cos \alpha, \quad \dot{x}_0 = \dot{x}(0) = -A\omega \sin \alpha.$$

Iz poslednje dve jednačine lako se nalazi

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{\omega}\right)^2}, \quad \alpha = -\arctg \frac{\dot{x}_0}{\omega x_0}.$$



Slika 6.1: Matematičko klatno.

6.1.2 Matematičko klatno

Matematičko klatno je sistem koji se sastoji od jedne čestice, mase m , koja se u homogenom gravitacionom polju kreće po kružnici poluprečnika R , koja leži u vertikalnoj ravni. Ako koordinatni sistem izaberemo tako da mu je početak u centru kružnice, da kružnica leži u ravni $z = 0$, a da je gravitaciono ubrzanje $\vec{g} = g\vec{e}_x$ (slika 6.1), jednačine veza možemo da napišemo u obliku:

$$z = 0, \quad x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Pošto postoje dve veze, sistem ima jedan stepen slobode, a za generalisanu koordinatu je zgodno izabrati ugao φ , koji vektor položaja čestice zaklapa sa x -osom. Kako je $x = R \cos \varphi$, a $y = R \sin \varphi$, kinetička energija klatna je

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2,$$

a potencijalna energija $U = -mgx = -mgR \cos \varphi$, pa je lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + mgR \cos \varphi. \quad (6.3)$$

Ako su sile reakcije idealne, onda je zadovoljena Lagranževa jednačina, koja se u ovom slučaju svodi na oblik

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \sin \varphi = 0. \quad (6.4)$$

Ako pri kretanju ugao φ stalno ostaje vrlo mali, onda je $\sin \varphi \approx \varphi$, pa se jednačina (6.4) svodi na jednačinu tipa jednačine linearnog harmonijskog oscilatora:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \varphi = 0,$$

čije je opšte rešenje

$$\varphi = A \cos \left(\sqrt{\frac{g}{R}} t + \alpha \right),$$

što znači da u tom slučaju klatno vrši male harmonijske oscilacije. U opštem slučaju jednačina (6.4) se može pojednostaviti ako se $\ddot{\varphi}$ napiše kao

$$\ddot{\varphi} = \frac{d\dot{\varphi}}{dt} = \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right),$$

tako da se iz (6.4) dobija

$$d \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 \right) + \frac{g}{R} \sin \varphi d\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 - \frac{g}{R} \cos \varphi = \text{const}.$$

Ako se poslednja dobijena jednačina pomnoži sa mR^2 , onda izraz sa leve strane tako dobijene jednačine predstavlja ukupnu mehaničku energiju matematičkog klatna, koja se, dakle, održava, tj.

$$E = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\varphi}^2 - mgR \cos \varphi = \text{const}. \quad (6.5)$$

Ovaj zaključak sledi i iz teoreme kinetičke energije. Naime, pošto su veze stacionarne, rad sila reakcije (koje su ovde idealne) na mogućem pomeranju je jednak nuli, pa sledi da je $dT = -dU$, tj. $d(T + U) = dE = 0$. Poslednje rezonovanje nije ničim specijalno vezano za slučaj matematičkog klatna, pa sasvim generalno važi da se **ukupna mehanička energija sistema sa stacionarnim vezama, u kojima su sile reakcije idealne, a aktivne sile konzervativne, održava.**

Zakon održanja energije omogućava da se kretanje matematičkog klatna kvalitativno analizira. Naime, pošto je kinetička energija po definiciji nenegativna veličina, kretanje je moguće samo ako je zadovoljen uslov $E \geq U$, tj. ako je $E \geq -mgR \cos \varphi$. Iz tog uslova direktno sledi da su, u zavisnosti od vrednosti ukupne mehaničke energije E (odnosno od početnih uslova), moguće tri kvalitativno različite vrste kretanja:

- Ako je $-mgR < E < mgR$, sigurno postoji ugao $0 < \alpha < \pi$ takav da je $E = -mgR \cos \alpha$, pa se iz zakona održanja energije (6.5) vidi da se ugao φ u ovom slučaju može da se menja od $-\alpha$ do α , a za $\varphi = \pm \alpha$ kinetička energija je jednaka nuli. Klatno, dakle, u ovom slučaju osciluje između $-\alpha$ i α , pa se ovakva vrsta kretanja naziva **oscilatorno kretanje**. Može se pokazati da period ovakvih oscilacija za konačne amplitude α , za razliku od malih oscilacija, zavisi od amplitude [1, 2].
- Za energije veće od potencijalne energije klatna u najvišoj tački, $E > mgR$, klatno vrši tzv. **progresivno kretanje**. U najvišoj tački kružnice, klatno još uvek ima brzinu veću od nule, tako da može da prođe kroz tu tačku i nastavi da se kreće. I ovo kretanje je periodično i može se pokazati da period zavisi od energije (što je energija veća period je manji, [2]).
- Ako je $E = mgR$ zakon održanja energije dozvoljava da matematičko klatno dostigne najviši položaj na kružnici, ali ne i da prođe kroz njega. Ispostavlja se (što će biti pokazano u daljem tekstu) da se klatno asimptotski, kada $t \rightarrow \infty$, asimptotski približava tom položaju, pa se zbog toga ovakva vrsta kretanja matematičkog klatna naziva **asimptotsko kretanje**.

Jednačina (6.5) predstavlja diferencijalnu jednačinu prvog reda, koja dozvoljava razdvajanje promenljivih, tj. iz nje se lako dobija

$$\frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi + \frac{E}{mgR})}} = \pm \sqrt{\frac{g}{R}} dt.$$

Ako se za početni trenutak izabere trenutak u kome se klatno nalazi u najnižem položaju $\varphi(t=0) = 0$ i uzme da je $\dot{\varphi}(0) > 0$ (čime se, zbog simetrije problema, ne smanjuje opštost), dalje sledi

$$\sqrt{\frac{g}{R}}t = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi + \frac{E}{mgR})}},$$

što implicitno predstavlja konačnu jednačinu kretanja $\varphi(t)$, izraženu u kvadraturama. Integral sa desne strane poslednje jednačine se može izraziti preko elementarnih funkcija samo u slučaju kada je $E = mgR$. Naime, tada je

$$\sqrt{\frac{g}{R}}t = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d\varphi}{\sqrt{2(\cos \varphi + 1)}} = \int_0^{\varphi(t)} \frac{d(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)},$$

a poslednji integral se pomoću trigonometrijske smene

$$\alpha = \operatorname{tg}(\varphi/4)$$

lako svodi na tablični, tako da se pravolinijski dobija konačna jednačina kretanja u obliku

$$\varphi(t) = 4 \operatorname{arctg} \frac{e^{\sqrt{\frac{g}{R}}t} - 1}{e^{\sqrt{\frac{g}{R}}t} + 1}. \quad (6.6)$$

Iz dobijene konačne jednačine kretanja se zaista vidi da za $t \rightarrow \infty$ ugao $\varphi \rightarrow \pi$, tj. materijalna tačka se *asimptotski* približava najvišem položaju na kružnici po kojoj se kreće.

6.1.3 Jednodimenzionalni konzervativni sistemi sa stacionarnim vezama

Ako su veze stacionarne i $n = 1$ jedina generalisana koordinata q sigurno može da se izabere tako da kinetička energija T ima oblik

$$T = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2,$$

a lagranžijan

$$L = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 - U(q).$$

Lagranževa jednačina onda ima oblik

$$a(q)\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{da(q)}{dq} \dot{q}^2 + \frac{dU}{dq} = 0 \quad (6.7)$$

i može, slično kao u slučaju matematičkog klatna, da se transformiše tako da se iz nje dobije prvi integral kretanja koji je ekvivalentan zakonu održanja energije

$$E = \frac{1}{2}a(q)\dot{q}^2 + U(q) = \operatorname{const},$$

pomoću koga se dalje mogu razdvojiti promenljive, odakle onda sledi i konačna jednačina kretanja u kvadraturama.

Neka za $q = q_0$ sistem miruje u položaju $q = q_0$. Iz jednačine kretanja (6.7) sledi da je to moguće jedino ako je u tom položaju zadovoljen uslov $\frac{dU}{dq} = 0$. Pretpostavimo da smo izveli sistem iz ovog ravnotežnog položaja, tako da je $q = q_0 + \eta$, gde je η mala veličina. Ako u Lagranževoj jednačini razvijemo sve veličine u red oko q_0 i zadržimo samo linearne članove (tj. izvršimo tzv. *linearizaciju* jednačine, pošto je η malo), dobijamo sledeću jednačinu

$$\ddot{\eta} + \frac{U''(q_0)}{a(q_0)}\eta = 0. \quad (6.8)$$

Kako je $a(q) > 0$ (pošto je $T \geq 0$), za $U''(q_0) > 0$ prethodna jednačina ima oblik jednačine linearnog harmonijskog oscilatora, tj. sistem harmonijski osciluje oko takvog položaja ravnoteže. Drugim rečima, *ako u položaju mirovanja potencijalna energija ima minimum, sistem se u tom položaju nalazi u stabilnoj ravnoteži.*

Ako je $U''(q_0) < 0$, opšte rešenje poslednje jednačine je

$$\eta(t) = Ae^{\lambda t} + Be^{-\lambda t}, \quad \lambda^2 = -\frac{U''(q_0)}{a(q_0)},$$

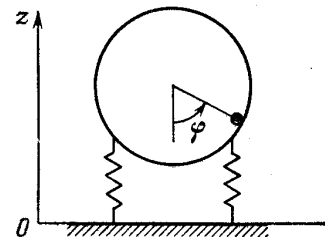
odakle se vidi da se za $t \rightarrow \infty$ sistem beskonačno udaljava od ravnotežnog položaja, tj. položaj maksimuma potencijalne energije odgovara nestabilnoj ravnoteži. Naravno, to istovremeno znači i da postupak linearizacije u ovom slučaju nije opravdan, jer η nije malo u svakom vremenskom trenutku. Jasno je, takođe, da postupak linearizacije ne daje nikakav smisleni rezultat ni u slučaju kada je $U''(q_0) = 0$.

ZADACI

Zadatak 6.1.1. Izvesti formulu (6.6).

Zadatak 6.1.2. Potencijalna energija U čestice mase m , koja se kreće duž x ose, ima oblik $U(x) = cx/(x^2 + a^2)$, gde su c i a pozitivne konstante. Skicirati grafik funkcije $U(x)$. Naći položaj stabilne ravnoteže, kao i period malih oscilacija oko njega. Ako je poznato da čestica kreće iz tog položaja ravnoteže, sa početnom brzinom v , naći vrednosti v za koje će čestica (a) oscilovati, (b) otići u $-\infty$, (c) otići u $+\infty$.

Zadatak 6.1.3. Gladak prsten u obliku kružnice poluprečnika r i zanemarljive mase, koji je postavljen na horizontalnu podlogu preko dve jednake opruge (istih koeficijenata elastičnosti k), kao na slici, može translatorno da se kreće u vertikalnoj ravni. Po unutrašnjoj strani prstena može da se kreće materijalna tačka mase m . Rešiti problem malih oscilacija ovog sistema oko stabilnog položaja ravnoteže.



6.2 Male oscilacije konzervativnih sistema sa stacionarnim vezama

U ovom delu bavićemo se malim oscilacijama idealnih konzervativnih sistema sa holonomnim stacionarnim vezama. Pre nego što razmotrimo opšti slučaj uradićemo jedan konkretan primer sa dva stepena slobode.

Primer 6.2.1. Razmotrimo sistem koji se sastoji od dve materijalne tačke jednakih masa m , koje se u homogenom gravitacionom polju kreću duž iste vertikale. Čestice su međusobno povezane oprugom koeficijenta elastičnosti k , nominalne dužine l . Takođe, svaka od čestica povezana je oprugom sa horizontalnim zidom, kao što je pokazano na slici 6.2. Rastojanje između horizontalnih zidova je konstantno i iznosi a , a opruge kojima su čestice povezane sa zidovima su iste kao i opruga koja povezuje čestice. Jasno je da se radi o sistemu sa dva stepena slobode, a za generalisane koordinate ćemo izabrati visine x_1 i x_2 čestica 1 i 2, redom, u odnosu na donji zid. Kinetička energija sistema je onda jednaka:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2),$$

a potencijalna:

$$U = mgx_1 + mgx_2 + \frac{1}{2}k(x_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(a - l - x_2)^2.$$

Zamenom lagranžijana $L = T - U$ u Lagranževe jednačine dobija se sledeći sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + \frac{2k}{m}x_1 - \frac{k}{m}x_2 &= -g \\ -\frac{k}{m}x_1 + \ddot{x}_2 + \frac{2k}{m}x_2 &= -g + \frac{ka}{m} \end{aligned}$$

iz kojeg se vidi da sistem može da miruje u položaju $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$, koji zadovoljava algebarske jednačine:

$$\begin{aligned} \frac{2k}{m}x_1^0 - \frac{k}{m}x_2^0 &= -g \\ -\frac{k}{m}x_1^0 + \frac{2k}{m}x_2^0 &= -g + \frac{ka}{m} \end{aligned}$$

Rešavanjem ovog sistema algebarskih jednačina dobija se da je:

$$x_1^0 = \frac{1}{3}a - \frac{mg}{k}, \quad x_2^0 = \frac{2}{3}a - \frac{mg}{k}.$$

S druge strane, pošto je

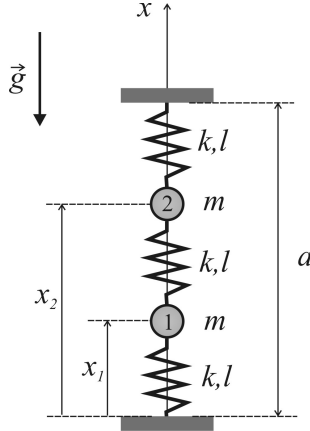
$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x_1} &= mg + k(x_1 - l) - k(x_2 - x_1 - l), \\ \frac{\partial U}{\partial x_2} &= mg + k(x_2 - x_1 - l) - k(a - l - x_2), \end{aligned}$$

i

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} = 2k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} = -k, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} = 2k$$

vidi se da su zadovoljeni uslovi

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x_1} \right|_0 = 0, \quad \left. \frac{\partial U}{\partial x_2} \right|_0 = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} > 0, \quad \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} \end{array} \right| = 3k^2 > 0,$$



Slika 6.2: Male oscilacije sistema sa dva stepena slobode.

što znači da u položaju $x_1 = x_1^0$, $x_2 = x_2^0$ potencijalna energija U ima lokalni minimum.

Dalje nas zanima šta se dešava ako sistem izvedemo iz ovog ravnotežnog položaja. Uvedimo nove koordinate η_1 i η_2 koje mere udaljenost sistema od položaja (x_1^0, x_2^0) :

$$x_1 = x_1^0 + \eta_1, \quad x_2 = x_2^0 + \eta_2.$$

Nakon ove smene diferencijalne jednačine kretanja sistema dobijaju oblik:

$$\begin{aligned} \ddot{\eta}_1 + \frac{2k}{m}\eta_1 - \frac{k}{m}\eta_2 &= 0 \\ -\frac{k}{m}\eta_1 + \ddot{\eta}_2 + \frac{2k}{m}\eta_2 &= 0 \end{aligned} \quad (6.9)$$

Rešenje tražimo u obliku:

$$\eta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \alpha), \quad \eta_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \alpha).$$

Zamenom u (6.9) dobijamo da amplitude A_1 i A_2 treba da zadovoljavaju sistem algebarskih jednačina:

$$\begin{pmatrix} -\omega^2 + \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\omega^2 + \frac{2k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.10)$$

Pošto se radi o homogenom sistemu linearnih jednačina, a tražimo netrivialno rešenje sledi da determinanta ovog sistema treba da bude jednaka nuli, tj:

$$\begin{vmatrix} -\omega^2 + \frac{2k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\omega^2 + \frac{2k}{m} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left(-\omega^2 + \frac{k}{m}\right) \left(-\omega^2 + \frac{3k}{m}\right) = 0, \quad (6.11)$$

odakle sledi da su moguće vrednosti za ω^2 :

$$\omega_1^2 = \frac{k}{m}, \quad \omega_2^2 = \frac{3k}{m}.$$

Zamenjujući redom nađene vrednosti za ω^2 u sistem (6.10) nalazimo odnos između amplituda za svaku pojedinačnu frekvencu ω , a onda i odgovarajući oblik partikularnog rešenja sistema diferencijalnih jednačina (6.9):

- $\omega = \omega_1$: $A_1^{(1)} = A_2^{(1)}$

$$\eta_1^{(1)} = A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha^{(1)}), \quad \eta_2^{(1)} = A_1^{(1)} \cos(\omega_1 t + \alpha^{(1)})$$

- $\omega = \omega_2$: $A_1^{(2)} = -A_2^{(2)}$

$$\eta_1^{(2)} = A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha^{(2)}), \quad \eta_2^{(2)} = -A_1^{(2)} \cos(\omega_2 t + \alpha^{(2)})$$

Konačno, opšte rešenje sistema (6.9) dobijamo kao linearnu kombinaciju nađenih partikularnih rešenja, koja može da se napiše u matricnom obliku kao:

$$\begin{pmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{pmatrix} = K_1 \cos(\omega_1 t + \alpha^{(1)}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + K_2 \cos(\omega_2 t + \alpha^{(2)}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Položaji čestica 1 i 2 su onda u proizvoljnom trenutku t određeni konačnim jednačinama kretanja:

$$x_1(t) = x_1^0 + \eta_1(t), \quad x_2(t) = x_2^0 + \eta_2(t).$$

Konstante K_1 , K_2 , $\alpha^{(1)}$ i $\alpha^{(2)}$ određuju se iz početnih uslova. Vidimo da kretanje sistema nakon njegovog izvođenja iz položaja mirovanja u kome potencijalna energija ima minimum može da se predstavi kao linearna kombinacija harmonijskih oscilacija, kojima odgovaraju frekvence $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ i $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$, što znači da se u tom položaju sistem nalazi u stabilnoj ravnoteži. Ispostavlja se da slično važi za proizvoljan n -dimenzionalan idealan konzervativan sistem sa stacionarnim vezama, što će biti pokazano u sledećem odeljku.

6.2.1 Ležen-Dirihleova teorema

Posmatrajmo idealan holonoman sistem sa n stepeni slobode, na koji deluju samo konzervativne aktivne sile, a veze su stacionarne. Zbog stacionarnosti veza generalisane koordinate q_i sigurno mogu da se izaberu tako da kinetička energija bude homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, a zbog konzervativnosti sila potencijalna energija U ne zavisi eksplicitno od vremena, tako da lagranžijan sistema ima oblik

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q) \dot{q}_i \dot{q}_j - U(q). \quad (6.12)$$

Lagranževe jednačine za ovakav sistem imaju oblik

$$\sum_{j=1}^n A_{lj} \ddot{q}_j + \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{li}}{\partial q_j} \dot{q}_i \dot{q}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial A_{ij}}{\partial q_l} \dot{q}_i \dot{q}_j + \frac{\partial U}{\partial q_l} = 0, \quad l = 1, \dots, n \quad (6.13)$$

Ako sistem može da miruje u nekom položaju (q_1^0, \dots, q_n^0) , tj. ako $q_i = q_i^0$, $i = 1, \dots, n$ jeste rešenje sistema Lagranževih jednačina, onda je i $\dot{q}_i = 0$, odnosno $\ddot{q}_i = 0$, za svako i , pa iz jednačina sledi da moraju biti zadovoljeni i uslovi

$$\left. \frac{\partial U}{\partial q_l} \right|_{q^0} = 0. \quad (6.14)$$

Pretpostavimo da u tom položaju potencijalna energija U ima minimum. Pretpostavimo dalje da smo ovom sistemu, koji se prvobitno nalazio u ravnoteži u položaju $(q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ dodali malo energije, tako da je on počeo da se kreće. Uvedimo nove generalisane koordinate η_i koje opisuju za koliko se sistem pomerio iz položaja ravnoteže:

$$\eta_i = q_i - q_i^0. \quad (6.15)$$

Ako su vrednosti η_i male po apsolutnoj vrednosti, može da se izvrši linearizacija Lagranževih jednačina (6.13), nakon čega se dobija sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij}\ddot{\eta}_j + b_{ij}\eta_j) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.16)$$

gde su koeficijenti a_{ij} i b_{ij} definisani kao:

$$a_{ij} = A_{ij}(q^0), \quad b_{ij} = \left. \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{q^0}. \quad (6.17)$$

Iz definicije koeficijenata A_{ij} sledi da je $A_{ij} = A_{ji}$, pa onda važi i $a_{ij} = a_{ji}$, a takođe je jasno i da je $b_{ij} = b_{ji}$.

Ako pretpostavimo da rešenje sistema diferencijalnih jednačina (6.16) ima oblik

$$\eta_j(t) = A_j \cos(\omega t + \alpha), \quad (6.18)$$

onda, zbog

$$\ddot{\eta}_j(t) = -\omega^2 A_j \cos(\omega t + \alpha), \quad (6.19)$$

posle skraćivanja svih jednačina sa $\cos(\omega t + \alpha)$, dobijamo sistem od n homogenih linearnih algebarskih jednačina

$$\sum_{j=1}^n (-\omega^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (6.20)$$

Ovakav sistem ima netrivialno rešenje (po amplitudama A_j) samo ako mu je determinanta jednaka nuli, tj. ako je zadovoljena jednačina

$$|(-\omega^2 a_{ij} + b_{ij})| = 0. \quad (6.21)$$

Leva strana ove jednačine ima oblik polinoma stepena n po kvadratu frekvence ω , tako da (prema osnovnom stavu algebre) ona sigurno ima n rešenja za ω^2 : $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Neka od ovih rešenja mogu da se poklapaju (tzv. višestruki koren ili degenerisano rešenje), a unapred se jedino zna da su ω_i^2 kompleksni brojevi.

Neka je ω_k^2 bilo koje od n rešenja jednačine (6.21), a $A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)}$ netrivialno rešenje sistema (6.20), koje se dobija kada se u njega zameni $\omega^2 = \omega_k^2$. Pomnožimo i -tu jednačinu sistema (6.20) kompleksno konjugovanom i -tom amplitudom $A_i^{(k)*}$ i prosumirajmo po i od 1 do n . Na taj način dobijamo jednačinu

$$\sum_{i,j=1}^n (-\omega_k^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j^{(k)} A_i^{(k)*} = 0, \quad (6.22)$$

odakle je

$$\omega_k^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)*} A_j^{(k)}}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)*} A_j^{(k)}}, \quad (6.23)$$

što je sigurno pozitivno, pošto su obe dvostruke sume u poslednjem količniku pozitivne. Naime, neka je $A_j^{(k)} = R_j + iI_j$, gde je i imaginarna jedinica, a R_j i I_j redom realni i imaginarni deo amplitude $A_j^{(k)}$. Onda je

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)*} A_j^{(k)} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} (R_i - iI_i)(R_j + iI_j) = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} [R_i R_j + I_i I_j + i(I_j R_i - I_i R_j)].$$

Zbog simetričnosti koeficijenata b_{ij} imaginarni deo ove sume jednak je nuli, pošto je

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} I_j R_i = \sum_{i,j=1}^n b_{ji} I_j R_i = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} I_i R_j,$$

gde smo prvo iskoristili $b_{ij} = b_{ji}$, a zatim promenili redosled sumiranja, tj. zamenili mesta nemim indeksima i i j u dvostrukoj sumi. Dalje, imajući u vidu da je (q_1^0, \dots, q_n^0) ravnotežna konfiguracija sistema u kojoj potencijalna energija U ima minimum, kao i da Tejlorov razvoj te funkcije u okolini ove konfiguracije ima oblik

$$U(q_1, \dots, q_n) = U(q_1^0 + \eta_1, \dots, q_n^0 + \eta_n) = U(q_1^0, \dots, q_n^0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \eta_i \eta_j + \dots$$

zaključujemo da za proizvoljne dovoljno male realne vrednosti η_i dvostruka suma u ovom razvoju mora uvek da bude pozitivna, tj:

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} \eta_i \eta_j > 0,$$

Odatle direktno sledi da je i

$$\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)*} A_j^{(k)} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} (R_i R_j + I_i I_j) > 0.$$

Na sličan način se dolazi do zaključka i da je

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)*} A_j^{(k)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} (R_i R_j + I_i I_j) > 0,$$

pri čemu se koristi činjenica da je kinetička energija

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j > 0$$

pozitivna za proizvoljne vrednosti $\dot{\eta}_i$, kao i simetričnost koeficijenata a_{ij} . Na taj način smo pokazali da su obe sume, u brojiocu i imeniocu količnika u izrazu (6.23) za ω_k^2 pozitivne, pa je i ω_k^2 pozitivan broj. Iz sistema (6.20), u kome su koeficijenti realni brojevi, onda sledi da sigurno postoje i realna netrivialna rešenja za amplitude $A_i^{(k)}$. Pošto je ω_k^2 pozitivan broj, samo ω_k je realan broj, pa odgovarajuće partikularno rešenje sistema diferencijalnih jednačina (6.16) ima oblik

$$\eta_i^{(k)}(t) = A_i^{(k)} \cos(\omega_k t + \alpha_k), \quad i = 1, \dots, n, \quad (6.24)$$

gde za ω_k možemo da uzmemo pozitivni koren broja ω_k^2 . Opšte rešenje sistema Lagranževih jednačina (6.16) je linearna kombinacija partikularnih rešenja:

$$\eta_i(t) = \sum_{k=1}^n C_k A_i^{(k)} \cos(\omega_k t + \alpha_k), \quad i = 1, \dots, n \quad (6.25)$$

ili u matričnom zapisu:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n C_k \begin{pmatrix} \eta_1^{(k)} \\ \vdots \\ \eta_n^{(k)} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n C_k \cos(\omega_k t + \alpha_k) \begin{pmatrix} A_1^{(k)} \\ \vdots \\ A_n^{(k)} \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Znači, odstupanja generalisanih koordinata od njihovih ravnotežnih vrednosti u okolini minimuma potencijalne energije sistema su linearne kombinacije periodičnih funkcija oblika $\cos(\omega_k t + \alpha_k)$. Drugim rečima, sistem vrši **male oscilacije** oko položaja sa minimalnom potencijalnom energijom, što znači da važi **Ležen–Dirihleova teorema**: *konfiguracija kojoj odgovara minimum potencijalne energije predstavlja položaj stabilne ravnoteže konzervativnog sistema sa stacionarnim vezama*. Brojevi C_k u opštem rešenju, zajedno sa fazama α_k , predstavljaju $2n$ neodređenih konstanata, koje se nalaze iz početnih uslova $\eta_i(0), \dot{\eta}_i(0)$, odnosno početnih uslova za generalisane koordinate q_i i generalisane brzine \dot{q}_i . Amplitude $A_i^{(k)}, i = 1, \dots, n$ u slučaju kada je ω_k^2 jednostruki koren jednačine (6.21) predstavljaju bilo koje netrivialno rešenje sistema (6.20). Dvodimenzionalni primer sa početka ovog dela odgovara tom slučaju - koreni jednačine (6.11) su različiti, tj. nema degeneracije. U slučaju kada je ω_k^2 višestruki koren degeneracije $m > 1$, ispostavlja se da postoji m linearno nezavisnih netrivialnih rešenja $(A_1^{(k,l)}, \dots, A_n^{(k,l)}), l = 1, \dots, m$ sistema (6.20). Za formiranje opšteg rešenja problema malih oscilacija dovoljno je naći jedan konkretan skup takvih rešenja i zameniti ga u (6.26).

6.2.2 Normalne frekvence i koordinate

Pozitivni brojevi $\omega_k, k = 1, \dots, n$, dobijeni rešavanjem jednačine (6.21) nazivaju se **normalne frekvence**. Uvedimo sada umesto koordinata η_i tzv. **normalne koordinate** ξ_i , koje se definišu kao

$$\xi_i = C_i \cos(\omega_i t + \alpha_i). \quad (6.27)$$

Iz (6.26) se vidi da je

$$\eta_i = \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} \xi_k, \quad \dot{\eta}_i = \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} \dot{\xi}_k, \quad (6.28)$$

pa zamenom ovih izraza u aproksimativni izraz za Lagranževu funkciju

$$L(\eta, \dot{\eta}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \eta_i \eta_j ,$$

sledi da je u normalnim koordinatama

$$\begin{aligned} L(\xi, \dot{\xi}) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} \dot{\xi}_k \sum_{l=1}^n A_j^{(l)} \dot{\xi}_l - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \sum_{k=1}^n A_i^{(k)} \xi_k \sum_{l=1}^n A_j^{(l)} \xi_l \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left[\dot{\xi}_l \dot{\xi}_k \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} \right) - \xi_l \xi_k \left(\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^n \left(\alpha_{kl} \dot{\xi}_l \dot{\xi}_k - \beta_{kl} \xi_l \xi_k \right) , \end{aligned} \quad (6.29)$$

gde su uvedene oznake

$$\alpha_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} , \quad \beta_{kl} = \sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} . \quad (6.30)$$

Amplitude $A_j^{(l)}$ su rešenja sistema (6.20) kada je $\omega = \omega_l$, tj. zadovoljavaju jednačine:

$$\sum_{j=1}^n (-\omega_l^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j^{(l)} = 0 , \quad i = 1, \dots, n . \quad (6.31)$$

Pomnožimo svaku od ovih jednačina odgovarajućom amplitudom $A_i^{(k)}$ i prosumirajmo po i od 1 do n . Na taj način dobijamo jednačinu

$$\sum_{i,j=1}^n (-\omega_l^2 a_{ij} + b_{ij}) A_j^{(l)} A_i^{(k)} = 0 , \quad (6.32)$$

odakle je

$$\omega_l^2 = \frac{\sum_{i,j=1}^n b_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)}}{\sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)}} = \frac{\beta_{kl}}{\alpha_{kl}} , \quad (6.33)$$

odnosno

$$\beta_{kl} = \omega_l^2 \alpha_{kl} . \quad (6.34)$$

Analogno bismo mogli da dobijemo i relaciju

$$\beta_{lk} = \omega_k^2 \alpha_{lk} . \quad (6.35)$$

Međutim, pošto je $a_{ij} = a_{ji}$, koeficijenti α_{kl} imaju osobinu

$$\alpha_{kl} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(k)} A_j^{(l)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} A_i^{(k)} A_j^{(l)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_j^{(k)} A_i^{(l)} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} A_i^{(l)} A_j^{(k)} = \alpha_{lk}$$

i, zbog $b_{ij} = b_{ji}$, potpuno analogno sledi

$$\beta_{kl} = \beta_{lk}. \quad (6.36)$$

Oduzimanjem jednačina (6.34) i (6.35) dobijamo:

$$(\omega_l^2 - \omega_k^2)\alpha_{lk} = 0, \quad (6.37)$$

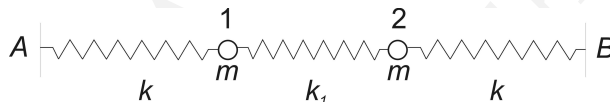
odakle za $\omega_l \neq \omega_k$ sledi $\alpha_{kl} = 0$, pa je onda, zbog (6.34), i $\beta_{kl} = 0$. Znači, ako su svi koreni jednačine (6.21) jednostruki, dvostruka suma u izrazu (6.29) za lagranžijan svodi se na jednu sumu oblika

$$L = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\alpha_{kk} \dot{\xi}_k^2 - \beta_{kk} \xi_k^2 \right) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \alpha_{kk} \left(\dot{\xi}_k^2 - \omega_k^2 \xi_k^2 \right), \quad (6.38)$$

tj. *lagranžijan se korišćenjem normalnih koordinata svodi na zbir od n međusobno nezavisnih sabiraka, od kojih svaki ima oblik lagranžijana linearnog harmonijskog oscilatora (6.1) čija je frekvencija jednaka odgovarajućoj normalnoj frekvenci.* Sličan zaključak se može izvesti i u slučaju kada jednačina (6.21) ima višestruke korene.

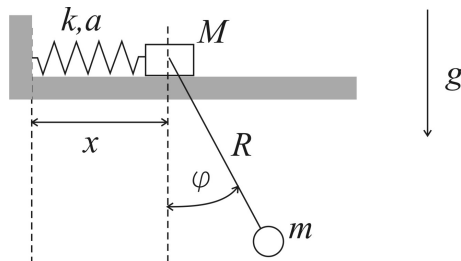
ZADACI

Zadatak 6.2.1. Pod delovanjem sila elastičnosti opruga čestice prikazane na slici mogu da se kreću samo duž horizontalnog pravca AB .



- (a) Izračunati normalne frekvence malih oscilacija ovog sistema.
- (b) Rešiti problem malih oscilacija ovog sistema, ako u početnom trenutku čestica 1 ima brzinu v_0 , čestica 2 miruje, a obe čestice se nalaze u svojim ravnotežnim položajima.
- (c) Rešiti problem malih oscilacija ovog sistema, ako se u početnom trenutku čestica 1 nalazi na rastojanju a od svog ravnotežnog položaja, čestica 2 je u svom ravnotežnom položaju, a obe čestice miruju.

Zadatak 6.2.2. Materijalna tačka mase M kreće se po horizontalnoj pravoj, pri čemu je oprugom, koeficijenta elastičnosti k i nominalne dužine a , vezana za vertikalni zid. Na ovu tačku zakačeno je matematičko klatno, mase m i dužine R .



- (a) Uzimajući za generalisane koordinate rastojanje x tela M od vertikalnog zida i ugao φ otklona matematičkog klatna od vertikale, sastaviti lagranžijan i napisati Lagranževe jednačine.
- (b) Sastaviti diferencijalne jednačine kretanja ako pored gravitacione i elastične sile na tela deluje i sila otpora sredine, oblika $-\gamma\vec{v}$, gde je γ zadata konstanta (ista za obe materijalne tačke).
- (c) U slučaju kada je $M = m$ i $\gamma = 0$, naći normalne frekvence malih oscilacija oko stabilnog položaja ravnoteže.
- (d) U slučaju kada je $M = m$, $\gamma = 0$ i $k/m = g/R$ naći konačne jednačine kretanja za proizvoljne početne uslove pri kojima dolazi do malih oscilacija (tj. naći opšte rešenje problema malih oscilacija).

Zadatak 6.2.3. Eksplicitnim računom pokazati da lagranžijan sistema definisanog u Primeru 6.2.1, u normalnim koordinatama ima oblik (6.38).

Zadatak 6.2.4. Pokazati da u slučaju kada je ω_k^2 višestruki koren degeneracije $m > 1$ postoji m linearno nezavisnih netrivialnih rešenja $(A_1^{(k,l)}, \dots, A_n^{(k,l)})$, $l = 1, \dots, m$ sistema (6.20).

6.3 Centralno kretanje

Kažemo da čestica vrši **centralno kretanje** ako je u svakom trenutku njen vektor položaja \vec{r} kolinearan sa silom \vec{F} koja deluje na nju. Sila \vec{F} se u tom slučaju naziva **centralnom silom** i u najopštijem slučaju ima oblik

$$\vec{F} = F(\vec{r}, \vec{v}, t) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (6.39)$$

Znači, pravac sile koja deluje na česticu pri ovakvom kretanju uvek prolazi kroz tačku u odnosu na koju određujemo položaj čestice (koordinatni početak). U kontekstu problema centralnog kretanja tu tačku ćemo zvati **centrom sile**.

6.3.1 Zakoni održanja i jednačine kretanja

Pošto je centralna sila kolinearna sa vektorom položaja čestice, moment te sile u odnosu na centar je jednak nuli, a to, po teoremi momenta impulsa (2.10), znači da se moment impulsa \vec{M} čestice pri centralnom kretanju ne menja. Odatle sledi da se čestica kreće u jednoj te istoj ravni, normalnoj na vektor \vec{M} , određenoj početnim vektorom položaja i početnom brzinom čestice. To dalje znači da se efektivno čestica kreće kao da ima dva stepena slobode, pa je najzgodnije za generalisane koordinate izabrati polarne koordinate r i φ u ravni u kojoj se čestica kreće. Ako vektore položaja i brzine izrazimo u polarnim koordinatama, za moment impulsa dobijamo izraz

$$\vec{M} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = mr\vec{e}_r \times (\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi) = mr^2\dot{\varphi}\vec{e}_z, \quad (6.40)$$

pa iz zakona održanja momenta impulsa sledi

$$M = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}. \quad (6.41)$$

U daljem izlaganju ćemo posmatrati specijalan slučaj centralne sile, čiji intenzitet zavisi samo od rastojanja r od centra sile, tj. slučaj kada je sila oblika

$$\vec{F} = F(r) \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}. \quad (6.42)$$

Elementarni rad dA koji izvrši ovakva sila jednak je

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r)dr = -d \int (-F(r)) dr, \quad (6.43)$$

što znači da je ona konzervativna, a odgovarajuća potencijalna energija je

$$U(r) = - \int F(r) dr. \quad (6.44)$$

To dalje znači da pri ovakvom kretanju važi zakon održanja ukupne mehaničke energije. Kinetička energija čestice u polarnim koordinatama ima oblik

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2), \quad (6.45)$$

pa zakon održanja energije ima oblik

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \text{const}. \quad (6.46)$$

Ako sada $\dot{\varphi}$ izrazimo iz zakona održanja momenta impulsa (6.41), pa ga zamenimo u prethodni izraz za energiju, dobijamo

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + U_{eff}(r), \quad (6.47)$$

gde smo sa $U_{eff}(r)$ označili tzv. **efektivnu potencijalnu energiju**, koja je po definiciji jednaka

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M^2}{2mr^2}. \quad (6.48)$$

Na taj način smo ukupnu energiju napisali u obliku analognom izrazu za ukupnu energiju čestice pri jednodimenzionom kretanju, pa nam tako napisan zakon održanja energije daje mogućnost da kvalitativno analiziramo centralno kretanje.

Primer 6.3.1. Pod Keplerovom silom podrazumeva se centralna konzervativna silu, intenziteta obrnuto proporcionalnog kvadratu rastojanja od centra sile. Ovde ćemo razmotriti slučaj privlačne Keplerove sile:

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r, \quad k > 0.$$

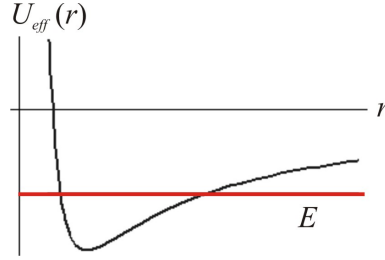
Potencijalna energija je jednaka

$$U(r) = - \int F(r) dr = \int \frac{k}{r^2} dr = -\frac{k}{r},$$

gde smo integracionu konstantu izabrali da bude jednaka nuli (što znači da je na beskonačno velikim rastojanjima od centra sile $U(r)$ jednako nuli). Zamenom ovakvog izraza za U u (6.48) dobija se

$$U_{eff} = \frac{M^2}{2mr^2} - \frac{k}{r},$$

čiji je grafik prikazan na slici 6.3. Sa te slike se takođe vidi da su, u zavisnosti od ukupne energije čestice, moguće sledeće situacije:



Slika 6.3: Efektivna potencijalna energija $U_{eff}(r)$ čestice koja se kreće u polju privlačne Keplerove sile. Kretanje je moguće samo za one vrednosti r za koje je ukupna energija E veća od $U_{eff}(r)$

- Najmanja energija koju čestica može da ima je $E = \min(U_{eff})$. U tom slučaju je $r = \text{const}$, što znači da se čestica kreće po kružnici.
- Za vrednosti energije u intervalu $\min U_{eff} < E < 0$ kretanje je moguće u oblasti $r_1 < r < r_2$, gde su r_1 i r_2 vrednosti za koje je $U(r_1) = E$ i $U(r_2) = E$. Ovakvo kretanje, ograničeno na konačnu oblast, naziva se *finitno* kretanje.
- Ako je $E = 0$, najmanje rastojanje r_{min} na koje čestica može da se približi centru sile dobija se iz uslova $U_{eff}(r_{min}) = 0$. S druge strane nema ograničenja, tj. čestica može da se udalji na neograničeno veliko rastojanje od centra sile, pa ovakvo kretanje nazivamo *transfinitno*.
- Konačno, ako je $E > 0$ kretanje je ponovo transfinitno, a minimalno rastojanje na koje čestica može da priđe centru sile određuje se iz jednačine $U_{eff}(r_{min}) = E$ (koja ima samo jedno pozitivno rešenje).

Osim kvalitativne analize, pomoću zakona održanja energije (6.47) možemo, barem u principu, naći i konačne jednačine kretanja. Naime, iz (6.47) direktno sledi

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}(E - U_{eff}(r))}}, \quad (6.49)$$

odakle bi mogla da se nađe konačna jednačina kretanja $r = r(t)$. Kada se to uradi, onda je, opet u principu, moguće naći i $\varphi(t)$, pomoću zakona održanja momenta impulsa (6.41), iz kog sledi

$$\varphi(t) = \int dt \frac{M}{mr^2(t)}. \quad (6.50)$$

Takođe, iz zakona održanja (6.41) i (6.47) moguće je i direktno naći jednačinu trajektorije, tj. eksplicitnu vezu između r i φ u obliku

$$\varphi = \frac{M}{\sqrt{2mE}} \int \frac{dr}{r^2 \sqrt{1 - \frac{U_{eff}(r)}{E}}}, \quad (6.51)$$

što nije teško proveriti.

6.3.2 Lagranžev formalizam i Bineov obrazac

Lagranževa funkcija za ovakav sistem ima oblik

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r), \quad (6.52)$$

pa je odatle Lagranževa jednačina koja odgovara koordinati r :

$$\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{m} \frac{dU}{dr} = 0. \quad (6.53)$$

Pošto je koordinata φ ciklična, Lagranževa jednačina koja joj odgovara odmah daje jedan integral kretanja:

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mr^2\dot{\varphi} = \text{const}, \quad (6.54)$$

što se poklapa sa zakonom održanja momenta impulsa (6.41). Ako se u prvoj Lagranževnoj jednačini \ddot{r} izrazi kao

$$\ddot{r} = \frac{d\dot{r}}{dt} = \frac{d\dot{r}}{dr} \frac{dr}{dt} = \dot{r} \frac{d\dot{r}}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 \right)$$

i $\dot{\varphi}$ zameni iz zakona održanja momenta impulsa, lako se pokazuje da se dobija jednačina koja se može jednom prointegraliti po r , što ponovo daje zakon održanja energije (6.47).

Iz Lagranževe jednačine (6.53) moguće je, međutim, dobiti i diferencijalnu jednačinu trajektorije, ako se primeni sledeća transformacija:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi}, \quad (6.55)$$

gde se, zatim, φ izrazi iz (6.54), tako da je dalje

$$\dot{r} = \frac{M}{mr^2} \frac{dr}{d\varphi} = -\frac{M}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (6.56)$$

odnosno

$$\ddot{r} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{d}{d\varphi} \left[-\frac{M}{m} \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{1}{r} \right) \right] = -\frac{M^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6.57)$$

Kada se ovakav izraz za \ddot{r} zameni u Lagranževu jednačinu, ona se jednostavno transformiše u oblik

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m}{M^2} r^2 F(r), \quad (6.58)$$

koji je poznat kao **Bineov obrazac**, a koji predstavlja diferencijalnu jednačinu trajektorije čestice, koja se kreće u polju centralne sile $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$.

6.3.3 Kretanje u polju privlačne Keplerove sile

Za česticu mase m , koja se kreće u polju privlačne Keplerove sile $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$, Bineov obrazac ima oblik

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{km}{M^2}. \quad (6.59)$$

Opšte rešenje ove jednačine ima oblik

$$\frac{1}{r} = A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi + \frac{km}{M^2}, \quad (6.60)$$

a konstante A_1 i A_2 ćemo uvesti tako da r ima minimalnu vrednost za $\varphi = 0$. Drugim rečima, treba da bude zadovoljeno

$$\left. \frac{dr}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = 0, \quad (6.61)$$

pa iz jednačine (6.60) sledi

$$-\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = A_2 = 0, \quad (6.62)$$

što znači da je

$$r = \frac{1}{A_1 \cos \varphi + \frac{km}{M^2}}, \quad (6.63)$$

odnosno

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}. \quad (6.64)$$

Drugim rečima, trajektorija čestice je konusni presek, čiji su parametri p i ekscentricitet redom jednaki

$$p = \frac{M^2}{km}, \quad \varepsilon = A_1 \frac{M^2}{km}. \quad (6.65)$$

Pošto je

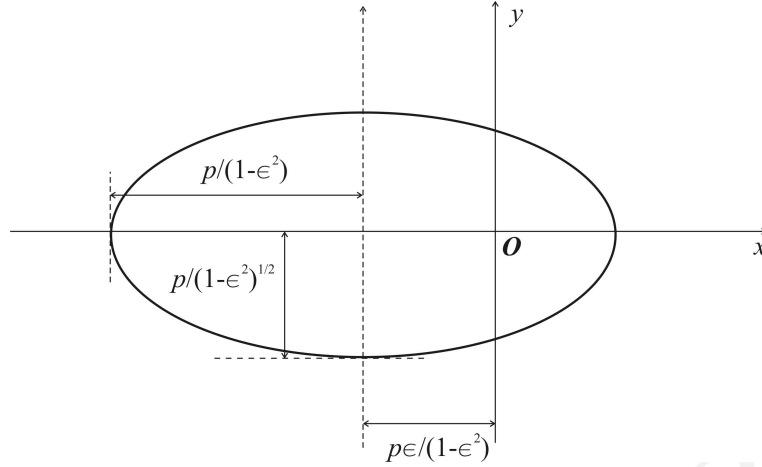
$$\begin{aligned} E &= T + U = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + U(r) = U_{\text{eff}}(r_{\min}) \\ &= \frac{M^2}{2mr_{\min}^2} - \frac{k}{r_{\min}} = \frac{M^2}{2m} \frac{(1 + \varepsilon)^2}{p^2} - k \frac{1 + \varepsilon}{p} \\ &= -k \frac{km}{M^2} (1 + \varepsilon) + \frac{M^2}{2m} \left(\frac{km}{M^2} \right)^2 (1 + \varepsilon)^2 = \frac{k^2 m}{2M^2} (\varepsilon^2 - 1) \end{aligned} \quad (6.66)$$

sledi da ekscentricitet ε u funkciji ukupne energije E može da se izrazi kao

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2EM^2}{k^2 m}}, \quad (6.67)$$

odakle se vidi da energija određuje po kakvom konusnom preseku se čestica kreće. Naime, ako je

1. $E = -\frac{k^2 m}{2M^2}$, onda je $\varepsilon = 0$, pa je trajektorija kružnica;
2. $-\frac{k^2 m}{2M^2} < E < 0$, onda je $\varepsilon < 1$, pa je trajektorija elipsa;
3. $E = 0$, onda je $\varepsilon = 1$, pa je trajektorija parabola;
4. $E > 0$, $\varepsilon > 1$, a trajektorija je hiperbola.



Slika 6.4: Eliptična trajektorija čestice u polju privlačne Keplerove sile. Žiza elipse nalazi se u centru sile (u koji je postavljen početak koordinatnog sistema O).

Razmotrimo detaljnije slučaj kretanja po elipsi. Pošto je $x = r \cos \varphi$ i $y = r \sin \varphi$ jednačinu trajektorije (6.64) u Dekartovim koordinatama prepisujemo kao

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p - \varepsilon x,$$

odakle kvadriranjem dobijamo

$$x^2 + y^2 = p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2,$$

odnosno

$$x^2 + \frac{2p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}x + \frac{y^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}.$$

Poslednja jednačina može da se prepiše kao

$$\frac{\left(x + \frac{p\varepsilon}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\left(\frac{p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}\right)^2} = 1, \quad (6.68)$$

što za $\varepsilon < 1$ zaista predstavlja jednačinu elipse, sa poluosama

$$a = \frac{p}{1 - \varepsilon^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}}. \quad (6.69)$$

Ako je čestica koju smo razmatrali planeta u Sunčevom sistemu, koja se kreće pod delovanjem Sunčeve gravitacione sile (dok se interakcija sa ostalim telima zanemaruje), onda smo na ovaj način izveli *I Keplerov zakon*, prema kome se svaka planeta kreće po elipsi u čijoj se žizi nalazi Sunce. *II Keplerov zakon* je samo posledica zakona održanja impulsa. Naime, sektorska brzina \vec{S} svake planete je proporcionalna njenom momentu impulsa, pošto je

$$\vec{S} = \frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{v} = \frac{1}{2m} \vec{M} \quad (6.70)$$

pa iz zakona održanja momenta impulsa, koji važi za svaku centralnu silu, sledi da radijus vektor planete u odnosu na Sunce za isto vreme uvek prebriše istu površinu, tj. sektorska brzina planete pri njenom obilaženju oko Sunca je konstantna. *III Keplerov zakon*, po kome je odnos kuba velike poluose a i kvadrata perioda τ obilaženja planete oko Sunca isti za sve planete, takođe se može isvesti uz pomoć gore dobijenih rezultata. Ako formiramo količnik a^3/τ^2 dobijamo

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{a^3}{\left(\frac{\pi ab}{S}\right)^2} = \frac{aS^2}{\pi^2 b^2} = \frac{k}{4\pi^2 m}, \quad (6.71)$$

a pošto je za kretanje planeta pod delovanjem Sunčeve gravitacije $k = \gamma m m_S$, gde je γ gravitaciona konstanta, a m_S masa Sunca, sledi da je

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{\gamma m_S}{4\pi^2}, \quad (6.72)$$

što je zaista isto za sve planete Sunčevog sistema.

6.4 Problem dva tela

Razmotrimo izolovan sistem koji se sastoji od dve čestice masa m_1 i m_2 . Ako su radijus vektori čestica redom \vec{r}_1 i \vec{r}_2 , a sila kojom čestica 2 deluje na česticu 1 jednaka \vec{F} , onda jednačine kretanja ovih čestica imaju oblik

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \vec{F}, \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = -\vec{F}. \quad (6.73)$$

Ako sada umesto vektora \vec{r}_1 i \vec{r}_2 uvedemo radijus vektor centra mase \vec{r}_c i vektor relativnog položaja čestica \vec{r} :

$$\vec{r}_c = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad (6.74)$$

onda sabiranjem jednačina (6.73) dobijamo jednačinu

$$m \ddot{\vec{r}}_c = 0, \quad m = m_1 + m_2, \quad (6.75)$$

a deljenjem svake od jednačina (6.73) odgovarajućom masom i oduzimanjem

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \vec{F}, \quad \mu = \frac{m_1 m_2}{m}, \quad (6.76)$$

Jednačina (6.75) nam kaže da se pri kretanju ovakvog sistema njegov centar mase kreće uniformno (što, naravno, važi za bilo kakav izolovani sistem). Jednačina (6.76) ima oblik jednačine kretanja čestice mase μ , koja se kreće pod delovanjem sile \vec{F} . Masa μ naziva se *redukovana masa* (pošto je manja i od m_1 i od m_2). Ako smo u stanju da rešimo ovaj jednoč-estični problem, onda sigurno možemo da rešimo i prvobitni dvo-čestični problem. Kad nađemo vektore \vec{r}_c i \vec{r} kao funkcije vremena, onda rešavanjem sistema (6.74) nalazimo položaje čestica 1 i 2:

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \frac{m_2}{m} \vec{r}, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c - \frac{m_1}{m} \vec{r} \quad (6.77)$$

Uvođenjem vektora centra mase i vektora relativnog položaja postizemo ne samo razdvajanje promenljivih u jednačinama kretanja, već i u izrazima za moment impulsa \vec{M} i kinetičku energiju sistema T . Naime, ako u izraz za ukupni moment impulsa sistema

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times m_1 \dot{\vec{r}}_1 + \vec{r}_2 \times m_2 \dot{\vec{r}}_2$$

zamenimo (6.77), lako se pokazuje da mešoviti članovi otpadaju, tako da je moment impulsa jednak

$$\vec{M} = \vec{r}_c \times m \dot{\vec{r}}_c + \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}}. \quad (6.78)$$

Slično se za kinetičku energiju

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2$$

dobija izraz

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2. \quad (6.79)$$

Pretpostavimo sada da je sila kojom čestice interaguju oblika

$$\vec{F} = F(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} = F(r) \frac{\vec{r}}{r}. \quad (6.80)$$

Ovakva sila jeste konzervativna, što se lako vidi ako izračunamo ukupni rad dA koji se izvrši pri pomeranju čestica za $d\vec{r}_1$ i $d\vec{r}_2$:

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}_1 - \vec{F} \cdot d\vec{r}_2 = \vec{F} \cdot d(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F(r) dr = -dU(r),$$

gde je $U = -\int F(r) dr$ potencijalna energija sistema. Ako za generalisane koordinate izaberemo Dekartove koordinate čestica 1 i 2, onda lagranžijan sistema ima oblik

$$L(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2) = T - U = \frac{1}{2} m_1 \dot{\vec{r}}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{\vec{r}}_2^2 - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|). \quad (6.81)$$

Ako, međutim, za generalisane koordinate izaberemo Dekartove komponente vektora centra mase \vec{r}_c i vektora relativnog položaja \vec{r} , onda lagranžijan ima oblik

$$L(\vec{r}_c, \vec{r}, \dot{\vec{r}}_c, \dot{\vec{r}}) = T - U = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_c^2 + \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 - U(r). \quad (6.82)$$

Problem kretanja ovog sistema se onda svodi na problem rešavanja kretanja čestice redukovane mase μ u polju centralne sile $\vec{F}(r)$.

Sistem centra mase

Pošto se centar mase razmatranog sistema kreće uniformno, za njega se može vezati inercijalni sistem reference, koji ćemo zvati sistem centra mase (CM). Radijus vektore čestica 1 i 2 u ovom sistemu označavaćemo redom sa \vec{r}_1^* i \vec{r}_2^* . Radijus vektor centra mase \vec{r}_c^* u ovom sistemu je, naravno, jednak nuli $\vec{r}_c^* = 0$, dok je vektor relativnog položaja isti u svim inercijalnim sistemima $\vec{r}^* = \vec{r}$. Imajući to u vidu, iz relacija (6.77) dobijamo položaje čestica u sistemu CM u funkciji vektora \vec{r} :

$$\vec{r}_1^* = \frac{m_2}{m} \vec{r}, \quad \vec{r}_2^* = -\frac{m_1}{m} \vec{r}. \quad (6.83)$$

Impulsi čestica u ovom sistemu su jednakog intenziteta i pravca, a suprotnog smera:

$$m_1 \dot{\vec{r}}_1^* = -m_2 \dot{\vec{r}}_2^* = \mu \dot{\vec{r}} = \vec{p}^*. \quad (6.84)$$

Ukupni moment impulsa \vec{M}^* i ukupna kinetička energija T^* čestica su, prema izrazima (6.78) i (6.79), jednaki

$$\vec{M}^* = \vec{r} \times \mu \dot{\vec{r}} = \vec{r} \times \vec{p}^*, \quad T^* = \frac{1}{2} \mu \dot{\vec{r}}^2 = \frac{\vec{p}^{*2}}{2\mu}. \quad (6.85)$$

Često je zgodno da se problem kretanja ovakvog sistema reši prvo u sistemu CM. Da bismo onda našli rešenje u nekom drugom referentnom sistemu, potrebne su nam veze između relevantnih veličina u ta dva sistema. Razmotrimo sistem u kome je radijus vektor CM jednak vektoru \vec{r}_c . Položaji čestica u tom sistemu su onda

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_c + \vec{r}_1^*, \quad \vec{r}_2 = \vec{r}_c + \vec{r}_2^*, \quad (6.86)$$

a brzine

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}_1^*, \quad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{r}}_c + \dot{\vec{r}}_2^*. \quad (6.87)$$

Impulsi čestica u tom sistemu su, prema (6.84), jednaki

$$\vec{p}_1 = m_1 \dot{\vec{r}}_c + \vec{p}^*, \quad \vec{p}_2 = m_2 \dot{\vec{r}}_c - \vec{p}^*, \quad (6.88)$$

a ukupni impuls \vec{p} , moment impulsa \vec{M} i ukupna kinetička energija T :

$$\vec{p} = m \dot{\vec{r}}_c, \quad \vec{M} = m \vec{r}_c \times \dot{\vec{r}}_c + \vec{M}^*, \quad T = \frac{1}{2} m \dot{\vec{r}}_c^2 + T^*. \quad (6.89)$$

Primer 6.4.1. Razmotrimo problem kretanja dve materijalne tačke pod delovanjem njihovog uzajamnog gravitacionog privlačenja. Jednačina (6.76) za taj slučaj ima oblik

$$\mu \ddot{\vec{r}} = \frac{\gamma m_1 m_2}{r^3} \vec{r} = \frac{\gamma \mu m}{r^3} \vec{r}, \quad (6.90)$$

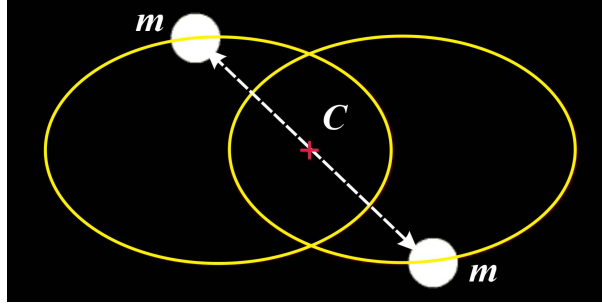
što se poklapa sa jednačinom za kretanje čestice mase μ pod delovanjem gravitacione sile nepokretne čestice mase m . Specijalno, za eliptičnu orbitu po izrazu (6.71) dobijamo

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{\gamma m}{4\pi^2},$$

gde je sada a velika poluosa „relativne” trajektorije. Ako ovu relaciju primenimo na sistem Sunce-planeta zaključujemo da III Keplerov zakon nije sasvim tačan, tj. tačno važi:

$$\frac{a^3}{\tau^2} = \frac{\gamma m_S}{4\pi^2} \left(1 + \frac{m_P}{m_S} \right).$$

Ovo odstupanje je teško detektovati, pošto je masa Sunca m_S mnogo veća od mase m_P bilo koje planete u Sunčevom sistemu.



Slika 6.5: Primer kretanje dva tela jednakih masa, koja međusobno interaguju privlačnom Keplerovom silom, posmatrano iz sistema vezanog za centar mase. Tela se kreću po jednakim elipsama, čija se jedna žiža poklapa sa centrom mase sistema, a druge dve žiže su postavljene simetrično u odnosu na centar mase.

6.5 Rasejanja

Jedna od najčešće primenjivanih metoda za dobijanje informacija o strukturi malih tela je njihovo bombardovanje česticama i merenje broja čestica koje se pri tome raseju u raznim pravcima. Ugaona raspodela rasejanih čestica zavisi od oblika mete i od prirode sila između čestica i mete. Da bismo mogli da interpretiramo rezultate ovakvih eksperimenata, potrebno je da znamo kako se izračunava ugaona raspodela čestica ako su sile poznate.

Razmotrićemo prvo jednostavan slučaj kada je meta nepokretna čvrsta idealno elastična lopta radijusa R , na koju naleće homogen paralelan snop čestica. Neka je *fluks* čestica u snopu, tj. *broj čestica koje u jedinici vremena prođu kroz jediničnu površinu normalnu na pravac snopa*, jednak f . Onda je broj čestica koje u jedinici vremena pogode loptu jednak

$$w = f\sigma, \quad (6.91)$$

gde je σ poprečni presek mete, tj.

$$\sigma = \pi R^2. \quad (6.92)$$

Razmotrimo sada jednu od čestica iz snopa. Neka je najkraće rastojanje između pravca njene brzine pre sudara i centra mete (tzv. *parametar sudara*) jednako b (slika 6.6). Onda je ugao α , koji brzina čestice u trenutku sudara sa loptom zaklapa sa odgovarajućom normalom na površinu lopte, određen relacijom

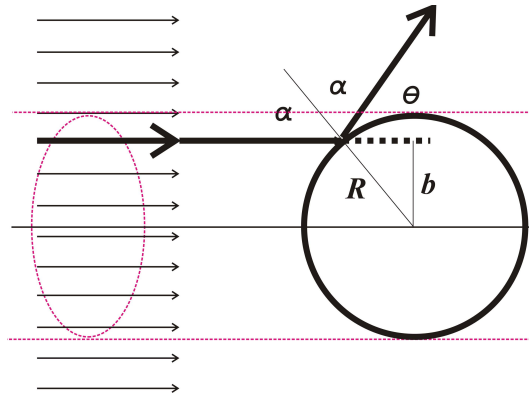
$$b = R \sin \alpha.$$

Pošto se čestica apsolutno elastično odbija, ugao θ za koji se promeni pravac brzine prilikom sudara, tzv. *ugao rasejanja*, jednak je $\theta = \pi - 2\alpha$, pa je

$$b = R \cos \frac{\theta}{2}. \quad (6.93)$$

Sada možemo da izračunamo broj čestica koje se raseju u oblast oko pravca određenog uglovima θ i φ , sa intervalom $d\theta$ i $d\varphi$. Čestice čiji je ugao rasejanja između θ i $\theta + d\theta$ (nezavisno od ugla φ) su one čiji je parametar sudara bio između b i $b + db$, gde je db jednako

$$db = -\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{2} d\theta. \quad (6.94)$$



Slika 6.6: Jednostavan primer rasejanja: homogeni paralelni snop materijalnih tačaka idealno elastično se rasejava o nepokretnu čvrstu loptu.

Prilikom rasejanja ne dolazi do promene ugla φ , pa je broj čestica koji nas zanima jednak broju čestica koje pre sudara prolaze kroz mali deo $d\sigma$ poprečnog preseka upadnog snopa, koji je jednak

$$d\sigma = b|db|d\varphi, \quad (6.95)$$

tj. čestice koje prođu kroz taj mali deo poprečnog preseka snopa se raseju upravo u zadatu oblast (slika 6.7). Zamenjujući b i db u poslednji izraz dobijamo

$$d\sigma = \frac{1}{4}R^2 \sin\theta d\theta d\varphi. \quad (6.96)$$

Broj čestica koje u jedinici vremena prođu kroz ovu oblast, a samim tim se i raseju u uočeni pravac jednak je

$$dw = f d\sigma \quad (6.97)$$

i on može da se meri malim detektorom postavljenim u tom pravcu, a na relativno velikom rastojanju L od mete ($L \gg R$). Zato je potrebno izraziti ovaj rezultat u funkciji površine $dA = L^2 \sin\theta d\theta d\varphi$ takvog detektora. Imajući u vidu da je prostorni ugao $d\Omega$ koji odgovara oblasti u koju se čestice rasejavaju upravo jednak

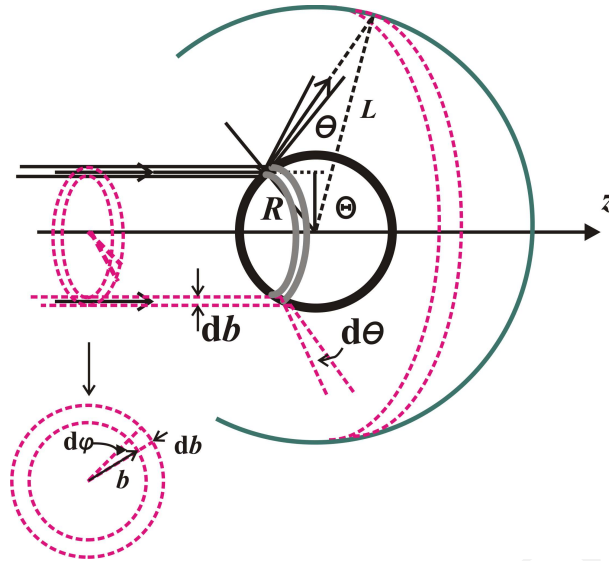
$$d\Omega = \frac{dA}{L^2},$$

broj dw možemo da napišemo u obliku

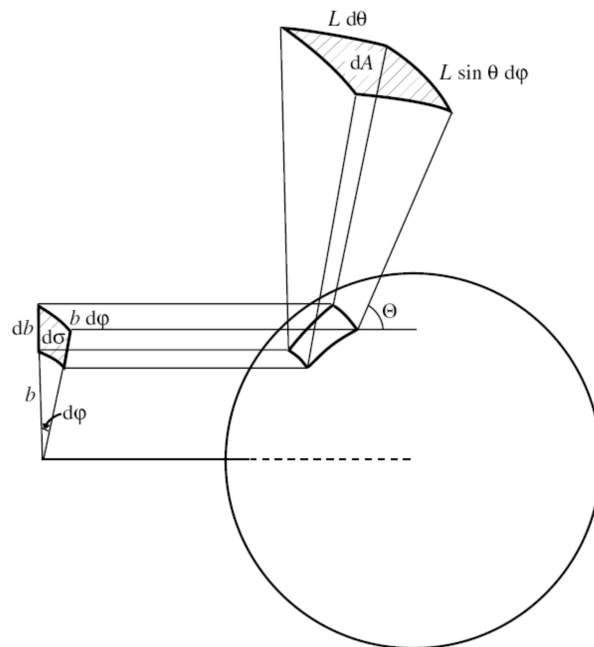
$$dw = f \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{dS}{L^2}. \quad (6.98)$$

Veličina $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ naziva se **diferencijalni presek rasejanja**. Diferencijalni presek rasejanja, dakle, predstavlja odnos broja čestica koje se u jedinici vremena raseju u jedinični prostorni ugao i upadnog fluksa čestica. U specijalnom slučaju koji smo ovde razmatrali diferencijalni presek rasejanja je jednak $R^2/4$, dok se ukupni presek rasejanja $\sigma = \pi R^2$ tačno dobija njegovom integracijom po svim prostornim uglovima (tj. u ovom slučaju jednostavnim množenjem sa punim prostornim uglom 4π).

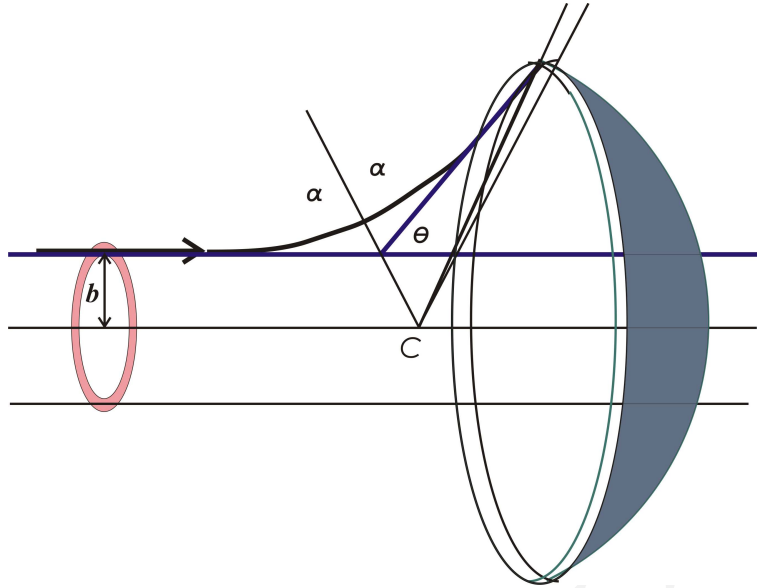
Diferencijalni presek rasejanja se potpuno analogno definiše i u slučaju kada snop materijalnih tačaka umesto na nepokretnu loptu, nailazi na centar konzervativne sile (slika 6.9). Da bi se u



Slika 6.7: Na relativno velikom rastojanju L (zelena linija) od lopte o koju se rasejavaju čestice, postavlja se detektor koji meri koliko čestica se u jedinici vremena raseje u pravcu određenom sfernim uglovima Θ i φ . Sve čestice koje prolaze kroz ružičasti prsten „debljine” db , naznačen na poprečnom preseku upadnog snopa, padaju na sivo oivičeni prsten na površini lopte i rasejavaju se u oblast određenu istim uglom θ (i intervalom $d\theta$), koji se za $L \gg R$ izjednačava sa sfernim uglom Θ .



Slika 6.8: Čestice koje prođu kroz površinu $d\sigma$ poprečnog preseka upadnog snopa, padaju na površinu dA , gde je postavljen brojač.



Slika 6.9: Rasejanje paralelnog snopa čestica koje nailaze na centar konzervativne sile.

takvom slučaju izračunao diferencijalni presek rasejanja, potrebno je iz jednačine trajektorije naći vezu između parametra sudara b i ugla rasejanja θ . Pretpostavlja se da je snop čestica homogen i da na velikom (beskonačnom) rastojanju od centra sile svaka čestica ima brzinu v_∞ , kao i da se interakcija između čestica u snopu može zanemariti. Pošto je onda jedina sila koja deluje na čestice centralna i konzervativna, zakoni održanja energije i impulsa važe za svaku česticu ponaosob.

Raderfordova formula

Razmotrimo problem rasejanja u polju odbojne Keplerove sile $\vec{F} = \kappa/r^2 \vec{e}_r$, gde je $\kappa > 0$. Bineov obrazac za ovaj slučaj ima oblik jednačine

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{m\kappa}{M^2},$$

čije je opšte rešenje, uz zahtev da se ugao φ meri od položaja u kome je čestica najbliža centru sile,

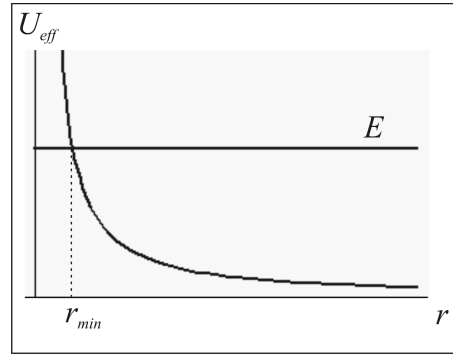
$$r = \frac{1}{C \cos \varphi - \frac{m\kappa}{M^2}}. \quad (6.99)$$

Kako je efektivna potencijalna energija u ovom slučaju jednaka

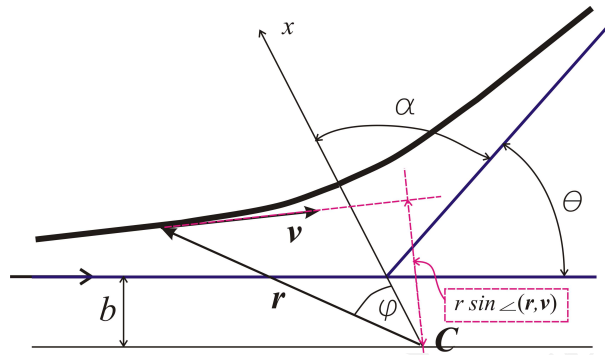
$$U_{eff} = \frac{M^2}{2mr^2} + \frac{\kappa}{r}, \quad (6.100)$$

jasno je da je moguće samo transfinitno kretanje (slika 6.10). Ako intenzitet brzine čestice na beskonačno velikim rastojanjima od centra sile označimo sa v_∞ , ukupna energija čestice je

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2$$



Slika 6.10: Efektivna potencijalna energija u slučaju odbojne Keplerove sile (6.100). Vidi se da je moguće samo transfinitno kretanje.



Slika 6.11: Mnogo pre rasejanja, kada $r \rightarrow \infty$, projekcija vektora \vec{r} na pravac brzine \vec{v} čestice jednaka je parametru sudara b , pa odatle sledi da je $M = mv_\infty b$.

a intenzitet momenta impulsa je

$$M = mbv_\infty,$$

gde je b parametar rasejanja, tj. najkraće rastojanje između centra sile i pravca brzine čestice na beskonačno velikim rastojanjima od njega (slika 6.11). Jednačina trajektorije (6.99) posle zamene izraza za moment impulsa dobija oblik

$$r = \frac{1}{C \cos \varphi - \frac{\kappa}{mv_\infty^2 b^2}}. \quad (6.101)$$

Za $r \rightarrow \infty$ efektivna potencijalna energija teži nuli, pa energija teži vrednosti $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$, tj.

$$E = \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} \dot{r}^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{dr}{d\varphi} \dot{\varphi} \right)^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{dr}{d\varphi} \frac{M}{mr^2} \right)^2.$$

Iz jednačine (6.101) i izraza za moment impulsa dalje sledi

$$\frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{1}{2}m \lim_{r \rightarrow \infty} C^2 b^2 v_\infty^2 \sin^2 \varphi(r) = \frac{1}{2}mv_\infty^2 b^2 C^2 \sin^2 \alpha,$$

gde je $\alpha = \lim_{r \rightarrow \infty} \varphi$. Odatle je

$$C = \frac{1}{b \sin \alpha},$$

a kako je iz jednačine trajektorije

$$\cos \alpha = \frac{\kappa}{C m v_{\infty}^2 b^2},$$

sledi da je

$$b = \frac{\kappa}{m v_{\infty}^2} \operatorname{tg} \alpha = \frac{\kappa}{m v_{\infty}^2} \operatorname{tg} \frac{\pi - \theta}{2} = \frac{\kappa}{m v_{\infty}^2} \operatorname{ctg} \frac{\theta}{2}.$$

Na taj način smo našli vezu između parametra sudara b i ugla rasejanja θ , pa možemo lako da izračunamo diferencijalni presek rasejanja:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b|db|d\varphi}{\sin \theta d\theta d\varphi} = \frac{b}{\sin \theta} \left| \frac{db}{d\theta} \right| = \left(\frac{\kappa}{2 m v_{\infty}^2} \right)^2 \sin^{-4} \frac{\theta}{2}.$$

Ovaj rezultat je poznat kao *Raderfordova formula*, pošto je prvi put izvedena od strane Raderforda, koji je pokušavao da objasni rezultate eksperimenta u kome su pozitivno naelektrisane α -čestice rasejavane na tankoj zlatnoj foliji. Raderford je pretpostavio da je pozitivno naelektrisanje unutar atoma skoncentrisano u vrlo maloj zapremini unutar atoma i da se u skladu sa tim α -čestica rasejava u polju odbojne Kulonove elektrostatičke sile. To onda znači da je u gornjoj formuli $\kappa = qq'/(4\pi\epsilon_0)$, gde su q i q' naelektrisanja α -čestice i jezgra atoma zlata. Raderfordova pretpostavka dovela je do nastanka planetarnog modela atoma.

6.6 Kruto telo

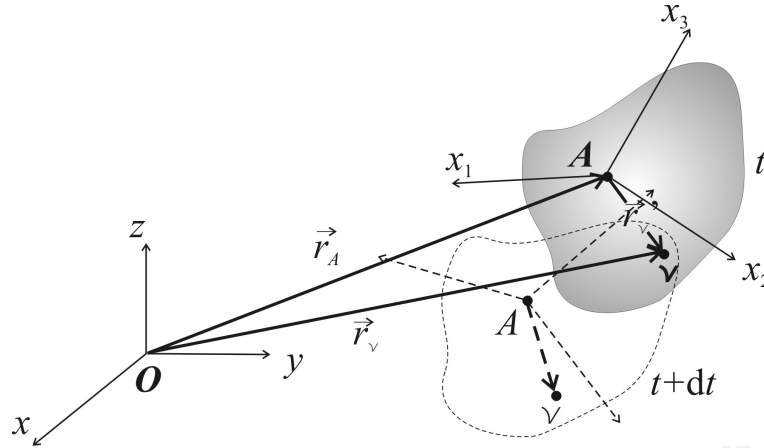
Kruto telo predstavlja sistem čestica čija se međusobna rastojanja ne menjaju u toku kretanja. Položaj krutog tela je u svakom trenutku određen položajem tri njegove tačke, koje ne leže na istoj pravoj. Ako su Dekartove koordinate tih tačaka (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) i (x_3, y_3, z_3) , onda se uslov nepromenljivosti rastojanja između njih izražava u obliku sledeće tri jednačine:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2 - R_{12}^2 &= 0, \\ (x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 - R_{32}^2 &= 0, \\ (x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 - R_{13}^2 &= 0, \end{aligned}$$

u kojima su R_{12} , R_{32} i R_{13} rastojanja između uočenih tačaka. Ove tri jednačine se mogu shvatiti kao jednačine veza, što znači da je od devet Dekartovih koordinata uočene trojke tačaka, dovoljno $n = 9 - 3 = 6$ koordinata za potpuno opisivanje položaja krutog tela u bilo kom trenutku vremena, tj. broj stepeni slobode slobodnog krutog tela je šest.

6.6.1 Ojlerovi uglovi

Uobičajeno je da se za kruto telo veže jedan koordinatni sistem $Ax_1x_2x_3$, koji se naziva **sopstveni sistem krutog tela** (slika 6.12). Koordinatni početak A ovog sistema naziva se **pol krutog tela**. Za generalisane koordinate krutog tela se najčešće uzimaju Dekartove koordinate njegovog



Slika 6.12: U laboratorijskom referentnom sistemu (inercijalnom) Dekartov koordinatni sistem je $Oxyz$. Za kruto telo vezan je drugi referentni sistem (u opštem slučaju neinercijalan), a u njemu je izabran koordinatni sistem $Ax_1x_2x_3$, sa početkom u polu A . Kruto telo ne menja svoj položaj u odnosu na sopstveni sistem $Ax_1x_2x_3$, tj. sopstveni sistem krutog tela kreće se zajedno sa njim. Radijus vektor proizvoljne tačke ν krutog tela u laboratorijskom sistemu označen je sa \vec{r}_ν , a u sistemu krutog tela sa \vec{r}'_ν .

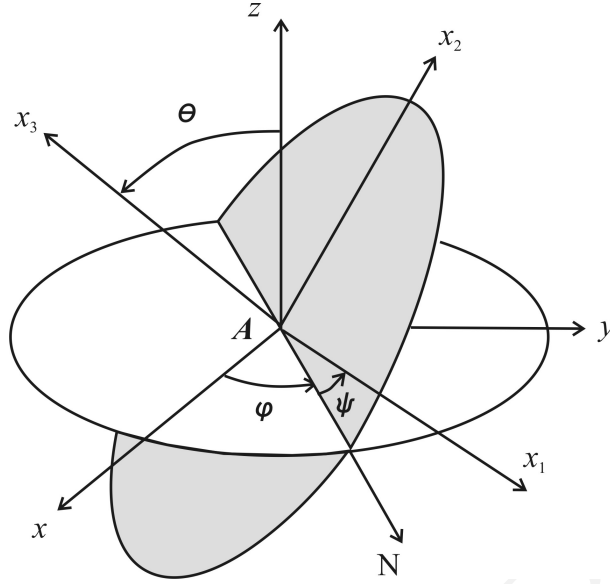
pola i tzv. **Ojlerovi uglovi** koji se definišu na sledeći način. Neka je $Axyz$ koordinatni sistem čije su ose paralelne osama laboratorijskog sistema, a čiji se koordinatni početak poklapa sa polom krutog tela A . Prava po kojoj se seku ravni Axy i Ax_1x_2 naziva se **čvorna** (ili nodalna) **linija**. Ugao koji čvorna linija zaklapa sa pozitivnim pravcem Ax ose označićemo sa φ , ugao koji čvorna linija zaklapa sa pozitivnim pravcem Ax_1 ose označićemo sa ψ , a ugao koji zaklapaju ose Az i Ax_3 sa θ . Ovako definisani uglovi φ , θ i ψ predstavljaju Ojlerove uglove (slika 6.13).

6.6.2 Ojlerova i Šalova teorema

Sistem $Axyz$ može se prevesti u sopstveni sistem $Ax_1x_2x_3$ krutog tela pomoću sledeće tri uzastopne rotacije:

1. prvo se sistem $Axyz$ oko Az ose zarotira za ugao φ , čime se poklope Ax osa i čvorna linija N (slika 6.14a);
2. zatim se tako dobijeni sistem zarotira oko čvorne linije za ugao θ , čime se osa Az dovede do poklapanja sa Ax_3 osom pokretnog sistema (slika 6.14b);
3. konačno, ravan Axy zarotira se oko Ax_3 ose za ugao ψ , čime se Ax osa poklopi sa Ax_1 osom i, naravno, Ay osa sa osom Ax_2 (slika 6.14c).

Pošto je kompozicija tri rotacije takođe rotacija, sledi da se sistem $Axyz$ može prevesti u sistem $Ax_1x_2x_3$ jednom rotacijom oko ose koja prolazi kroz tačku A . Drugim rečima, *bilo kakvo kretanje krutog tela pri kome jedna njegova tačka ostaje nepokretna ekvivalentno je jednoj rotaciji oko ose koja sadrži tu nepokretnu tačku*, što predstavlja tvrdjenje **Ojlerove teoreme**. Pošto se laboratorijski sistem $Oxyz$ translacijom za vektor \vec{r}_A prevodi u sistem $Axyz$, onda za *bilo kakvo* kretanje važi



Slika 6.13: Ojlerovi uglovi.

Šalova teorema: *bilo kakvo kretanje krutog tela ekvivalentno je kompoziciji jedne translacije za vektor za koji se pomeri jedna njegova proizvoljno izabrana tačka i jedne rotacije oko ose koja prolazi kroz tu tačku.* Sada je jasno da $x_A, y_A, z_A, \varphi, \psi$ i θ zaista određuju položaj krutog tela, tj. mogu se izabrati za generalisane koordinate pri proizvoljnom slobodnom kretanju krutog tela.

6.6.3 Ugaona brzina

Uočimo položaj krutog tela u trenutku t , a zatim u trenutku $t+dt$ (slika 6.12). Tačka krutog tela čiji je vektor položaja $\vec{r}_\nu = \vec{r}_A + \vec{r}_\nu'$ u laboratorijskom sistemu za vreme dt pomeri se za

$$d\vec{r}_\nu = d\vec{r}_A + d\vec{r}_\nu',$$

gde je $d\vec{r}_A$ pomeraj koji odgovara translaciji, a $d\vec{r}_\nu'$ pomeraj koji odgovara rotaciji, u smislu Šalove teoreme. Osa rotacije prolazi kroz pol A i neka je njen pravac određen ortom \vec{n} . Ako se za vreme dt kruto telo zarotira za mali ugao $d\alpha$ oko te ose, onda je

$$d\vec{r}_\nu' = \vec{d\alpha} \times \vec{r}_\nu', \quad (6.102)$$

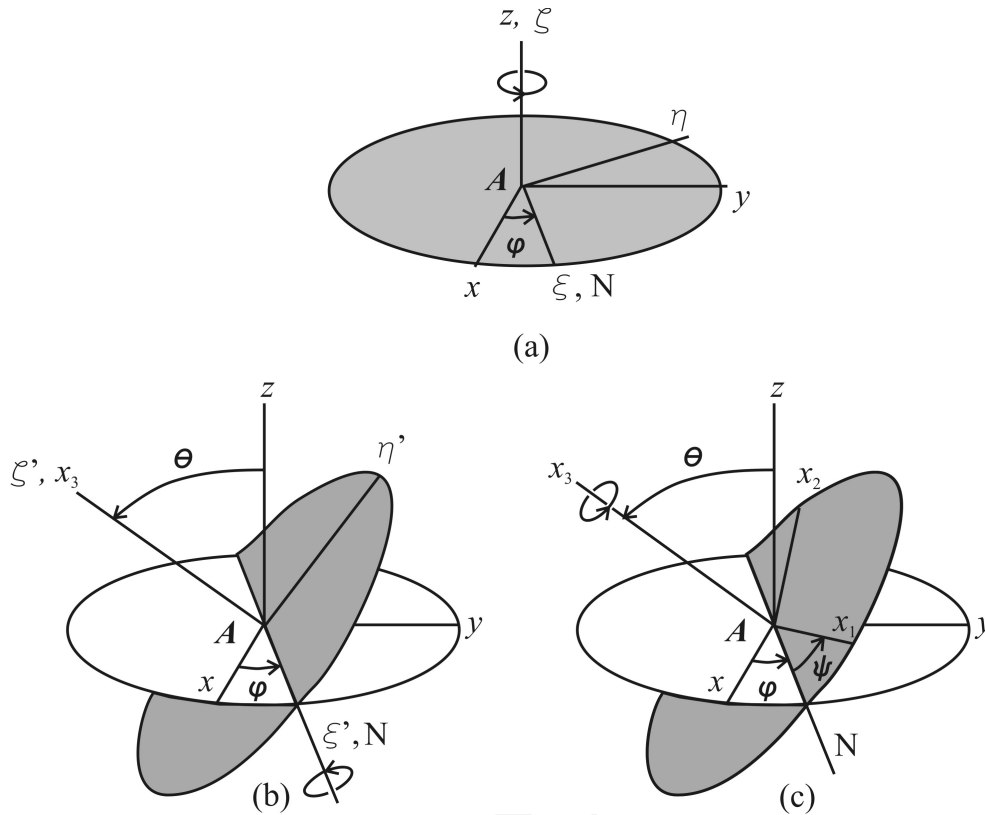
gde je $\vec{d\alpha} = d\alpha \vec{n}$ (slika 6.15). Iz poslednje relacije sledi

$$\vec{v}_\nu = \frac{d\vec{r}_\nu}{dt} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu', \quad (6.103)$$

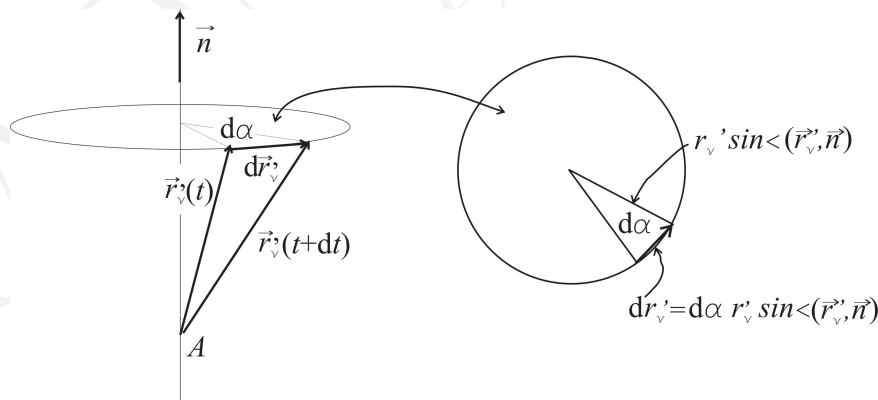
gde smo sa $\vec{\omega}$ označili **ugaonu brzinu**, koja je po definiciji jednaka

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\alpha}}{dt}, \quad (6.104)$$

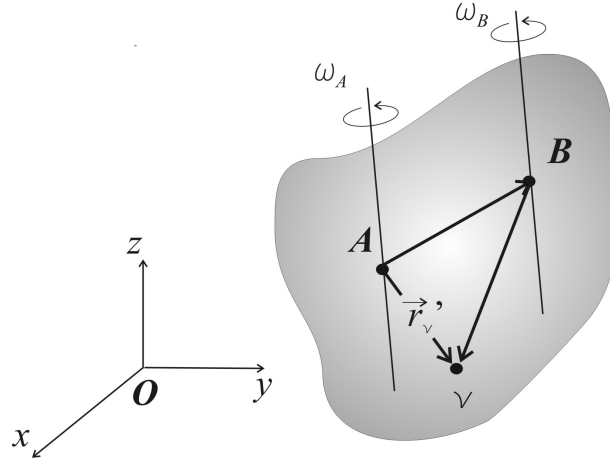
a $\vec{v}_A = d\vec{r}_A/dt$ je brzina pola A .



Slika 6.14: Tri rotacije kojim se sistem $Axyz$ prevodi u sopstveni sistem krutog tela $Ax_1x_2x_3$: (a) rotacijom sistema $Axyz$ oko Az ose dobija se sistem $A\xi\eta\zeta$, čija se osa $A\xi$ poklapa sa čvornom linijom; (b) rotacijom sistema $A\xi\eta\zeta$ oko ose $A\xi$ (čvorne linije) dobija se sistem $A\xi'\eta'\zeta'$, čija se osa $A\xi'$ poklapa sa osom Ax_3 ; (c) konačno, rotacijom sistema $A\xi'\eta'\zeta'$ oko ose $A\xi'$ (Ax_3) dobija se sistem $Ax_1x_2x_3$.



Slika 6.15: Radijus vektor \vec{r}_ν' proizvoljne tačke ν krutog tela u vremenskom intervalu dt zarotira se za mali ugao $d\alpha$ oko ose koja prolazi kroz pol A , a čiji je ort \vec{n} .



Slika 6.16: Ugaona brzina je karakteristika potpunog kretanja krutog tela, tj. ne zavisi od izbora pola, pa je $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$.

Jedinstvenost ugaone brzine

Ugaona brzina je karakteristika kretanja krutog tela kao celine i ne zavisi od izbora pola. Pokazaćemo to, pretpostavljajući suprotno, tj. uzimajući da ugaona brzina zavisi od izbora pola. Ako za pol izaberemo tačku A , onda je brzina neke druge tačke B krutog tela, prema izrazu (6.103) jednaka

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AB}, \quad (6.105)$$

gde je $\vec{\omega}_A$ ugaona brzina krutog tela, kada je pol u A . Slično, brzina tačke ν jednaka je

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{r}_\nu'.$$

Ako za pol izaberemo tačku B (slika 6.16), onda je brzina tačke ν , ponovo prema (6.103), jednaka

$$\vec{v}_\nu = \vec{v}_B + \vec{\omega}_B \times (\vec{r}_\nu' - \overrightarrow{AB}) = \vec{v}_A + \vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_B \times (\vec{r}_\nu' - \overrightarrow{AB}),$$

pri čemu je iskorišćeno i (6.105). Izjednačavanjem poslednja dva izraza dobijamo

$$\vec{\omega}_A \times \overrightarrow{AB} + \vec{\omega}_B \times (\vec{r}_\nu' - \overrightarrow{AB}) = \vec{\omega}_A \times \vec{r}_\nu',$$

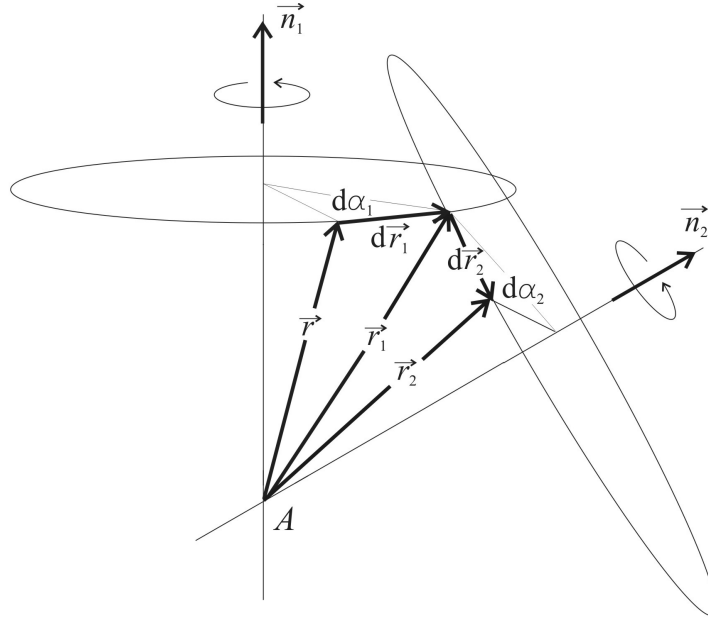
odakle je

$$0 = (\vec{\omega}_A - \vec{\omega}_B) \times (\overrightarrow{AB} - \vec{r}_\nu').$$

Poslednja jednakost važi za bilo koje \vec{r}_ν' , što je moguće jedino ako je $\vec{\omega}_A = \vec{\omega}_B$, tj. jedino kada ugaona brzina zaista ne zavisi od izbora pola.

Slaganje malih rotacija

Razmotrimo dve uzastopne infinitezimalne rotacije krutog tela, prvo oko ose određene ortom \vec{n}_1 za ugao $d\alpha_1$, a zatim oko ose određene ortom \vec{n}_2 za ugao $d\alpha_2$, pri čemu se ose rotacije seku u tački A (slika 6.17). Ako A izaberemo za pol krutog tela i uočimo proizvoljnu tačku krutog tela,



Slika 6.17: Dve uzastopne infinitezimalne rotacije oko osa koje imaju zajedničku tačku A .

određenu relativnim radijus-vektorom \vec{r} u odnosu na A , onda nakon prve rotacije vektor \vec{r} prelazi u vektor

$$\vec{r}_1 = \vec{r} + d\vec{r}_1,$$

gde je, prema formuli (6.102)

$$d\vec{r}_1 = (d\alpha_1 \vec{n}_1) \times \vec{r}.$$

Slično, nakon druge rotacije \vec{r}_1 prelazi u

$$\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + d\vec{r}_2 = \vec{r}_1 + (d\alpha_2 \vec{n}_2) \times \vec{r}_1,$$

što je, ako se iskoriste prethodne dve formule, jednako

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= \vec{r} + (d\alpha_1 \vec{n}_1) \times \vec{r} + (d\alpha_2 \vec{n}_2) \times [\vec{r} + (d\alpha_1 \vec{n}_1) \times \vec{r}] \\ &= \vec{r} + (d\alpha_1 \vec{n}_1 + d\alpha_2 \vec{n}_2) \times \vec{r} + d\alpha_1 d\alpha_2 \vec{n}_2 \times (\vec{n}_1 \times \vec{r}). \end{aligned}$$

Pošto su uglovi $d\alpha_1$ i $d\alpha_2$ infinitezimalno mali uglovi, poslednji sabirak u prethodnoj relaciji može da se zanemari, pa približno važi jednakost

$$\vec{r}_2 = \vec{r} + (d\alpha_1 \vec{n}_1 + d\alpha_2 \vec{n}_2) \times \vec{r},$$

što znači da su opisane dve rotacije ekvivalentne jednoj, za infinitezimalni ugao $d\alpha$ oko ose kojoj odgovara ort \vec{n} , pri čemu je

$$d\alpha \vec{n} = d\alpha_1 \vec{n}_1 + d\alpha_2 \vec{n}_2.$$

Komponente ugaone brzine u funkciji Ojlerovih uglova

Prethodno rezonovanje direktno može da se proširi na tri uzastopne infinitezimalne rotacije oko tri ose koje prolaze kroz istu tačku. S druge strane, svaka infinitezimalna rotacija krutog tela za mali ugao $d\alpha$ oko ose \vec{n} , koja se desi u toku kratkog vremenskog intervala dt , može da se razloži na tri Ojlerove rotacije: za $d\varphi$ oko ose \vec{e}_z , zatim za $d\theta$ oko \vec{e}_N i na kraju za $d\psi$ oko \vec{e}_3 , što znači da je

$$d\alpha\vec{n} = d\vec{\alpha} = d\varphi\vec{e}_z + d\theta\vec{e}_N + d\psi\vec{e}_3.$$

Odatle sledi da je ugaona brzina jednaka

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\psi}\vec{e}_3. \quad (6.106)$$

Pomoću ovog izraza moguće je naći komponente ugaone brzine bilo u laboratorijskom, bilo u sistemu vezanom za kruto telo. Ovde ćemo pokazati kako se nalaze komponente $\vec{\omega}$ u sistemu vezanom za kruto telo:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\varphi}(\vec{e}_z)_1 + \dot{\theta}(\vec{e}_N)_1, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi}(\vec{e}_z)_2 + \dot{\theta}(\vec{e}_N)_2, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi}(\vec{e}_z)_3 + \dot{\theta}(\vec{e}_N)_3 + \dot{\psi}, \end{aligned} \quad (6.107)$$

Iz definicije čvorne linije (slika 6.13) sledi da je

$$\vec{e}_N = \cos\psi\vec{e}_1 - \sin\psi\vec{e}_2,$$

pa je $(\vec{e}_N)_1 = \cos\psi$, $(\vec{e}_N)_2 = -\sin\psi$ i $(\vec{e}_N)_3 = 0$. Takođe, imajući u vidu način na koji se sistem $Axyz$ prevodi u sistem $Ax_1x_2x_3$ možemo da napišemo da je

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \mathcal{R}_\psi \mathcal{R}_\theta \mathcal{R}_\varphi \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix},$$

gde su

$$\mathcal{R}_\psi = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Odatle je

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \\ \vec{e}_z \end{pmatrix} = \mathcal{R}^{-1} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R}^\dagger \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix},$$

pri čemu smo iskoristili osobinu ortogonalnosti matrica rotacije: $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}^\dagger$ [3]. Iz poslednje relacije sledi da je

$$\vec{e}_z = \mathcal{R}_{31}^\dagger \vec{e}_1 + \mathcal{R}_{32}^\dagger \vec{e}_2 + \mathcal{R}_{33}^\dagger \vec{e}_3 = \mathcal{R}_{13} \vec{e}_1 + \mathcal{R}_{23} \vec{e}_2 + \mathcal{R}_{33} \vec{e}_3,$$

što znači da je

$$\begin{pmatrix} (\vec{e}_z)_1 \\ (\vec{e}_z)_2 \\ (\vec{e}_z)_3 \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\psi \sin\theta \\ \cos\psi \sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix},$$

pa, zamenom u (6.107), slede izrazi za komponente ugaone brzine u sopstvenom sistemu krutog tela:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi, \\ \omega_2 &= \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi, \\ \omega_3 &= \dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}.\end{aligned}\tag{6.108}$$

6.6.4 Moment impulsa, kinetička energija i tenzor inercije krutog tela

Izračunajmo moment impulsa \vec{M} krutog tela u odnosu na koordinatni početak O laboratorijskog sistema:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \sum_{\nu} (\vec{r}_A + \vec{r}_{\nu}') \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} \\ &= \vec{r}_A \times \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{v}_{\nu} + \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \times m_{\nu} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}') \\ &= \vec{r}_A \times m \vec{v}_C + \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \times m_{\nu} \vec{v}_A + \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}'),\end{aligned}$$

gde je $m = \sum_{\nu} m_{\nu}$ ukupna masa krutog tela, a \vec{v}_C brzina centra mase krutog tela u odnosu na laboratorijski sistem. Dalje je

$$\vec{M} = \vec{r}_A \times m \vec{v}_C + m \vec{r}_C' \times \vec{v}_A + \sum_{\nu} m_{\nu} [\vec{r}_{\nu}'^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\nu}') \vec{r}_{\nu}'] , \tag{6.109}$$

gde je \vec{r}_C' vektor položaja centra mase C krutog tela u odnosu na pol A . Ako pol A krutog tela miruje i ako upravo taj pol izaberemo za koordinatni početak laboratorijskog sistema onda je $\vec{r}_A = 0$ i $\vec{v}_A = 0$, pa se kretanje krutog tela svodi na čistu rotaciju, a moment impulsa jednak je poslednjem sabirku u prethodnom izrazu:

$$\vec{M}^{\text{rot}} = \sum_{\nu} m_{\nu} [\vec{r}_{\nu}'^2 \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\nu}') \vec{r}_{\nu}'] . \tag{6.110}$$

Projekcije ovog vektora na ose sopstvenog sistema krutog tela jednake su:

$$\begin{aligned}M_1^{\text{rot}} &= \sum_{\nu} m_{\nu} [r_{\nu}'^2 \omega_1 - (\omega_1 x'_{1\nu} + \omega_2 x'_{2\nu} + \omega_3 x'_{3\nu}) x'_{1\nu}] = I_{11} \omega_1 + I_{12} \omega_2 + I_{13} \omega_3, \\ M_2^{\text{rot}} &= \sum_{\nu} m_{\nu} [r_{\nu}'^2 \omega_2 - (\omega_1 x'_{1\nu} + \omega_2 x'_{2\nu} + \omega_3 x'_{3\nu}) x'_{2\nu}] = I_{21} \omega_1 + I_{22} \omega_2 + I_{23} \omega_3, \\ M_3^{\text{rot}} &= \sum_{\nu} m_{\nu} [r_{\nu}'^2 \omega_3 - (\omega_1 x'_{1\nu} + \omega_2 x'_{2\nu} + \omega_3 x'_{3\nu}) x'_{3\nu}] = I_{31} \omega_1 + I_{32} \omega_2 + I_{33} \omega_3,\end{aligned}$$

gde su

$$\begin{aligned}I_{11} &= \sum_{\nu} m_{\nu} (x_{2\nu}'^2 + x_{3\nu}'^2), & I_{12} &= - \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{1\nu} x'_{2\nu} = I_{21}, \\ I_{22} &= \sum_{\nu} m_{\nu} (x_{1\nu}'^2 + x_{3\nu}'^2), & I_{13} &= - \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{1\nu} x'_{3\nu} = I_{31}, \\ I_{33} &= \sum_{\nu} m_{\nu} (x_{1\nu}'^2 + x_{2\nu}'^2), & I_{23} &= - \sum_{\nu} m_{\nu} x'_{2\nu} x'_{3\nu} = I_{32}.\end{aligned}$$

Pošto su komponente rotacionog dela momenta impulsa linearne homogene funkcije komponenta ugaone brzine, jasno je da između vektora \vec{M}^{rot} i $\vec{\omega}$ postoji tenzorska veza

$$\vec{M}^{\text{rot}} = \tilde{\mathcal{I}} \cdot \vec{\omega}, \quad (6.111)$$

gde je

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix}, \quad I_{ij} = \sum_{\nu} m_{\nu} (r_{\nu}^{\prime 2} \delta_{ij} - x'_{i\nu} x'_{j\nu}), \quad (6.112)$$

matrica koja odgovara tzv. **tenzoru inercije** u sistemu $Ax_1x_2x_3$. Ako može da se smatra da je masa kontinualno raspodeljena po zapremini V krutog tela, onda se elementi I_{ij} računaju pomoću zapreminskih integrala:

$$I_{ij} = \int_V \rho (r_{\nu}^{\prime 2} \delta_{ij} - x'_i x'_j) dV, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (6.113)$$

u kojima je ρ gustina krutog tela. Dijagonalni elementi ovog tenzora imaju smisao momenata inercije krutog tela u odnosu na odgovarajuću osu sopstvenog sistema krutog tela, dok vandijagonalni elementi, tzv. *proizvodi inercije* nemaju direktan fizički smisao. Pošto je tenzor inercije simetričan tenzor, sigurno postoji ortonormirani bazis $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ u kome je ovaj tenzor reprezentovan dijagonalnom matricom

$$\tilde{\mathcal{I}} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}, \quad (6.114)$$

gde se svojstvene vrednosti I_i nazivaju *glavnim momentima inercije*, a svojstvene ose *glavnim osama inercije* krutog tela. Ako kruto telo rotira oko jedne od svojih glavnih osa inercije, moment impulsa ima pravac te ose. U ostalim slučajevima moment impulsa nije kolinearan sa osom rotacije krutog tela.

Kinetička energija T krutog tela jednaka je

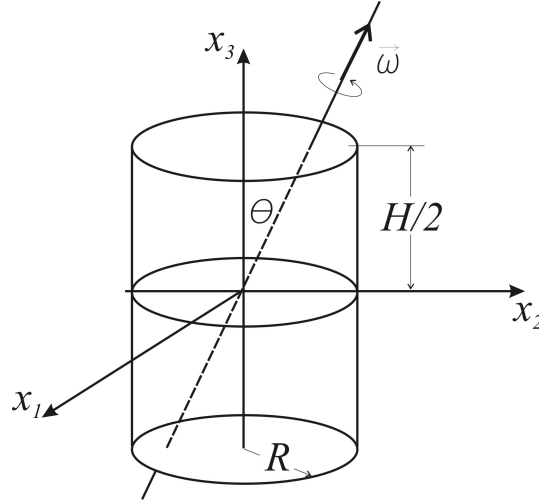
$$T = \sum_{\nu} \frac{1}{2} m_{\nu} \vec{v}_{\nu}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}')^2 = \frac{1}{2} m \vec{v}_A^2 + \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times m \vec{r}_C') + T^{\text{rot}}, \quad (6.115)$$

gde je

$$\begin{aligned} T^{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}')^2 = \frac{1}{2} \sum_{\nu} m_{\nu} \vec{\omega} \cdot (\vec{r}_{\nu}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}')) \\ &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \sum_{\nu} m_{\nu} [\vec{r}_{\nu}' \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}')] = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \tilde{\mathcal{I}} \vec{\omega}. \end{aligned} \quad (6.116)$$

Ako je $\vec{\omega} = \omega \vec{n}$, gde je \vec{n} ort trenutne ose rotacije, onda je

$$T^{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 \vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{I}} \vec{n} = \frac{1}{2} I \omega^2, \quad \text{gde je } I = \sum_{\nu} m_{\nu} (\vec{n} \times \vec{r}_{\nu}')^2$$



Slika 6.18: Cilindar koji rotira ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko ose koja zaklapa ugao θ sa njegovom osom simetrije.

moment inercije krutog tela oko ose čiji je ort \vec{n} , što se lako pokazuje. Konačno zaključujemo da moment inercije krutog tela u odnosu na osu određenu ortom \vec{n} može pomoću tenzora inercije $\tilde{\mathcal{I}}$ da se izračuna korišćenjem formule

$$I = \vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{I}} \vec{n}. \quad (6.117)$$

Da bi se ova formula primenila potrebno je znati matricu koja reprezentuje tenzor inercije u nekom sopstvenom koordinatnom sistemu krutog tela, kao i komponente orta \vec{n} u tom istom sistemu. Ukoliko se radi o homogenom krutom telu, koje ima neku vrstu geometrijske simetrije, onda je najzgodnije za sopstveni sistem izabrati sistem u kome je neka od osa upravo osa simetrije tela. Kako se primenjuje formula (6.117) demonstriraćemo kroz sledeći primer.

Primer 6.6.1. Nađimo matricu koja odgovara tenzoru inercije homogenog kružnog cilindra, poluprečnika osnove R , visine H i mase m . Zbog homogenosti i simetrije cilindra, za sopstveni koordinatni sistem izabraćemo sistem u kome se osa x_3 poklapa sa osom cilindra (slika 6.18). Osim toga, za koordinatni početak (pol) uzećemo centar mase cilindra.

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mH^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mH^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}mR^2 \end{pmatrix} \quad (6.118)$$

Dakle, kao što smo zbog simetrije mogli i da očekujemo, izabrane ose su glavne ose inercije, a nađeni elementi $I_{11} = I_{22} = I_1 = I_2$ i $I_{33} = I_3$ su glavni momenti inercije cilindra.¹ Jasno je i da glavne ose u ravni x_1x_2 potpuno proizvoljno mogu da se izaberu, tj. svaka osa u toj ravni je glavna osa inercije.

¹ Ovakva kruta tela, čija dva glavna momenta inercije imaju istu vrednost (dvostruko degenerisana svojstvena vrednost) nazivaju se *dinamički simetrična tela*. Ukoliko se sva tri glavna momenta poklapaju, kaže se da je telo *potpuno dinamički simetrično* - primeri za to su homogena lopta i homogena kocka, u odnosu na sistem čiji je početak u njihovom centru mase. Za takva tela bilo koja osa koja predstavlja glavnu osu inercije.

Razmotrimo dalje rotaciju ovog cilindra ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko ose koja prolazi kroz centar mase i sa osom simetrije cilindra zaklapa ugao θ . Ort ove ose u izabranom sopstvenom koordinatnom sistemu ima oblik

$$\vec{n} = \cos \theta \vec{e}_3 + \sin \theta (\cos \alpha \vec{e}_1 + \sin \alpha \vec{e}_2),$$

gde je α ugao koji projekcija orta \vec{n} na ravan x_1x_2 zaklapa sa osom x_1 . Prema formuli (6.117) moment inercije I u odnosu na ovu osu jednak je

$$\begin{aligned} I &= \begin{pmatrix} \cos \alpha \sin \theta & \sin \alpha \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \alpha \\ \sin \theta \sin \alpha \\ \cos \theta \end{pmatrix} \\ &= I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta = \left(\frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m H^2 \right) \sin^2 \theta + \frac{1}{2} m R^2 \cos^2 \theta. \end{aligned}$$

Moment impulsa cilindra je u ovom slučaju jednak

$$\vec{M} = \mathcal{I} \vec{\omega} = \omega \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_1 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \alpha \\ \sin \theta \sin \alpha \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} I_1 \sin \theta \cos \alpha \\ I_1 \sin \theta \sin \alpha \\ I_3 \cos \theta \end{pmatrix}$$

odakle se jasno vidi da \vec{M} i $\vec{\omega}$ nisu kolinearni vektori. Štaviše, ugao između ova dva vektor može eksplicitno i da se izračuna:

$$\cos \angle(\vec{M}, \vec{\omega}) = \frac{\vec{M} \cdot \vec{\omega}}{|\vec{M}| |\vec{\omega}|} = \frac{I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta}{\sqrt{I_1^2 \sin^2 \theta + I_3^2 \cos^2 \theta}}.$$

Kinetička energija cilindra jednaka je

$$T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathcal{I} \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{M} = \frac{1}{2} \omega^2 (I_1 \sin^2 \theta + I_3 \cos^2 \theta).$$

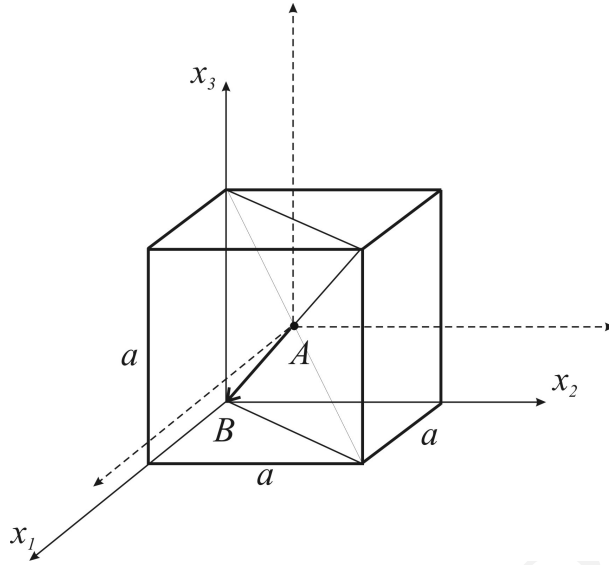
Generalisana Štajnerova teorema

Iz definicije tenzora inercije je jasno da matrica koja mu odgovara zavisi od toga kako su orijentisane ose sopstvenog sistema tela, ali takođe i od izbora pola. Pri promeni orijentacije osa matrica se transformiše shodno zakonu transformacije tenzora u trodimenzionalnom euklidskom prostoru. Naravno, obično se nastoji da se pri izboru osa iskoristi simetrija tela, kao u prethodnom primeru sa cilindrom. Prilikom promene pola krutog tela, a kada se orijentacija osa ne menja, elementi tenzora inercije transformišu se na sledeći način. Označimo sa I_{ij}^A elemente tenzora inercije izračunate u odnosu na sopstveni sistem $Ax_1x_2x_3$, a sa I_{ij}^B njegove elemente, računane u odnosu na sistem koji se dobija translatornim pomeranjem $Ax_1x_2x_3$ za vektor $\vec{AB} = d_1 \vec{e}_1 + d_2 \vec{e}_2 + d_3 \vec{e}_3$. Pošto su radijus vektori ν -te tačke krutog tela u odnosu na polove A i B povezani relacijom

$$\vec{r}_\nu^A = \vec{AB} + \vec{r}_\nu^B,$$

po definiciji tenzora inercije dobija se

$$\begin{aligned} I_{ij}^B &= \sum_\nu m_\nu [\delta_{ij} (r_\nu^B)^2 - x_{i\nu}^B x_{j\nu}^B] = \sum_\nu m_\nu [\delta_{ij} (\vec{r}_\nu^A - \vec{AB})^2 - (x_{i\nu}^A - d_i)(x_{j\nu}^A - d_j)] \\ &= I_{ij}^A + \delta_{ij} m (d^2 - 2 \vec{AB} \cdot \vec{r}_C^A) + m (d_i x_{jC}^A + d_j x_{iC}^A - d_i d_j), \end{aligned}$$



Slika 6.19: Primena generalisane Štajnerove teoreme (primer 6.6.2).

gde je \vec{r}_C^A radijus vektor centra mase krutog tela u odnosu na pol A . Ova veza između I_{ij}^A i I_{ij}^B pojednostavljuje se ako je tačka A upravo centar mase. Ako za taj slučaj uvedemo oznake $I_{ij}^A \equiv I_{ij}^*$ i $I_{ij}^B \equiv I_{ij}$ dobijamo relacije

$$I_{ij} = I_{ij}^* + m(\delta_{ij}d^2 - d_i d_j), \quad (6.119)$$

koje mogu da se shvate kao **generalizacija Štajnerove teoreme**. Naime, za dijagonalne elemente, tj. kada je $i = j$ dobijamo

$$I_{ii} = I_{ii}^* + m(d^2 - d_i^2),$$

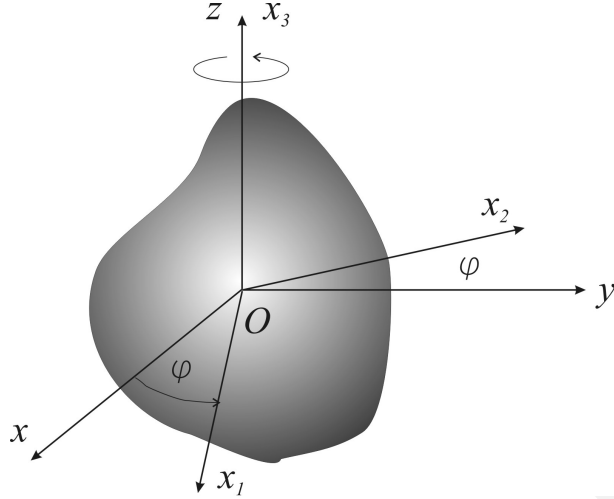
što upravo jeste Štajnerova teorema, pošto $d^2 - d_i^2$ predstavlja kvadrat najkraćeg rastojanja između pravih paralelnih osi x_i provučenih kroz centar mase (tačka A) i pol B . Slično, za proizvode inercije dobija se veza $I_{ij} = I_{ij}^* - m d_i d_j$, $i \neq j$.

Primer 6.6.2. Izračunajmo elemente tenzora inercije za homogenu kocku (mase m i ivice a) u odnosu na sopstveni sistem čiji je pol u jednom njenom temenu, a ivice koje prolaze kroz to teme određuju pravce koordinatnih osa (slika 6.19). Zbog simetrije i homogenosti kocke, ako se za pol izabere centar mase, tj. centar kocke, a za ose sopstvenog sistema ose paralelne ivicama kocke, vandijagonalni elementi su svi jednaki nuli, a dijagonalni su svi jednaki i iznose

$$I_{11}^* = I_{22}^* = I_{33}^* = \int_V dV \rho (x_1^2 + x_2^2) = \frac{m}{a^3} \int_{-a/2}^{a/2} dx_1 \int_{-a/2}^{a/2} dx_2 \int_{-a/2}^{a/2} dx_3 (x_1^2 + x_2^2) = \frac{1}{6} m a^2,$$

pa je

$$\mathcal{I}^* = \frac{1}{6} m a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$



Slika 6.20: Rotacija oko fiksirane ose Oz . Pol krutog tela je izabran na fiksiranoj osi, upravo u koordinatnom početku O , sopstvena osa Ox_3 se poklapa sa osom Oz , a ose Ox_1 i Ox_2 rotiraju u ravni Oxy ugaonom brzinom $\dot{\varphi}$.

Primenom generalisane Štajnerove teoreme (6.119), imajući u vidu da je $d_1 = d_2 = d_3 = -a/2$, direktno se dobija

$$\mathcal{I} = ma^2 \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

6.6.5 Rotacija oko fiksirane ose

Razmotrimo rotaciju krutog tela oko fiksirane ose, kao najjednostavniji dinamički problem u kome se kruto telo rotaciono kreće. Ne smanjujući opštost, za pol krutog tela izaberimo tačku na osi rotacije i neka to istovremeno bude i koordinatni početak O laboratorijskog sistema, a ose Oz i Ox_3 neka se poklapaju sa osom rotacije. Ovde se očigledno radi o kretanju sa jednim stepenom slobode i za generalisanu koordinatu je zgodno izabrati ugao rotacije φ oko ose rotacije. Ugaona brzina rotacije je onda jednaka $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z = \dot{\varphi} \vec{e}_3$. Moment impulsa krutog tela u odnosu na koordinatni početak jednak je

$$\vec{M}^{(O)} = \tilde{\mathcal{I}} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\varphi} \end{pmatrix} = \dot{\varphi} (I_{13} \vec{e}_1 + I_{23} \vec{e}_2 + I_{33} \vec{e}_3).$$

Ako dalje primenimo zakon momenta impulsa sledi

$$\vec{K}^{(O)} = \frac{d\vec{M}^{(O)}}{dt} = \ddot{\varphi} (I_{13} \vec{e}_1 + I_{23} \vec{e}_2 + I_{33} \vec{e}_3) + \dot{\varphi} \left(I_{13} \frac{d\vec{e}_1}{dt} + I_{23} \frac{d\vec{e}_2}{dt} + I_{33} \frac{d\vec{e}_3}{dt} \right).$$

Skalarnim množenjem ove jednačine ortom $\vec{e}_z = \vec{e}_3$ dobijamo jednačinu

$$\vec{e}_z \cdot \vec{K}^{(O)} = I_{33} \ddot{\varphi},$$

gde smo iskoristili konstantnost orta \vec{e}_3 zbog čega je $\frac{d\vec{e}_3}{dt} = 0$, kao i činjenicu da vektori $\frac{d\vec{e}_1}{dt}$ i $\frac{d\vec{e}_2}{dt}$ nemaju z komponente (gledano iz laboratorijskog sistema ortovi \vec{e}_1 i \vec{e}_2 menjaju se zbog rotacije krutog tela oko Oz ose, ali pri tome stalno ostaju u ravni Oxy). Ako uvedemo oznake $I_{33} = I$ i $\vec{e}_z \cdot \vec{K}^{(O)} = K_z$, onda ova jednačina dobija dobro poznati oblik:

$$I\ddot{\varphi} = K_z, \quad (6.120)$$

gde je, dakle, I moment inercije krutog tela oko fiksirane ose rotacije, a K_z projekcija ukupnog spoljašnjeg momenta sila na osu rotacije.

Fizičko klatno

Pod fizičkim klatnom podrazumevamo kruto telo koje u homogenom gravitacionom polju rotira oko fiksirane horizontalne ose. Moment spoljašnjih sila u ovom slučaju potiče samo od sile gravitacije i jednak je

$$\vec{K}^{(O)} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{g} = \left(\sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu} \right) \times \vec{g} = m \vec{r}_C \times \vec{g},$$

gde je m masa krutog tela, a \vec{r}_C radijus vektor centra mase u odnosu na izabranu tačku O na osi rotacije, pa je

$$\vec{e}_z \cdot \vec{K}^{(O)} = m \vec{e}_z \cdot (\vec{r}_C \times \vec{g}) = m \vec{r}_C \cdot (\vec{g} \times \vec{e}_z) = -mgy_C.$$

Centar mase rotira oko horizontalne Oz ose, pa, ne smanjujući opštost možemo da uzmemo da je $\vec{r}_C = d\vec{e}_1 + a_3\vec{e}_3$, $d = \text{const}$, $a_3 = \text{const}$, što odgovara takvom izboru osa sopstvenog sistema krutog tela pri kome centar mase leži na Ox_1 , a d je onda najkraće rastojanje od centra mase do ose rotacije. Odatle je $y_C = \vec{e}_y \cdot \vec{r}_C = d\vec{e}_y \cdot \vec{e}_1 = d \sin \varphi$, pošto je ugao između Ox i Ox_1 ose po definiciji φ . Konačno, zamenom u opštu jednačinu (6.120) za rotaciju oko fiksirane ose sledi diferencijalna jednačina kretanja fizičkog klatna:

$$\ddot{\varphi} + \frac{gmd}{I} \sin \varphi = 0,$$

koja ima isti oblik kao i jednačina matematičkog klatna (6.4), samo je konstanta koja množi $\sin \varphi$ drukčija. Na osnovu ove formalne analogije mogu se izvoditi slični zaključci o kretanju fizičkog klatna u zavisnosti od njegove ukupne energije, kao i u slučaju matematičkog klatna. ... slika....

U složenijim slučajevima dinamika kretanja krutog tela uvek može da se analizira pomoću teorema impulsa i momenta impulsa. Ako je ukupna spoljašnja sila koja deluje na kruto telo jednaka \vec{F} , a ukupni moment spoljašnjih sila u odnosu na koordinatni početak laboratorijskog sistema $\vec{K}^{(O)}$, onda sigurno važe jednačine

$$m \frac{d\vec{v}_C}{dt} = \vec{F} \quad \text{i} \quad \frac{d\vec{M}^{(O)}}{dt} = \vec{K}^{(O)},$$

gde je m masa krutog tela, a $\vec{M}^{(O)}$ moment impulsa krutog tela u odnosu na O . Obično je, međutim, momente zgodnije računati u odnosu na pol krutog tela, nego u odnosu na tačku O , pa je zato potrebno jednačinu momenta impulsa transformisati tako da se u njoj pojave upravo momenti u odnosu na pol A . Pošto je $\vec{r}_{\nu} = \vec{r}_A + \vec{r}_{\nu}'$, moment impulsa možemo da prepisemo kao

$$\vec{M}^{(O)} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu} \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \sum_{\nu} (\vec{r}_A + \vec{r}_{\nu}') \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \sum_{\nu} \vec{r}_A \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} + \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu},$$

odakle, ako iskoristimo definiciju centra mase, dobijamo izraz

$$\vec{M}^{(O)} = \vec{r}_A \times m\vec{v}_C + \vec{M}^{(A)}, \quad (6.121)$$

gde je $\vec{M}^{(A)}$ moment impulsa krutog tela u odnosu na pol A . Dalje je

$$\frac{d\vec{M}^{(O)}}{dt} = \vec{v}_A \times m\vec{v}_C + \vec{r}_A \times m \frac{d\vec{v}_C}{dt} + \frac{d\vec{M}^{(A)}}{dt},$$

odnosno, ako se iskoristi teorema impulsa:

$$\frac{d\vec{M}^{(O)}}{dt} = \vec{v}_A \times m\vec{v}_C + \vec{r}_A \times \vec{F} + \frac{d\vec{M}^{(A)}}{dt}. \quad (6.122)$$

S druge strane, ako sa \vec{F}_ν označimo spoljašnju silu koja deluje na ν -ti delić krutog tela, ukupni moment spoljašnjih sila može da se napiše kao

$$\vec{K}^{(O)} = \sum_{\nu} \vec{r}_\nu \times \vec{F}_\nu = \sum_{\nu} (\vec{r}_A + \vec{r}_\nu') \times \vec{F}_\nu = \vec{r}_A \times \vec{F} + \sum_{\nu} \vec{r}_\nu' \times \vec{F}_\nu,$$

odnosno

$$\vec{K}^{(O)} = \vec{r}_A \times \vec{F} + \vec{K}^{(A)}, \quad (6.123)$$

gde je $\vec{K}^{(A)}$ ukupni moment spoljašnjih sila u odnosu na pol A . Ako se dobijeni izrazi (6.122) i (6.123) zamene u teoremu impulsa (napisanu u odnosu na koordinatni početak laboratorijskog sistem) direktno sledi jednačina

$$\vec{K}^{(A)} = \vec{v}_A \times m\vec{v}_C + \frac{d\vec{M}^{(A)}}{dt}. \quad (6.124)$$

Poslednja jednačina, u kombinaciji sa teoremom impulsa, obično je pogodnija za analizu kretanja krutog tela, nego teorema momenta impulsa napisana u odnosu na koordinatni početak O laboratorijskog sistema. Iz nje se, takođe, vidi da ako za pol izaberemo centar mase dobijamo jednačinu koja ima isti oblik kao i teorema momenta impulsa u odnosu na O , tj.

$$\frac{d\vec{M}^{(C)}}{dt} = \vec{K}^{(C)}. \quad (6.125)$$

Naravno, kada god je $\vec{v}_A \times \vec{v}_C = 0$, takođe važi $\frac{d\vec{M}^{(A)}}{dt} = \vec{K}^{(A)}$.

6.6.6 Koriolisova teorema

Neka je \vec{C} vektor koji se ne menja u sopstvenom sistemu krutog tela. Za posmatrača iz laboratorijskog sistema ovaj vektor se u toku infinitezimalno kratkog vremenskog intervala dt promeni za $d\vec{C} = d\vec{\alpha} \times \vec{C}$, pa je

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{C}. \quad (6.126)$$

Neka je $\vec{G}(t) = G_1(t)\vec{e}_1 + G_2(t)\vec{e}_2 + G_3(t)\vec{e}_3$ bilo kakva vektorska veličina. Za posmatrača iz laboratorijskog sistema brzina njene promene jednaka je

$$\frac{d\vec{G}(t)}{dt} = \frac{dG_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt}\vec{e}_3 + G_1(t)\frac{d\vec{e}_1}{dt} + G_2(t)\frac{d\vec{e}_2}{dt} + G_3(t)\frac{d\vec{e}_3}{dt}. \quad (6.127)$$

Pošto se vektori \vec{e}_i u sopstvenom sistemu krutog tela ne menjaju (kao Dekartovi koordinatni ortovi), na njih se može primeniti formula (6.126), pa je

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{G}(t)}{dt} &= \frac{dG_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt}\vec{e}_3 + G_1(t)\vec{\omega} \times \vec{e}_1 + G_2(t)\vec{\omega} \times \vec{e}_2 + G_3(t)\vec{\omega} \times \vec{e}_3 \\ &= \frac{dG_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt}\vec{e}_3 + \vec{\omega} \times \vec{G}(t). \end{aligned}$$

Kako je brzina promene veličine $\vec{G}(t)$ u sopstvenom sistemu jednaka

$$\left(\frac{d\vec{G}(t)}{dt}\right)^{\text{rel}} = \frac{dG_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dG_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dG_3}{dt}\vec{e}_3, \quad (6.128)$$

njegovu brzinu promene u laboratorijskom sistemu možemo da napišemo kao

$$\left(\frac{d\vec{G}(t)}{dt}\right)^{\text{aps}} = \left(\frac{d\vec{G}(t)}{dt}\right)^{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{G}(t). \quad (6.129)$$

Ovaj rezultat poznat je kao **Koriolisova teorema**, a u njemu smo oznakama „aps” i „rel” označili redom brzinu promene veličine \vec{G} u laboratorijskom i sopstvenom sistemu krutog tela.

Ubrzanje delića krutog tela

Pomoću Koriolisove teoreme može da se nađe izraz za ubrzanje proizvoljne tačke ν krutog tela, na sledeći način:

$$\vec{a}_\nu = \frac{d\vec{v}_\nu}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}_\nu') = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu'). \quad (6.130)$$

Pošto je $\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A$ ubrzanje pola A i

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu') = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r}_\nu' + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}_\nu'}{dt} = \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_\nu' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu'),$$

vraćanjem ovih izraza u (6.130) dobija se

$$\vec{a}_\nu = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_\nu' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\nu'). \quad (6.131)$$

Osnovna jednačina dinamike u neinercijalnom sistemu

Razmotrimo kretanje materijalne tačke mase m u odnosu na proizvoljan, u opštem slučaju neinercijalan referentni sistem S' , koji može da se zamisli kao sistem vezan za neko kruto telo koje

se kreće na proizvoljan način. Znamo da u inercijalnom sistemu S osnovna jednačina dinamike ima oblik

$$m\vec{a} = \vec{F}, \quad (6.132)$$

gde je \vec{F} ukupna sila koja deluje na materijalnu tačku, i koja potiče od njene interakcije sa drugim telima. Pomoću Koriolisove teoreme može da se nađe veza između ubrzanja \vec{a} materijalne tačke u sistemu S i njenog ubrzanja \vec{a}' u neinercijalnom sistemu S' , polazeći od relacije između radijus vektora tačke u sistemu S i S' :

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}',$$

gde smo sa A označili koordinatni početak u sistemu S' . Odavde dalje sledi

$$\vec{v} = \vec{v}_A + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)^{\text{aps}} = \vec{v}_A + \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)^{\text{rel}} + \vec{\omega} \times \vec{r}',$$

gde smo oznakom „aps” i „rel”, kao i ranije, označili brzine promena u odnosu na sisteme S i S' , redom. Pošto je brzina tačke u sistemu S' (tzv. *relativna brzina*) po definiciji jednaka

$$\vec{v}' = \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)^{\text{rel}},$$

veza između \vec{v} i \vec{v}' dobija oblik

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'. \quad (6.133)$$

U ovom izrazu deo $(\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}')$ prepoznavamo kao brzinu tačke krutog tela za koje je vezan sistem S' , a koja se nalazi na mestu određenom radijus vektorom \vec{r}' , tj. tačno tamo gde je i materijalna tačka. Zato je uobičajeno da se prethodna relacija piše u obliku

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_{\text{pr}},$$

gde je

$$\vec{v}_{\text{pr}} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'$$

tzv. *prenosna brzina*. Za ubrzanje \vec{a} se iz (6.133) dobija

$$\vec{a} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \right)^{\text{aps}} = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)^{\text{aps}} + \left(\frac{d\vec{v}_{\text{pr}}}{dt} \right)^{\text{aps}} = \vec{a}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \left(\frac{d\vec{v}_{\text{pr}}}{dt} \right)^{\text{aps}},$$

gde je

$$\vec{a}' = \left(\frac{d\vec{v}'}{dt} \right)^{\text{rel}}$$

relativno ubrzanje, tj. ubrzanje materijalne tačke u sistemu S' , a

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\vec{v}_{\text{pr}}}{dt} \right)^{\text{aps}} &= \vec{a}_A + \left(\frac{d(\vec{\omega} \times \vec{r}')}{dt} \right)^{\text{aps}} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \left(\frac{d\vec{r}'}{dt} \right)^{\text{aps}} \\ &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{v}' + \vec{\omega} \times \vec{r}') \\ &= \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}'). \end{aligned}$$

Dalje sledi:

$$\vec{a} = \vec{a}' + 2\vec{\omega} \times \vec{v}' + \vec{a}_{\text{pr}}, \quad (6.134)$$

gde je

$$\vec{a}_{\text{pr}} = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}' + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}') \quad (6.135)$$

prenosno ubrzanje, tj. ubrzanje delića krutog tela vezanog za S' koji se nalazi na istom mestu gde je i materijalna tačka.

Zamenom dobijenog izraza (6.134) za apsolutno ubrzanje \vec{a} u izraz za dinamičku silu $m\vec{a}$ u (6.132) direktno sledi osnovna jednačina dinamike u neinercijalnom sistemu S' :

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{a}_{\text{pr}} - 2m\vec{\omega} \times \vec{v}'. \quad (6.136)$$

Druga dva člana u izrazu sa desne strane ove jednačine ne potiču od interakcije među telima, dakle nisu prave sile, već su to tzv. *inercijalne sile*, koje su se pojavile usled neinercijalnosti sistema S' i predstavljaju tzv. *inercijalne sile*. Izraz $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}'$ predstavlja tzv. *Koriolisovu silu*, a član $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}')$, koji se javlja u $-m\vec{a}_{\text{pr}}$ je *centrifugalna sila*.

6.6.7 Ojlerove jednačine za kruto telo

Ako se u jednačini (6.125)

$$\vec{K}^{(C)} = \frac{d\vec{M}^{(C)}}{dt},$$

primeni Koriolisova teorema na izvod sa desne strane (koji predstavlja brzinu promene momenta impulsa merenu iz laboratorijskog sistema) dobija se jednačina

$$\left(\frac{d\vec{M}^{(C)}}{dt} \right)^{\text{rel}} = \vec{K}^{(C)} - \vec{\omega} \times \vec{M}^{(C)}. \quad (6.137)$$

Moment impulsa krutog tela računat u odnosu na njegov centar mase jednak je

$$\begin{aligned} \vec{M}^{(C)} &= \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \times m_{\nu} \vec{v}_{\nu} = \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \times m_{\nu} (\vec{v}_C + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}') = \left(\sum_{\nu} m_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \right) \times \vec{v}_C + \sum_{\nu} \vec{r}_{\nu}' \times m_{\nu} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\nu}') \\ &= m\vec{r}_C' + \tilde{\mathcal{I}}^C \vec{\omega} = \tilde{\mathcal{I}}^C \vec{\omega}, \end{aligned}$$

pošto je $\vec{r}_C' = 0$. Ako za Dekartove ose sopstvenog sistema krutog tela izaberemo glavne ose inercije, onda tenzor inercije \mathcal{I}^C u tako izabranom sistemu ima dijagonalni oblik, pa projektovanjem jednačine (6.137) na te ose dobijamo **Ojlerove jednačine** za kruto telo:

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 &= K_1^C, \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= K_2^C, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} - (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 &= K_3^C. \end{aligned} \quad (6.138)$$

Slobodna rotacija dinamički simetričnog tela

Kao ilustraciju primene Ojlerovih jednačina razmotrićemo slučaj slobodne rotacije, $\vec{K}^{(C)} = 0$, dinamički simetričnog krutog tela kod koga je $I_1 = I_2 \neq I_3$. Ojlerove jednačine se za ovakvo kretanje svode na sistem diferencijalnih jednačina

$$\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (I_1 - I_3)\omega_2\omega_3 &= 0, \\ I_1 \frac{d\omega_2}{dt} - (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 &= 0, \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine sledi da je $\omega_3 = \text{const}$, a onda diferenciranjem prve jednačine po vremenu dobijamo

$$I_1 \frac{d^2\omega_1}{dt^2} - (I_1 - I_3)\omega_3 \frac{d\omega_2}{dt} = 0,$$

koja, zamenom $\frac{d\omega_2}{dt}$ iz druge jednačine, dobija oblik

$$\frac{d^2\omega_1}{dt^2} + \left[\frac{(I_1 - I_3)}{I_1} \omega_3 \right]^2 \omega_1 = 0.$$

Dobijena jednačina ima oblik jednačine linearnog harmonijskog oscilatora, pa je njeno rešenje

$$\omega_1(t) = A \cos(\Omega t + \alpha),$$

gde je

$$\Omega^2 = \left[\frac{I_1 - I_3}{I_1} \omega_3 \right]^2,$$

a A i α su konstante, koje se određuju iz početnih uslova. Pošto je iz prve Ojlerove jednačine

$$\omega_2 = \frac{1}{\omega_3} \frac{I_1}{I_1 - I_3} \frac{d\omega_1}{dt},$$

zamenom prethodno dobijenog izraza za ω_1 direktno sledi:

$$\omega_2(t) = A \sin(\Omega t + \alpha).$$

Iz dobijenih izraza za ω_1 , ω_2 i ω_3 sledi da vektor ugaone brzine $\vec{\omega}$ precesira oko ose x_3 ugaonom brzinom Ω Ovde jos treba ubaciti sliku i kako sve to izgleda iz laboratorijskog sistem, takodje reci nesto o Chandler wobble... [4, 5, 6]

6.6.8 Analitički metod u dinamici krutog tela

Kao što je već rečeno, slobodno kruto telo ima šest stepeni slobode, a za generalisane koordinate je zgodno uzeti Dekartove koordinate pola A krutog tela x_A, y_A, z_A i Ojlerove uglove φ, θ i ψ . Rad pri elementarnom pomeranju slobodnog krutog tela je onda jednak

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} &= \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot \vec{v}_{\nu} dt = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot (\vec{v}_A + \vec{\omega} \times \vec{r}'_{\nu}) dt = \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot \vec{v}_A dt + \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\nu}) dt \\ &= \vec{F} \cdot \vec{v}_A dt + \vec{\omega} \cdot \sum_{\nu} \vec{r}'_{\nu} \times \vec{F}_{\nu} dt = F_x dx_A + F_y dy_A + F_z dz_A + \vec{\omega} \cdot \vec{K}^{(A)} dt. \end{aligned}$$

Pošto je

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_z + \dot{\theta}\vec{e}_N + \dot{\psi}\vec{e}_3,$$

konačno se za elementarni rad dobija izraz

$$F_x dx_A + F_y dy_A + F_z dz_A + K_z^{(A)} d\varphi + \left(\vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_N \right) d\theta + \left(\vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_3 \right) d\psi,$$

gde su \vec{F} i $\vec{K}^{(A)}$ ukupna spoljašnja sila i ukupni moment spoljašnjih sila, koje deluju na kruto telo, što znači da su generalisane sile

$$\begin{aligned} Q_{x_A} &= F_x, & Q_{y_A} &= F_y, & Q_{z_A} &= F_z, \\ Q_{\varphi} &= K_z^{(A)}, & Q_{\theta} &= \vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_N, & Q_{\psi} &= \vec{K}^{(A)} \cdot \vec{e}_3. \end{aligned} \quad (6.139)$$

Sile interakcije koje deluju između čestica krutog tela ovde tretiramo kao sile reakcije. Nije teško zaključiti da se radi o idealnim silama reakcije. Naime, pošto su odgovarajuće veze stacionarne, dovoljno je ispitati da li je ukupni rad ovih sila na mogućem pomeranju jednak nuli. Po definiciji je taj rad jednak

$$\begin{aligned} \sum_{\nu} \vec{F}_{\nu}^{\text{unutr}} \cdot d\vec{r}_{\nu} &= \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} + \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\nu\mu} \cdot d\vec{r}_{\mu} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\nu} - \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d\vec{r}_{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \vec{F}_{\mu\nu} \cdot d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}), \end{aligned}$$

gde smo iskoristili zakon akcije–reakcije. Pošto je sila $\vec{F}_{\mu\nu}$ interakcije između proizvoljne dve čestice krutog tela kolinearna sa relativnim radijus-vektorom $\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}$ (prema postulatima sile), dalje je traženi rad jednak

$$\frac{1}{2} \sum_{\nu, \mu} \frac{F_{\mu\nu}}{|\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}|} (\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}) \cdot d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}) = \frac{1}{4} \sum_{\nu, \mu} \frac{F_{\mu\nu}}{|\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu}|} d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu})^2.$$

Međutim, rastojanje između bilo koje dve čestice krutog tela se ne menja pri kretanju, pa je

$$d(\vec{r}_{\nu} - \vec{r}_{\mu})^2 = 0,$$

tj. rad sila reakcije na mogućem pomeranju jednak je nuli, pa se zaista radi o idealnim silama reakcije, što znači da su pri slobodnom kretanju krutog tela zadovoljene Lagranževe jednačine u svom osnovnom obliku:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial T}{\partial x_A} &= Q_{x_A}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial T}{\partial y_A} &= Q_{y_A}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{z}_A} - \frac{\partial T}{\partial z_A} &= Q_{z_A}, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial T}{\partial \varphi} &= Q_{\varphi}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial T}{\partial \theta} &= Q_{\theta}, & \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial T}{\partial \psi} &= Q_{\psi}. \end{aligned}$$

Ako su sve spoljašnje sile koje deluju na kruto telo potencijalne, onda se Lagranževe jednačine za kruto telo mogu pisati i u obliku

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_A} - \frac{\partial L}{\partial x_A} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_A} - \frac{\partial L}{\partial y_A} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_A} - \frac{\partial L}{\partial z_A} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} &= 0, & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} - \frac{\partial L}{\partial \psi} &= 0. \end{aligned} \quad (6.140)$$

Ako se za pol izabere centar mase C , onda je kinetička energija jednaka

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2 + \dot{z}_C^2) + \frac{1}{2} \left[I_1(\dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \psi)^2 + I_2(\dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \psi)^2 + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2 \right],$$

pri čemu su Ojlerovi uglovi uvedeni pod pretpostavkom da su ose sistema vezanog za kruto telo glavne ose inercije, a I_1 , I_2 i I_3 su glavni momenti inercije, a lagranžijan je $L = T - U$.

I pri neslobodnom kretanju, ako su sile reakcije idealne, a veze holonomne, mogu se primenjivati Lagranževe jednačine. Često se kod neslobodnog kretanja krutog tela javljaju tzv. uslovi *kotrljanja bez klizanja*, koji odgovaraju kretanju krutog tela po idealno hrapavoj podlozi, pri kome delići krutog tela koji su u neposrednom dodiru sa takvom podlogom ne proklizavaju po njoj. Ovaj uslov se formalno izražava kao jednačina u kojoj se pojavljuju brzine, tj. izvodi generalisanih koordinata, dakle radi se o neholonomnim vezama. U jednostavnijim slučajevima, to su kvazi-neholonomne veze, tj. veze koje se integracijom mogu svesti na holonomne veze, ali to nije opšte pravilo, pa treba biti oprezan sa primenom Lagranževih jednačina na takve sisteme.

Primer.... kotrljanje diska i lopte po ravnoj horizontalnoj podlozi

6.6.9 Kretanje teške simetrične čigre

Razmotrimo kretanje dinamički simetričnog krutog tela kod koga je $I_1 = I_2$, u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, pri kome se njegova najniža tačka ne pomera (slika 6.21). Ako za pol krutog tela izaberemo nepokretnu tačku, koja je istovremeno i koordinatni početak laboratorijskog sistema, a za ose sistema vezanog za kruto telo uzmemo glavne ose inercije, onda kinetička energija tela ima samo rotacioni deo, koji je jednak

$$T = \frac{1}{2} [I_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + I_3\omega^2].$$

Ako dalje iskoristimo izraze (6.108) za komponente ugaone brzine u sopstvenom sistemu krutog tela, kinetička energija dobija oblik

$$T = \frac{1}{2} [I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2], \quad (6.141)$$

a pošto je potencijalna energija $U = mgl \cos \theta$, gde je l rastojanje centra mase od pola, lagranžijan je jednak

$$L = \frac{1}{2} [I_1(\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi})^2] - mgl \cos \theta. \quad (6.142)$$

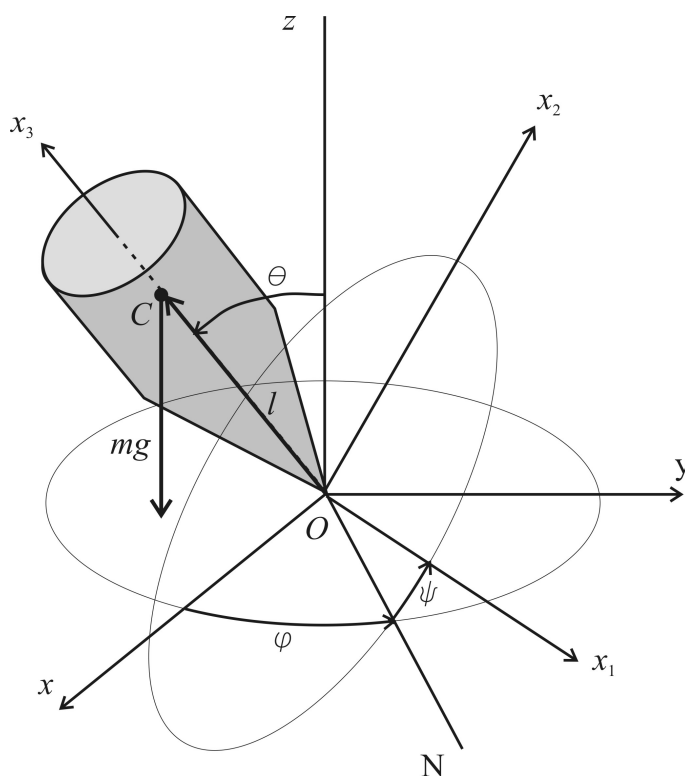
Pošto su generalisane koordinate φ i ψ ciklične, odmah dobijamo dva integrala kretanja

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = I_1 \dot{\varphi} \sin^2 \theta + I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) \cos \theta = \text{const}, \quad (6.143)$$

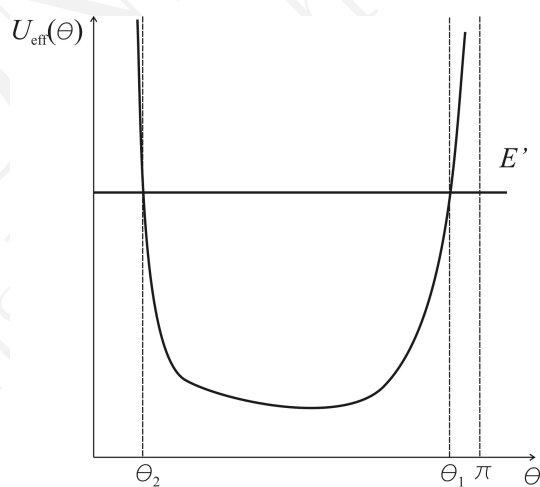
$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = I_3(\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) = \text{const}. \quad (6.144)$$

Pošto je moment gravitacione sile u odnosu na nepokretnu tačku jednak

$$\vec{K} = \vec{l} \times m\vec{g} = lmg\vec{e}_z \times \vec{e}_3,$$



Slika 6.21: Kretanje simetrične čigre u homogenom gravitacionom polju. Najniža tačka čigre se ne pomera.



Slika 6.22: Efektivna potencijalna energija (6.146) teške simetrične čigre sa učvršćenom tačkom.

jasno je da se komponente momenta impulsa duž z i x_3 ose održavaju i lako se proverava da je upravo

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = M_z, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = M_3.$$

Treća Lagranževa jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0,$$

ima eksplicitan oblik

$$I_1 \ddot{\theta} - I_1 \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta + I_3 \dot{\varphi} \sin \theta (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}) - mgl \sin \theta = 0,$$

u kome $\dot{\varphi}$ i $\dot{\psi}$ mogu da se izraze u funkciji ugla θ pomoću integrala $M_3 = \text{const}$ i $M_z = \text{const}$ kao:

$$\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad M_3 = I_3 (\dot{\varphi} \cos \theta + \dot{\psi}).$$

Na taj način ova jednačina dobija oblik

$$\ddot{\theta} + f(\theta) = 0, \tag{6.145}$$

gde je

$$f(\theta) = -\frac{mgl}{I_1} \sin \theta - \frac{\cos \theta (M_z - M_3 \cos \theta)^2}{I_1^2 \sin^3 \theta} + \frac{M_3 M_z - M_3 \cos \theta}{I_1^2 \sin \theta}.$$

Nakon smene $\dot{\theta} = \frac{1}{2} d(\dot{\theta}^2)/d\theta$, iz ove jednačine sledi

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = - \int f(\theta) d\theta,$$

gde integral sa desne strane može da se svede na tablične integrale. Ispostavlja se da je jednačina koja se dobija nakon te integracije ekvivalentna zakonu održanja energije:

$$E = T + U = \frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2 I_1} \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + \frac{M_3^2}{2 I_3} + mgl \cos \theta = \text{const}.$$

Uz oznake

$$E' = E - \frac{M_3^2}{2 I_3}, \quad U_{\text{eff}} = \frac{1}{2 I_1} \frac{(M_z - M_3 \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + mgl \cos \theta, \tag{6.146}$$

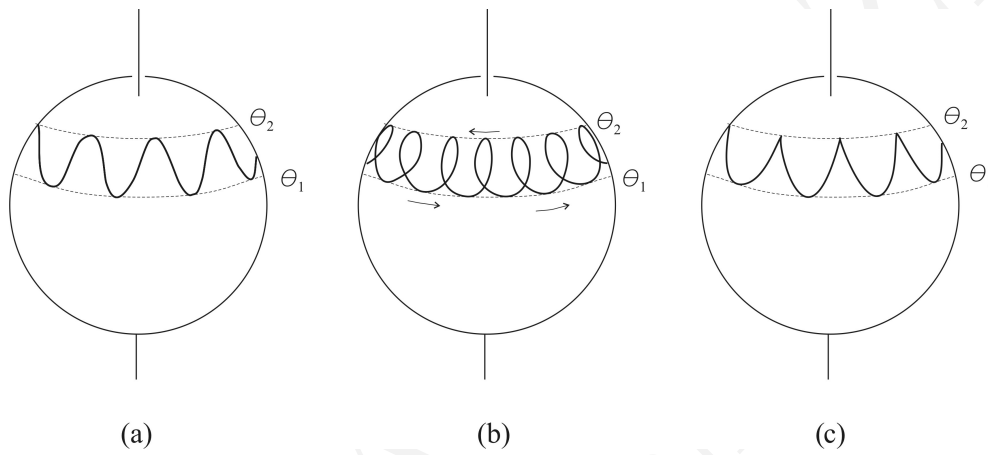
zakon održanja energije može da se prepiše kao

$$\frac{1}{2} I_1 \dot{\theta}^2 + U_{\text{eff}} = E',$$

odakle je

$$t = \int d\theta \left\{ \frac{2[E' - U_{\text{eff}}(\theta)]}{I_1} \right\}^{-1/2},$$

čime je data zavisnost ugla θ od vremena u implicitnom obliku. Integral sa desne strane, međutim, ne može u opštem slučaju da se izrazi preko elementarnih funkcija, ali pomoću energetskog dijagrama kretanje čigre može kvalitativno da se analizira. Funkcija $U_{\text{eff}}(\theta)$ ima oblik kao na slici 6.22, sa koje se vidi da kruto telo vrši tzv. *pseudoregularnu precesiju*, naime njegova glavna osa inercije x_3 obilazi oko z ose (precesira), ali istovremeno i ugao θ između ovih osa osciluje između vrednosti θ_1 i θ_2 , tj. vrši tzv. *nutaciju* (slika 6.23). Odatle se Ojlerovi uglovi često nazivaju: θ -ugao nutacije, φ -ugao precesije, ψ -ugao rotacije.



Slika 6.23: Linija koju osa simetrije čigre x_3 opisuje prolazeći kroz zamišljenu sferu čiji se centar poklapa sa nepokretnom tačkom čigre. Ako $\dot{\varphi} = \frac{M_z - M_3 \cos \theta}{I_1 \sin^2 \theta}$ u toku kretanja ne menja znak, čigra se kreće kao na delu slike (a), dok deo (b) odgovara slučaju kada se znak $\dot{\varphi}$ menja u toku kretanja. Na delu slike (c) prikazan je slučaj kada za $\theta = \theta_2$ vrednost $\dot{\varphi}$ dostiže nulu, a za sve ostale vrednosti $\theta_1 \leq \theta < \theta_2$ ima isti znak [8].

©2010 S. Elezović-Hadžić

RADNA VERZIJA
Teorijska mehanika

Glava 7

Hamiltonov formalizam

7.1 Hamiltonove jednačine

Generalisani impulsi i hamiltonijan

Svakoj generalisanoj koordinati q_i može se pridružiti tzv. **generalisani impuls** p_i koji je po definiciji jednak

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}. \quad (7.1)$$

Položaji i brzine svih čestica nekog sistema (na koji se može primeniti Lagranžev formalizam) mogu da se izraze preko generalisanih koordinata q_i , generalisanih brzina \dot{q}_i i vremena t . Alternativno, iz definicionih jednačina (7.1) generalisane brzine mogu da se izraze u funkciji generalisanih koordinata i impulsa¹, čime se dobijaju relacije

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i(q, p, t), \quad (7.2)$$

gde smo sa q i p kratko označili kompletne skupove generalisanih koordinata i impulsa. Koristeći ove relacije položaje i brzine čestica moguće je izraziti preko ukupno $2n$ generalisanih koordinata q_i i impulsa p_i , i vremena t . Ispostavlja se da je u ovakvom pristupu umesto Lagranževe funkcije, koja je funkcija q, \dot{q} i t , zgodnije raditi sa tzv. **Hamiltonovom funkcijom (hamiltonijanom)**, koji se definiše kao

$$H(q, p, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t), \quad (7.3)$$

gde svaku generalisanu brzinu \dot{q}_i treba izraziti u funkciji q, p i t , kako je i naznačeno.

Kanonske jednačine

Da bismo uvideli u čemu je prednost uvođenja hamiltonijana H u odnosu na lagranžijan L u ovakvom formalizmu, izračunajmo izvode H po q i p (zajedno se ove promenljive zovu **kanonske promenljive**). Iz definicije hamiltonijana (7.3) sledi da je njegov parcijalni izvod po generalisanom

¹Može se pokazati da je u klasičnoj nerelativističkoj mehanici to uvek moguće [1].

impulsu p_i jednak

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial p_i} &= \frac{\partial}{\partial p_i} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q, p, t) \right] - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} \\ &= \dot{q}_i(q, p, t) + \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial p_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}.\end{aligned}$$

Pošto se drugi i treći član u poslednjem izrazu, prema definiciji (7.1), poništavaju, dobijamo

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i(q, p, t). \quad (7.4)$$

Slično, izvod hamiltonijana po generalisanoj koordinati q_i je

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q, p, t) \right] - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}. \quad (7.5)$$

Pošto smo, umesto u Lagranževom formalizmu međusobno nezavisnih promenljivih q_i i \dot{q}_i , u ovom formalizmu (koji ćemo zvati Hamiltonovim) izabrali promenljive q_i i p_i za međusobno nezavisne, važi da je

$$\frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0,$$

pa je

$$\frac{\partial}{\partial q_i} \sum_{j=1}^n p_j \dot{q}_j(q, p, t) = \sum_{j=1}^n p_j \frac{\partial \dot{q}_j(q, p, t)}{\partial q_i}.$$

Vraćanjem ovog izraza u desnu stranu (7.5), zbog definicije generalisanih impulsa dobijamo

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = -\frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (7.6)$$

što je dalje, zbog Lagranževih jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i^*, \quad i = 1, \dots, n.$$

i, ponovo, definicije generalisanih impulsa, jednako

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = Q_i^* - \dot{p}_i.$$

Zajedno se dobijene jednačine

$$\frac{dq_i(q, p, t)}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = Q_i^* - \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (7.7)$$

nazivaju **Hamiltonove (kanonske) jednačine**. Za razliku od Lagranževih jednačina, koje predstavljaju sistem od n običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, Hamiltonove jednačine predstavljaju sistem od $2n$ običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Rešavanjem ovog sistema (za

zadate početne uslove) dobijaju se konačne jednačine kretanja $q_i(t)$ i zavisnost generalisanih impulsa od vremena $p_i(t)$, čime je potpuno određeno *stanje* sistema u svakom trenutku t . Iz samog oblika ovog sistema (izvodi nepoznatih funkcija eksplicitno izraženi preko svih ostalih veličina), jasno je da je njegovo rešenje jednoznačno, odakle ponovo sledi klasični zakon kauzalnosti.

Primer 7.1.1. Generalisani impuls p koji odgovara generalisanoj koordinati x u slučaju linearnog harmonijskog oscilatora, po definiciji je jednak

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \right) = m \dot{x}, \quad (7.8)$$

što odgovara x komponenti vektora impulsa čestice. Odatle je

$$\dot{x}(x, p, t) = \frac{p}{m},$$

pa je hamiltonijan jednak

$$H(p, x, t) = p \dot{x}(x, p, t) - L(x, \dot{x}(x, p, t)) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2.$$

Lako se proverava da je hamiltonijan u ovom slučaju brojno jednak ukupnoj energiji

$$E = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2,$$

a Hamiltonove jednačine (7.7) dobijaju oblik

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad \frac{dp}{dt} = -m \omega^2 x.$$

Prva Hamiltonova jednačina se poklapa sa jednačinom koju smo dobili direktno iz definicije generalisanog impulsa (7.8). U vezi sa konkretnim nalaženjem konačne jednačine kretanja $x(t)$ ovde se može primetiti da nikakvu olakšicu nismo dobili time što smo prešli na sistem od dve diferencijalne jednačine prvog reda. Naime, ovaj sistem se najlakše rešava tako što se prva jednačina diferencira po vremenu, čime se sa desne strane pojavi \dot{p} , koji zatim treba iz druge jednačine zameniti. Tako se ponovo dobija diferencijalna jednačina drugog reda: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, koja se poklapa sa odgovarajućom Lagranževom jednačinom.

Primer 7.1.2. U slučaju matematičkog klatna je generalisani impuls p jednak

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{\partial}{\partial \dot{\varphi}} \left(\frac{1}{2} m R^2 \dot{\varphi}^2 + mgR \cos \varphi \right) = m R^2 \dot{\varphi},$$

odakle je

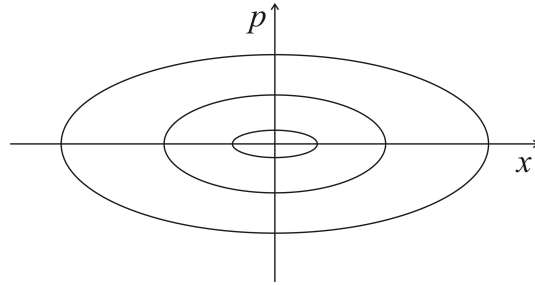
$$\dot{\varphi} = \frac{p}{m R^2},$$

a hamiltonijan

$$H(\varphi, p, t) = \frac{p^2}{2m R^2} - mgR \cos \varphi,$$

što je ponovo brojno jednako ukupnoj energiji. Hamiltonove jednačine (7.7) ovde imaju oblik

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{p}{m R^2}, \quad \frac{dp}{dt} = -mgR \sin \varphi.$$



Slika 7.1: Trajektorija linearnog harmonijskog oscilatora u faznom prostoru je elipsa čije poluose zavise od ukupne energije oscilatora.

Ni u slučaju matematičkog klatna ne dobija se nikakav dobitak u smislu nalaženja konačnih jednačina kretanja, što je uobičajeno za sisteme sa malim brojem stepeni slobode. Međutim, za sisteme sa velikim n , kada se jednačine kretanja obično rešavaju numerički, mnogo je lakše raditi sa sistemima diferencijalnih jednačina prvog, nego drugog reda (makar ih bilo i duplo više), pa tada Hamiltonove jednačine imaju veliku prednost u odnosu na Lagranževe. Suštinske prednosti Hamiltonovog formalizma uočavaju se u drugim oblastima fizike, recimo u statističkoj i kvantnoj fizici.

Formalizam statističke fizike primenjuje se u tzv. **faznom prostoru** [9]. To je prostor dimenzije $2n$ u kome tačka, reprezentovana uređenim skupom generalisanih koordinata i impulsa: $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ određuje stanje sistema. Kretanju sistema odgovara trajektorija koju opisuje tačka

$$(q_1(t), \dots, q_n(t), p_1(t), \dots, p_n(t)).$$

Trajektorije sistema se u faznom prostoru ne seku, jer bi presecanje trajektorija značilo da iz istih početnih uslova (u tački preseka) postoji više trajektorija, što je u suprotnosti sa klasičnom kauzalnošću. Na primer, kako smo pokazali, hamiltonijan linearnog harmonijskog oscilatora brojno je jednak njegovoj ukupnoj energiji, koja se održava, pa je

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 = E = \text{const},$$

što predstavlja jednačinu elipse u faznom prostoru, koji je ovde dvodimenzionalan. Ova elipsa predstavlja trajektoriju oscilatora u faznom prostoru, a njene poluose određene su energijom. Jasno je da se za različite energije dobijaju elipse koje se ne presecaju (slika 7.1).

Osnovni dinamički zakon u kvantnoj mehanici predstavlja Šredingerova jednačina:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi,$$

gde ψ tzv. funkcija stanja kvantnog sistema, a \hat{H} je hermitski operator koji odgovara hamiltonijanu. Operator \hat{H} se formira tako što se u klasični izraz za hamiltonijan, umesto klasičnih generalisanih koordinata i impulsa, stave hermitski operatori koji odgovaraju koordinatama i impulsima [10]. Tako je npr. za linearni harmonijski oscilator $\hat{H} = \hat{p}^2/(2m) + m\omega^2 \hat{x}^2/2$, gde su hermitski operatori \hat{x} i \hat{p} redom tzv. operatori koordinate x i impulsa p .

7.2 Fizički smisao hamiltonijana

Eksplisitnim računom smose uverili je hamiltonijan linearnog harmonijskog oscilatora i matematičkog klatna jednak njihovoj ukupnoj mehaničkoj energiji. Ispitajmo opšte uslove pod kojima je to tačno. Ako u izraz za hamiltonijan (7.3) eksplisitno stavimo $L = T - U$ dobijamo

$$H = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i(q, p, t) - L(q, \dot{q}(q, p, t), t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - T + U. \quad (7.9)$$

Kako smo ranije već pokazali

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j + B_i,$$

gde koeficijenti A_{ij} i B_i potiču iz izraza za kinetičku energiju:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij}(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i \dot{q}_j + \sum_{i=1}^n B_i(q_1, \dots, q_n, t) \dot{q}_i + C(q_1, \dots, q_n, t).$$

Ako poslednja dva izraza vratimo u (7.9), dalje dobijamo da je hamiltonijan brojno jednak izrazu

$$\begin{aligned} H &= \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_j \dot{q}_i + \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - \sum_{i=1}^n B_i \dot{q}_i - C + U \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + U, \end{aligned} \quad (7.10)$$

odakle se vidi da je *hamiltonijan sigurno brojno jednak ukupnoj energiji ako je kinetička energija homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina*. Osim hamiltonijana i lagranžijana, ponekad se razmatra i tzv. **generalisana energija** \mathcal{E} , koja je funkcija generalisanih koordinata i brzina i definiše se kao

$$\mathcal{E}(q, \dot{q}, t) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L. \quad (7.11)$$

Očigledno, generalisana energija je brojno jednaka hamiltonijanu.

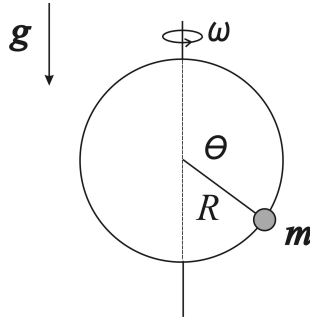
7.3 Integrali kretanja

Drugo zanimljivo pitanje u vezi sa hamiltonijanom je u kojim slučajevima se njegova brojna vrednost ne menja u toku kretanja sistema, tj. kada je hamiltonijan integral kretanja. Totalni izvod H po vremenu jednak je

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t}. \quad (7.12)$$

Ako u sumu u gornjem izrazu, izvode kanonskih promenljivih zamenimo iz Hamiltonovih jednačina dalje dobijamo

$$\frac{dH(q, p, t)}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial H}{\partial p_i} \left(Q_i^* - \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \right] + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^n Q_i^* \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (7.13)$$



Slika 7.2: Tejlorovo klatno.

odnosno, ako još jednom iskoristimo Hamiltonove jednačine, sledi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i. \quad (7.14)$$

Znači, ako hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od vremena i ako je $\sum_{i=1}^n Q_i^* \dot{q}_i = 0$ (što je sigurno tačno ako su sve aktivne sile potencijalne ili giroskopske) onda je sigurno $dH/dt = 0$, tj. hamiltonijan predstavlja integral kretanja.

Primer 7.3.1. Tejlorovo klatno je sistem koji se sastoji od čestice mase m , koja se u homogenom gravitaciom polju kreće po glatkom tankom prstenu poluprečnika R , koji rotira konstantnom ugaonom brzinom ω oko svog vertikalnog prečnika (slika 7.2). Ako se za generalisanu koordinatu izabere sferni ugao θ , kinetička energija dobija oblik

$$T = \frac{1}{2}mR^2(\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2),$$

a potencijalna $U = mgR \cos \theta$. Pošto kinetička energija nije homogena kvadratna funkcija generalisane brzine $\dot{\theta}$, ni generalisana energija

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 - \omega^2 \sin^2 \theta) + mgR \cos \theta,$$

ni hamiltonijan

$$H = \frac{p^2}{2mR^2} - \frac{1}{2}mR^2\omega^2 \sin^2 \theta + mgR \cos \theta,$$

nisu jednaki ukupnoj mehaničkoj energiji

$$E = \frac{1}{2}mR^2(\omega^2 \sin^2 \theta + \dot{\theta}^2) + mgR \cos \theta.$$

S druge strane, nepotencijalnih sila nema, a hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od vremena, što znači da predstavlja integral kretanja, isto kao i generalisana energija. Međutim, ukupna mehanička energija se ne održava, pošto postoji nestacionarna veza $\varphi = \omega t$.

Ciklične koordinate

Ako su sve sile potencijalne, onda cikličnoj koordinati q_i , za koju po definiciji važi $\frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$, prema odgovarajućoj Lagranževnoj jednačini

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

odgovara integral kretanja

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \text{const},$$

tj. *generalisani impuls konjugovan cikličnoj generalisanoj koordinati je integral kretanja*. Iz odgovarajuće Hamiltonove jednačine onda sledi

$$\dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0,$$

što znači da hamiltonijan ne zavisi eksplicitno od ciklične koordinate q_i , tj. H ima oblik

$$H = H(q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n, p_1, \dots, p_{i-1}, \text{const}, p_{i+1}, \dots, p_n, t).$$

Odatle zaključujemo da se u Hamiltonovom formalizmu broj stepeni slobode efektivno smanjuje za broj cikličnih koordinata, kao što je, na primer, bio slučaj kod centralnog kretanja ili kod teške simetrične čigre.

Primer 7.3.2. Lagranžijan u slučaju centralnog kretanja

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - U(r)$$

ne zavisi eksplicitno od koordinate φ , pa je generalisani impuls p_φ konstanta kretanja. Pošto su generalisani impulsi

$$p_r = m\dot{r}, \quad p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = \text{const},$$

hamiltonijan se efektivno svodi na hamiltonijan jednodimenzionalnog sistema:

$$H = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r) = \frac{p_r^2}{2m} + U_{\text{eff}}(r), \quad U_{\text{eff}}(r) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + U(r),$$

sa relevantnim jednačinama

$$\dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{p}_r = -\frac{dU_{\text{eff}}}{dr}.$$

Primer 7.3.3. Iz lagranžijana (6.142) teške simetrične čigre se po definiciji za generalisane impulse nalaze sledeći izrazi

$$\begin{aligned} p_\varphi &= I_1\dot{\varphi}\sin^2\theta + I_3\cos\theta(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}), \\ p_\psi &= I_3(\dot{\varphi}\cos\theta + \dot{\psi}), \\ p_\theta &= I_1\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Ove tri jednačine mogu da se shvate kao sistem od tri linearne algebarske jednačine, čijim rešavanjem se dobijaju generalisane brzine izražene u funkciji generalisanih impulsa:

$$\dot{\varphi} = \frac{p_{\varphi} - \cos \theta p_{\psi}}{I_1 \sin^2 \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{p_{\psi}}{I_3} - \cos \theta \left(\frac{p_{\varphi} - \cos \theta p_{\psi}}{I_1 \sin^2 \theta} \right), \quad \dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{I_1}. \quad (7.15)$$

Pošto je u ovom slučaju hamiltonijan jednak ukupnoj mehaničkoj energiji (kinetička energija je homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina), hamiltonijan nalazimo kao zbir kinetičke energije (6.141), u kojoj smo generalisane brzine izrazili u funkciji generalisanih impulsa, i potencijalne energije $U = mgl \cos \theta$, tako da je

$$H = \frac{(p_{\varphi} - \cos \theta p_{\psi})^2}{2I_1 \sin^2 \theta} + \frac{p_{\theta}^2}{2I_1} + \frac{p_{\psi}^2}{2I_3} + mgl \cos \theta. \quad (7.16)$$

Dobijena funkcija ne zavisi eksplicitno od koordinata φ i ψ , pa iz Hamiltonovih jednačina direktno sledi

$$\dot{p}_{\varphi} = 0, \quad \dot{p}_{\psi} = 0 \quad \Rightarrow \quad p_{\varphi} = \text{const}, \quad p_{\psi} = \text{const}, \quad (7.17)$$

što znači da su u izrazu za hamiltonijan (7.16) jedine promenljive θ i p_{θ} , tj. zaista se efektivno problem sveo na jednodimenzionalni, kome odgovaraju sledeće dve Hamiltonove jednačine:

$$\dot{\theta} = \frac{p_{\theta}}{I_1}, \quad \dot{p}_{\theta} = mgl \sin \theta + \frac{(p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta)^2}{I_1 \sin^3 \theta} - \frac{p_{\psi} p_{\varphi} - p_{\psi} \cos \theta}{I_1 \sin^3 \theta}, \quad (7.18)$$

koje se lako svode na jednu diferencijalnu jednačinu drugog reda po θ , ako se u drugoj jednačini \dot{p}_{θ} zameni sa $I_1 \ddot{\theta}$ (što trivijalno sledi iz prve). Naravno, tako dobijena jednačina poklapa se sa jednačinom (6.145), imajući u vidu da je $p_{\varphi} = M_z$ i $p_{\psi} = M_3$, što se lako proverava.

Poasonove zagrade

Totalni izvod po vremenu proizvoljne funkcije kanonskih promenljivih i vremena $F(q, p, t)$, za sistem sa potencijalnim silama, jednak je

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (7.19)$$

Ako dalje iskoristimo Hamiltonove jednačine (7.7), ovaj izraz postaje

$$\frac{dF}{dt} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (7.20)$$

Uvođenjem tzv. **Poasonove zagrade**, koja se za proizvoljne dve funkcije u i v kanonskih promenljivih definiše kao

$$[u, v] = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial q_i} \frac{\partial v}{\partial p_i} - \frac{\partial u}{\partial p_i} \frac{\partial v}{\partial q_i} \right), \quad (7.21)$$

konačno dobijamo

$$\frac{dF}{dt} = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (7.22)$$

Specijalno ako je $F = q_i$ ili $F = p_i$ dobijamo Hamiltonove jednačine u simetričnom obliku

$$\frac{dq_i}{dt} = [q_i, H], \quad \frac{dp_i}{dt} = [p_i, H]. \quad (7.23)$$

Ovakav oblik Hamiltonovih jednačina posebno je značajan zbog primena u kvantnoj mehanici [10], gde operatori koji odgovaraju koordinatama i impulsima zadovoljavaju jednačine

$$\frac{d\hat{q}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{q}_i, \hat{H}], \quad \frac{d\hat{p}_i}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{p}_i, \hat{H}],$$

pri čemu oznaka „ $[\ , \]$ ” odgovara komutatoru, koji se za dva operatora \hat{u} i \hat{v} definiše kao

$$[\hat{u}, \hat{v}] = \hat{u}\hat{v} - \hat{v}\hat{u}.$$

Pod osnovnim Poasonovim zagradama podrazumevamo zagrade kanonskih promenljivih, tj.

$$[q_i, q_j] = 0, \quad [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \delta_{ij}.$$

Slične relacije važe u kvantnoj mehanici, pri čemu koordinate i impulsi prelaze u odgovarajuće operatore, a Poasonova zagrada u komutator, podeljen sa $i\hbar$.

Ako je neka veličina F integral kretanja, onda prema (7.22) važi

$$0 = [F, H] + \frac{\partial F}{\partial t}. \quad (7.24)$$

Može se pokazati da za integrale kretanja važi **Poasonova teorema**: *Poasonova zagrada dva integrala kretanja je takođe integral kretanja.*

Primer 7.3.4. Lako se proverava da su komponente momenta impulsa M_z i M_3 redom jednake generalisanim impulsima p_φ i p_ψ . Znajući izraz za hamiltonijan čigre (7.16), vidimo da su Poasonove zagrade

$$[M_z, H] = [p_\varphi, H] = 0, \quad [M_3, H] = [p_\psi, H] = 0,$$

što, prema jednačinama (7.22), znači da M_z i M_3 jesu integrali kretanja. Ovo smo, naravno, ranije već utvrdili pomoću zakona momenta impulsa, ali nam ovaj primer ilustruje kako je u okviru Hamiltonovog formalizma moguće ispitati da li je neka fizička veličina integral kretanja, bez pozivanja na osnovne teoreme mehanike i bez eksplicitnog rešavanja diferencijalnih jednačina. U ovakvom pristupu, ispitivanje da li je veličina integral kretanja svodi se na računanje Poasonovih zagrada (tj. parcijalnih izvoda), pod pretpostavkom da nam je poznat izraz za fizičku veličinu koja nas zanima u funkciji kanonskih promenljivih.

7.4 Generalisano potencijalne sile

Osim običnih potencijalnih generalisanih sila, koje zavise od generalisanih koordinata i, eventualno, vremena, postoje i tzv. **generalisano potencijalne generalisane sile**, koje zavise i od brzina, a mogu se izraziti preko **generalisanog potencijala** $V(q, \dot{q}, t)$ kao

$$Q_i = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (7.25)$$

Ako se u osnovnom obliku Lagranževih jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i,$$

generalisane sile razdvoje na generalisano potencijalne i „ostatak” Q'_i , tj. napišu kao

$$Q_i = Q'_i + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_i},$$

lako se proverava da jednačine ponovo mogu da se napišu u standardnom obliku

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q'_i,$$

gde je sada $L = T - V$, a Q'_i deo generalisanih sila koji ne može da se izrazi pomoću generalisanog potencijala (jasno je da su obične potencijalne sile specijalan slučaj generalisano potencijalnih). Slično, ako se sa ovakvim lagranžijanom definiše hamiltonijan, lako se pokazuje da i Hamiltonove jednačine zadržavaju isti oblik. Takođe, i diskusija o smislu hamiltonijana je slična, jedino što je u ovom slučaju

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \neq \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i},$$

pošto V može da zavisi od \dot{q} . Primetimo da generalisani potencijal V može da bude jedino linearna funkcija generalisanih brzina, jer bi u suprotnom generalisano potencijalna generalisana sila bila funkcija generalisanih ubrzanja, što bi značilo da odgovarajuća sila interakcije zavisi od ubrzanja, a to zabranjuju postulati sile. Znači, u najopštijem slučaju, generalisani potencijal je funkcija oblika

$$V = \sum_{i=1}^n \alpha_i(q_i, t) \dot{q}_i + U(q_i, t), \quad (7.26)$$

pa je hamiltonijan

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + V - \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + V - \sum_{i=1}^n \alpha_i \dot{q}_i \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n A_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j - C + U, \end{aligned} \quad (7.27)$$

tj. dobija se isti izraz kao i u slučaju običnih potencijalnih sila. Ovde treba napomenuti da se i u slučaju generalisano potencijalnih sila, ukupna mehanička energija i dalje definiše kao zbir kinetičke energije i potencijalne energije U , tj. dela generalisanog potencijala koji ne zavisi od generalisanih brzina. Konačno, ni izraz za dH/dt se u ovom slučaju ne menja. Najvažniji primer generalisano potencijalnih sila je Lorencova sila.

Primer 7.4.1. Na česticu nalelektrisanja q , koja se kreće u elektromagnetnom polju, okarakterisanom jačinama \vec{E} i \vec{B} deluje Lorencova sila

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}).$$

Polja se mogu izraziti preko skalarnog $\varphi(\vec{r}, t)$ i vektorskog $\vec{A}(\vec{r}, t)$ potencijala [11] na sledeći način

$$\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad \vec{B} = \text{rot}\vec{A}$$

a ako se za generalisane koordinate izaberu Dekratove koordinate čestice, lako se proverava da su odgovarajuće generalisane sile, u ovom slučaju Dekartove komponente sile \vec{F} , jednake

$$F_x = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad F_y = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad F_z = \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{z}} - \frac{\partial V}{\partial z},$$

gde je

$$V = q(\varphi - \vec{v} \cdot \vec{A}).$$

Drugim rečima, Lorencova sila jeste generalisano potencijalna sila. Polazeći od lagranžijana $L = T - V$, nalaze se generalisani impulsi

$$p_x = m\dot{x} + qA_x, \quad p_y = m\dot{y} + qA_y, \quad p_z = m\dot{z} + qA_z,$$

dok je hamiltonijan

$$H = T + q\varphi = \frac{1}{2m}(\vec{P} - q\vec{A})^2 + q\varphi,$$

gde je $\vec{P} = m\vec{v} + q\vec{A}$.

Glava 8

Princip najmanjeg dejstva

Princip najmanjeg dejstva spada u tzv. varijacione principe, koji se zasnivaju na *varijacionom računu*, čije su osnove date u sledećem odeljku.

8.1 Varijacioni račun

Za diferencijabilnu funkciju $y(x)$ nezavisno promenljive x i funkciju $F(x, y(x), \frac{dy}{dx})$ formirajmo određeni integral

$$I = \int_{x_1}^{x_2} F \left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx} \right) dx. \quad (8.1)$$

Osnovni zadatak **varijacionog računa** glasi: *naći funkciju $y(x)$, koja prolazi kroz fiksirane tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) u ravni xy , takvu da integral I ima ekstremalnu vrednost*. Neka je $y(x)$ tražena funkcija, a sa $\bar{y}(x)$ označimo sve ostale funkcije u okolini tražene (slika 8.1). Svaku „okolnu” funkciju $\bar{y}(x)$ možemo da izrazimo u obliku

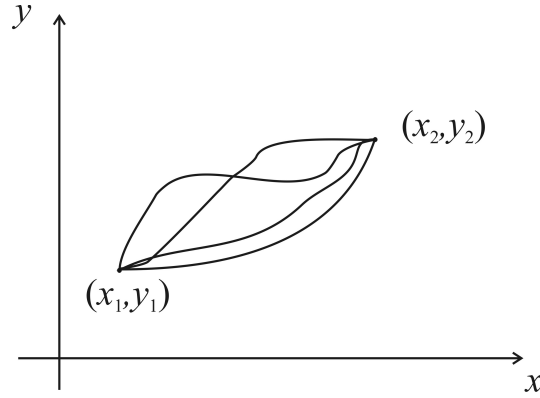
$$\bar{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x),$$

gde je ϵ mali parametar, a $\eta(x)$ proizvoljna funkcija, takva da je $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ (pošto je za svako \bar{y} postavljen uslov $\bar{y}(x_1) = y_1$ i $\bar{y}(x_2) = y_2$). Sa tako uvedenim oznakama, I može da se shvati kao funkcija od ϵ , a potreban uslov da ona ima ekstremalnu vrednost za $\epsilon = 0$ je

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0. \quad (8.2)$$

Pošto je ϵ mala veličina, funkcija $F[x, \bar{y}(x), \frac{d\bar{y}}{dx}]$ može da se razvije u Tejlorov red na sledeći način:

$$\begin{aligned} F \left[x, \bar{y}, \frac{d\bar{y}}{dx} \right] &= F \left\{ x, y(x) + \epsilon \eta(x), \frac{d}{dx} [y(x) + \epsilon \eta(x)] \right\} \\ &= F [x, y(x) + \epsilon \eta(x), y'(x) + \epsilon \eta'(x)] \\ &= F(x, y, y') + \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x, y, y')} \epsilon \eta(x) + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{(x, y, y')} \epsilon \eta'(x) + \dots, \end{aligned} \quad (8.3)$$



Slika 8.1: U najjednostavnijem obliku varijacionog računa razmatraju se razne funkcije $y(x)$ koje prolaze kroz dve fiksirane tačke u ravni (x, y) .

gde \dots označavaju članove višeg reda po ϵ . Ako se ovakav izraz zameni u integral (8.1) dobija se

$$I(\epsilon) = \int_{x_1}^{x_2} F[x, y(x), y'(x)] dx + \epsilon \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx + \dots, \quad (8.4)$$

odakle je

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial y} \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) \right] dx. \quad (8.5)$$

Na drugi član u poslednjem integralu može da se primeni parcijalna integracija, tj.

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} \eta'(x) dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial F}{\partial y'} d\eta = \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \eta(x) \right|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} dx. \quad (8.6)$$

Kako je $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, prvi sabirak u izrazu koji smo dobili za ovaj integral se anulira, pa vraćanjem u (8.5) dobijamo

$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx.$$

Poslednji integral jednak je nuli za proizvoljnu funkciju $\eta(x)$ samo ako je identički zadovoljena tzv. **Ojler-Lagranževa jednačina**:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0. \quad (8.7)$$

Uobičajeno je da se razlika proizvoljne funkcije \bar{y} i funkcije y koja predstavlja rešenje varijacionog problema naziva **varijacija** funkcije y i obično se označava sa δy , tj.

$$\delta y(x) = \bar{y}(x) - y(x) = \epsilon \eta(x). \quad (8.8)$$

Varijacija izvoda funkcije $y(x)$ je onda jednaka

$$\delta y'(x) = \bar{y}'(x) - y'(x) = \epsilon \eta'(x), \quad (8.9)$$

odakle je jasno da varijacija i izvod komutiraju, tj.

$$\delta y'(x) = [\delta y(x)]'. \quad (8.10)$$

Sa ovakvim oznakama razlika funkcija $F(x, \bar{y}, \bar{y}')$ i $F(x, y, y')$ na osnovu (8.3) može da se napiše u obliku

$$\Delta F = F(x, \bar{y}, \bar{y}') - F(x, y, y') = \left. \frac{\partial F}{\partial y} \right|_{(x, y, y')} \delta y + \left. \frac{\partial F}{\partial y'} \right|_{(x, y, y')} \delta y' + \dots, \quad (8.11)$$

a razlika integrala I računatog redom sa funkcijama \bar{y} i y , na osnovu (8.4), jednaka je

$$\Delta I = I(\epsilon) - I(0) = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx + \dots. \quad (8.12)$$

Uobičajeno je, takođe, da se sa δF i δI označavaju redom delovi ΔF i ΔI koji su linearni po ϵ , (tj. po varijaciji funkcije y), sa $\delta^2 F$ i $\delta^2 I$ delovi koji su proporcionalni ϵ^2 itd., pa se ΔF i ΔI u skladu sa tim pišu kao

$$\Delta F = \delta F + \delta^2 F + \dots, \quad \Delta I = \delta I + \delta^2 I + \dots, \quad (8.13)$$

gde je

$$\delta F(x, y, y') = \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y', \quad (8.14)$$

što podseća na izraz za totalni diferencijal funkcije tri promenljive (x, y, y') kada je promenljiva x fiksirana, i

$$\delta I = \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial y'} \delta y' \right) dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta y \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) dx. \quad (8.15)$$

Uslov (8.2) je onda ekvivalentan zahtevu da je prva varijacija integrala I jednaka nuli, tj.

$$\delta I = 0. \quad (8.16)$$

Ako je ovaj uslov zadovoljen, onda $I(\epsilon)$ za $\epsilon = 0$ ima stacionarnu vrednost, što odgovara minimumu, maksimumu ili prevojnoj tački. O čemu se tačno radi može se zaključiti tek na osnovu analize druge varijacije $\delta^2 I$. Integral I će imati ekstremalnu vrednost za $y(x)$ ako druga varijacija $\delta^2 I$ uvek ima isti znak, tj. imaće minimum za $\delta^2 I > 0$, odnosno maksimum za $\delta^2 I < 0$.

Primer 8.1.1. U ravni xy uočimo tačke (x_1, y_1) i (x_2, y_2) i linije $y(x)$ koje spajaju te dve tačke. Dužina elementa dl proizvoljne takve linije je

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + y'^2},$$

pa je ukupna dužina l linije između uočenih tačaka jednaka

$$l = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + y'^2} dx.$$

Ova linija će imati ekstremalnu dužinu za onu funkciju $y(x)$ za koju je zadovoljena Ojler-Lagranževa jednačina u kojoj je $F(x, y, y') = \sqrt{1 + y'^2}$. Pošto F ne zavisi eksplicitno od y , Ojler-Lagranževa jednačina se svodi na

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = \text{const},$$

odakle sledi

$$y'(x) = a = \text{const} \quad \Rightarrow \quad y(x) = ax + b,$$

što je, naravno, jednačina prave, za koju se lako proverava da odgovara minimalnom rastojanju između tačaka.

Uočimo sada n nezavisnih diferencijabilnih funkcija $q_1(t), \dots, q_n(t)$ iste promenljive t , funkciju $F[t, q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)]$ i njen integral

$$I = \int_{t_1}^{t_2} F[t, q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t)] dt. \quad (8.17)$$

Ako za skup funkcija $q_1(t), \dots, q_n(t)$ integral I ima ekstremalnu vrednost, a ako sa $\bar{q}_1(t), \dots, \bar{q}_n(t)$ označimo funkcije

$$\bar{q}_i(t) = q_i(t) + \epsilon \eta_i, \quad \eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.18)$$

onda je, analogno jednodimenzionalom slučaju

$$I(\epsilon) - I(0) = \epsilon \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right) dt + \delta^2 I + \dots. \quad (8.19)$$

Odatle je

$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} \eta_i + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \dot{\eta}_i \right) dt = \sum_{i=1}^n \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} \right) \eta_i dt, \quad (8.20)$$

što je za proizvoljne i međusobno nezavisne funkcije η_i uvek jednako nuli jedino ako su identički zadovoljene **Ojler-Lagranževe jednačine**

$$\frac{\partial F}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8.21)$$

Znači, Ojler-Lagranževe jednačine predstavljaju potreban uslov da integral I ima stacionarnu vrednost za skup funkcija $q_i(t)$, a da li se radi o ekstremumu, utvrđuje se na osnovu znaka druge varijacije $\delta^2 I$.

8.2 Hamiltonov princip

Da bismo primenili varijacioni račun na mehaniku, potrebno je da uvedemo još nekoliko novih pojmova.

Hamiltonovo dejstvo W po definiciji je jednako

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L[q_1(t), \dots, q_n(t), \dot{q}_1(t), \dots, \dot{q}_n(t), t] dt, \quad (8.22)$$

gde je $L(q, \dot{q}, t)$ lagranžijan posmatranog sistema.

Konfiguracioni prostor je n -dimenzionalni prostor u kome je tačka uređena n -torka (q_1, \dots, q_n) , koju čine generalisane koordinate fizičkog sistema koji ima n stepeni slobode. Putanja koju tačka u konfiguracionom prostoru opisuje pri stvarnom kretanju sistema zove se **pravi (stvarni) put sistema**. Uočimo jedan pravi put koji sistem, tj. njegova reprezentaciona tačka u konfiguracionom prostoru pređe od trenutka t_1 do trenutka t_2 , od tačke $M(t_1)$ do tačke $M(t_2)$. Pod **okolnim putem sistema** ćemo onda podrazumevati put u konfiguracionom prostoru između tih istih tačaka $M(t_1)$ i $M(t_2)$, koji odgovara zamišljenom kretanju sistema od trenutka t_1 do t_2 , a malo odstupa od stvarnog kretanja. Označimo sa $P[q_1(t), \dots, q_n(t)]$ proizvoljnu tačku na pravom putu, a sa $\bar{P}[\bar{q}_1(t), \dots, \bar{q}_n(t)]$ tačku na okolnom putu, koja odgovara istom trenutku t , a sa δq_i varijacije generalisanih koordinata koje odgovaraju prelasku sa pravog na okolni put, tj.

$$\delta q_i(t) = \bar{q}_i(t) - q_i(t). \quad (8.23)$$

Ako na sistem koji posmatramo deluju samo potencijalne sile, onda Lagranževe jednačine imaju oblik

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad (8.24)$$

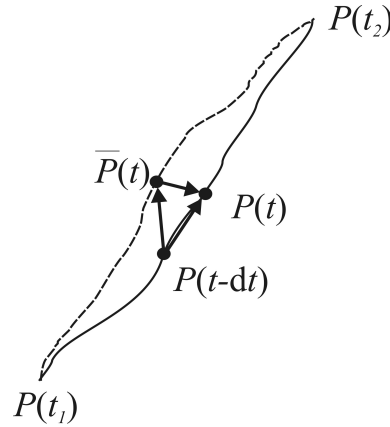
koji se, na osnovu prethodnog odeljka, poklapa sa oblikom Ojler-Lagranževih jednačina (8.21), za $q_i(t)$ (na pravom putu sistema), kada se uzme $F = L$. Pošto ispunjenost ovih jednačina znači da odgovarajući integral ima stacionarnu vrednost, to znači da Hamiltonovo dejstvo na pravom putu ima stacionarnu vrednost. Analizom druge varijacije dejstva (što prevazilazi okvire ovog kursa [2]), može se pokazati da je ona pozitivna za dovoljno male vremenske intervale $t_2 - t_1$, i u tom slučaju onda važi **Hamiltonov princip najmanjeg dejstva**: *stvarno kretanje sistema sa idealnim reakcijama, holonomnim vezama i potencijalnim silama odvija se tako da Hamiltonovo dejstvo duž pravog puta ima minimalnu vrednost u odnosu na vrednosti dejstva duž svih okolnih puteva.*

Napomena

Oznakom δq_i smo u Lagranževom formalizmu označavali promene generalisanih koordinata, koje su odgovarale virtuelnim pomeranjima. Ispostavlja se da varijacija zaista odgovara virtuelnoj promeni generalisane koordinate. Naime, ako u trenutku $t - dt$ u konfiguracionom prostoru na stvarnom putu uočimo tačku $P(t - dt)$, a u trenutku t uočimo tačke $P(t)$ i $\bar{P}(t)$, prvu na pravom, a drugu na okolnom putu, onda prelaz iz $P(t - dt)$ u $P(t)$ odgovara mogućem pomeranju (stvarno kretanje sve vreme je u skladu sa vezama), isto kao i prelaz $P(t - dt)$ u $\bar{P}(t)$, pošto je i okolni put u skladu sa vezama. Razlika ova dva moguća pomeranja odgovara prelasku iz $P(t)$ u $\bar{P}(t)$ (slika 8.2), a pošto je razlika dva ovako definisana moguća pomeranja jednaka virtuelnom pomeranju, sledi da je $\bar{q}_i(t) - q_i(t) = \delta q_i(t)$ zaista virtuelna promena generalisane koordinate q_i .

8.3 Hamiltonovi sistemi

Pod Hamiltonovim sistemima podrazumevaju se svi one sistemi za koje se može naći funkcija $L(q, \dot{q}, t)$ (koja ne mora biti jednaka $T - V$), tako da se odgovarajuće Ojler-Lagranževe jednačine u



Slika 8.2: Pravi (puna linija) i okolni put (isprekidana linija) u konfiguracionom prostoru. Prelazak iz konfiguracije određene tačkom $P(t - dt)$ u tačku $P(t)$, odnosno u tačku $\bar{P}(t)$ na okolnom putu, odgovara mogućem pomeranju (i okolni i pravi put su po definiciji u skladu sa vezama), što znači da prelazak iz $P(t)$ u $\bar{P}(t)$ odgovara virtuelnom pomeranju.

svom eksplicitnom obliku poklapaju sa diferencijalnim jednačinama kretanja tog sistema, tj. da važi Hamiltonov princip najmanjeg dejstva za $W = \int_{t_1}^{t_2} L dt$. Ovi sistemi ne moraju da budu isključivo mehanički i u tom smislu se kaže da Hamiltonov princip predstavlja opšti princip teorijske fizike. Zaista, principi analogni Hamiltonovom principu u mehanici, postoje i u drugim oblastima fizike, npr. Maksimalne jednačine za elektromagnetno polje mogu da se napišu u obliku Ojler-Lagranževih jednačina za pogodno definisano dejstvo [11] itd.

Primer 8.3.1. Za česticu mase m koja duž vertikale pada u homogenom gravitacionom polju, pri čemu na nju deluje i sila otpora sredine, proporcionalna njenoj brzini sa koeficijentom proporcionalnosti am , funkcija

$$L' = \frac{1}{2} m e^{at} (\dot{x}^2 + 2gx),$$

gde je x osa orijentisana vertikalno naniže, stavljena u Ojler-Lagranževu jednačinu

$$\frac{\partial L'}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} = 0,$$

daje diferencijalnu jednačinu

$$m\ddot{x} = mg - ma\dot{x}.$$

Ova jednačina se može da se dobije direktno iz II Njutnovog zakona ili pomoću Lagranževe jednačine

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = Q^*,$$

gde je

$$L = T - U = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + mgx, \quad Q^* = -ma\dot{x}.$$

Ovde je zgodno приметiti da ako lagranžijan L zadovoljava Hamiltonov princip, onda će ga takođe i funkcije $L' = \alpha L$ i $L' = L + df(q, t)/dt$ u svojstvu lagranžijana zadovoljavati. Za prvu funkciju je to očigledno, a za drugu je

$$W' = \int_{t_1}^{t_2} \left(L + \frac{df(q, t)}{dt} \right) dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} df(q, t) = W + f(q(t_2), t_2) - f(q(t_1), t_1),$$

pa je varijacija dejstva jednaka

$$\delta W' = \delta W + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i(t_2) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial q_i} \delta q_i(t_1) = \delta W,$$

gde smo iskoristili činjenicu da su varijacije generalisanih koordinata u trenucima t_1 i t_2 jednake nuli. Konačno, ako ovako definisani lagranžijani L' daju iste diferencijalne jednačine kao i L , onda je jasno da i lagranžijan

$$L' = \alpha L + \frac{df(q, t)}{dt}, \quad (8.25)$$

kada se zameni u Ojler-Lagranževe jednačine takođe daje iste diferencijalne jednačine.

Glava 9

Rešenja zadataka

9.1 Osnovne postavke klasične mehanike

Rešenje 1.4.1. (i) Osnovna jednačina dinamike za kretanje projektila ima oblik

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \gamma m\vec{v}, \quad (9.1)$$

odakle se projektovanjem na ose Dekartovog koordinatnog sistema dobijaju sledeće tri skalarne diferencijalne jednačine:

$$m\ddot{x} = -m\gamma\dot{x}, \quad (9.2)$$

$$m\ddot{y} = -m\gamma\dot{y}, \quad (9.3)$$

$$m\ddot{z} = -mg - m\gamma\dot{z}. \quad (9.4)$$

Iz jednačine (9.2) prvo sledi

$$\dot{x} + \gamma x = C_1, \quad (9.5)$$

gde je C_1 integraciona konstanta koja se određuje iz početnih uslova $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_1$:

$$C_1 = v_1.$$

Jednačina (9.5) onda može da se prepíše kao

$$\frac{dx}{v_1 - \gamma x} = dt,$$

odakle se integracijom dobija

$$x(t) = \frac{1}{\gamma} (v_1 - C_2 e^{-\gamma t}).$$

Iz početnog uslova $x(0) = 0$ sledi $C_2 = v_1$, tako da konačna jednačina za koordinatu x projektila ima oblik:

$$x(t) = \frac{v_1}{\gamma} (1 - e^{-\gamma t}). \quad (9.6)$$

Iz jednačine (9.3) zbog početnog uslova $\dot{y}(0) = 0$ trivijalno sledi konačna jednačina: $y(t) = 0$.

Diferencijalna jednačina (9.4) za $z(t)$ može da se prepiše kao

$$\ddot{z} + \gamma \dot{z} = -g,$$

odakle prvo (uz zadate početne uslove) sledi

$$\dot{z} + \gamma z = -gt + v_3.$$

Dobijena jednačina ima oblik nehomogene linearne diferencijalne jednačine prvog reda, pa se njeno rešenje nalazi uz pomoć formule poznate iz matematike:

$$z(t) = e^{-\int \gamma dt} \left(\int (-gt + v_3) e^{\int \gamma dt} dt + C_3 \right).$$

odakle je

$$z(t) = e^{-\gamma t} \left(\int (-gt + v_3) e^{\gamma t} dt + C_3 \right) = C_3 e^{-\gamma t} + \frac{v_3}{\gamma} - g e^{-\gamma t} \int t e^{\gamma t} dt.$$

Pošto je $\int t e^{\gamma t} dt = \frac{1}{\gamma} e^{\gamma t} (t - 1/\gamma)$, što se lako nalazi parcijalnom integracijom, i $z(0) = 0$, konačna jednačina za koordinatu z je

$$z(t) = \frac{g + v_3 \gamma}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{gt}{\gamma}. \quad (9.7)$$

Iz jednačine (9.6) sledi

$$1 - e^{-\gamma t} = \frac{x \gamma}{v_1} \Rightarrow t = -\frac{1}{\gamma} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_1} \right),$$

pa se zamenom poslednjeg izraza u (9.7) dobija tražena jednačina trajektorije:

$$z = \frac{\gamma v_3 + g}{\gamma v_1} x + \frac{g}{\gamma^2} \ln \left(1 - \frac{\gamma x}{v_1} \right). \quad (9.8)$$

Pošto za malo α važi razvoj

$$\ln(1 - \alpha) = -\alpha - \frac{1}{2}\alpha^2 - \frac{1}{3}\alpha^3 + \dots,$$

iz jednačine trajektorije za malo γ sledi

$$z \approx \frac{v_3}{v_1} x - \frac{g}{2v_1^2} x^2 - \frac{\gamma g}{3v_1^3} x^3.$$

Poslednji član sa desne strane predstavlja prvu popravku jednačine trajektorije projektila kada se uzme u obzir postojanje otpora vazduha, dok prva dva člana odgovaraju slučaju kada se otpor vazduha potpuno zanemari. Domet D (tj. rastojanje koje projektil pređe u pravcu x -ose do ponovnog pada na zemlju) nalazi se kada se u poslednju jednačinu stavi $z = 0$ i $x = D$, odakle se za netrivialno rešenje dobija jednačina:

$$D^2 + \frac{3v_1}{2\gamma} D - 3 \frac{v_1^2 v_3}{\gamma g} = 0.$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$D_{1,2} = \frac{3v_1}{4\gamma} \left(-1 \pm \sqrt{1 + \frac{16\gamma v_3}{3g}} \right).$$

Rešenje sa znakom minus ispred korena u gornjoj jednačini je fizički besmisleno, pošto bi dalo negativnu vrednost za domet (što bi značilo da se projektil duž x -ose kretao u smeru suprotnom svojoj početnoj brzini), pa sledi da je

$$D = \frac{3v_1}{4\gamma} \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{16\gamma v_3}{3g}} \right).$$

Koren u dobijenom izrazu za D je oblika $\sqrt{1 + \alpha}$, gde je $\alpha \ll 1$, pa, ako se primeni razvoj

$$\sqrt{1 + \alpha} = 1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{8}\alpha^2 + \dots,$$

sledi traženi izraz

$$D = \frac{2v_1 v_3}{g} - \frac{8\gamma v_1 v_3^2}{3g^2}.$$

(ii) Pošto je $v_1 = v_0 \cos \alpha$ i $v_3 = v_0 \sin \alpha$ domet može da se napiše u obliku

$$D = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha \left(1 - \frac{4\gamma v_0}{3g} \sin \alpha \right).$$

Maksimalni domet pri fiksnom intenzitetu početne brzine v_0 postiže se pri uglu α za koji je $\frac{\partial D}{\partial \alpha} = 0$ i $\frac{\partial^2 D}{\partial^2 \alpha} < 0$, tj.

$$\frac{\partial D}{\partial \alpha} = \frac{2v_0^2}{g} \left(\cos 2\alpha - \frac{2\gamma v_0}{3g} (2 \cos 2\alpha \sin \alpha + \sin 2\alpha \cos \alpha) \right) = 0.$$

Za $\gamma = 0$ maksimalni domet se dostiže pri $\alpha_0 = \pi/4$, pa se iz poslednje jednačine za prvu aproksimaciju ugla α pri nezanemarljivom γ dobija jednačina

$$\cos 2\alpha = \frac{2\gamma v_0}{3g} (2 \cos 2\alpha_0 \sin \alpha_0 + \sin 2\alpha_0 \cos \alpha_0) = \frac{2\gamma v_0}{3g} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}\gamma v_0}{3g},$$

što je i trebalo pokazati. (Lako se proverava da je zadovoljen i uslov $\frac{\partial^2 D}{\partial^2 \alpha} < 0$.)

(iii) Optimalni ugao i domet se mogu izračunati iz izraza za $\cos 2\alpha$ i D datih u prethodnim delovima zadatka, ako su dati v_0 i γ . Intenzitet početne brzine v_0 je zadat, a γ nalazimo pomoću zadate granične vrednosti brzine, koju projektil dostiže u slučaju kada se pusti da pada iz stanja mirovanja. Naime, za takve početne uslove se iz jednačine (9.4) dobija

$$z(t) = \frac{g}{\gamma^2} (1 - e^{-\gamma t}) - \frac{gt}{\gamma},$$

odakle je

$$\dot{z}(t) = \frac{g}{\gamma} (e^{-\gamma t} - 1),$$

pa je intenzitet granične brzine

$$v_G = \lim_{t \rightarrow \infty} |\dot{z}| = \frac{g}{\gamma}$$

što znači da je $\gamma = g/v_G$. Konačno se za α i D dobija

$$\alpha = \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{2}v_0}{3v_G} = 42.3^\circ, \quad D = \frac{v_0^2}{g} \left(1 - \frac{4v_0}{3v_G} \sin \alpha \right) \sqrt{1 - \frac{2v_0^2}{9v_G^2}} = 813m.$$

9.2 Dalamber-Lagranžev princip

Rešenje 4.3.1. Pošto je položaj čestice u slučaju Tejlorovog klatna jednak $\vec{r} = R\vec{e}_r$, gde je \vec{e}_r ort u sfernom koordinatnom sistemu izabranom tako da mu se početak poklapa sa centrom prstena, a z -osa ima pravac vertikalne, virtuelno pomeranje čestice jednako je $\delta\vec{r} = R\delta\vec{e}_r$. Ort \vec{e}_r može se izraziti kao:

$$\vec{e}_r = \cos \varphi \sin \theta \vec{e}_x + \sin \varphi \sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z,$$

a kada se iskoristi veza $\dot{\varphi} = \omega$, odakle sledi $\varphi = \omega t$, gde smo uzeli da je u početnom trenutku φ bilo jednako nuli (možemo tako izabrati koordinatni sistem), ort \vec{e}_r možemo da prepisemo kao:

$$\vec{e}_r = \cos \omega t \sin \theta \vec{e}_x + \sin \omega t \sin \theta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z. \quad (9.9)$$

Pošto je

$$\delta\vec{e}_r = d\vec{e}_r - d'\vec{e}_r$$

i

$$d\vec{e}_r = d\theta(\cos \theta \cos \omega t \vec{e}_x + \cos \theta \sin \omega t \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) + \omega dt \sin \theta(-\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y),$$

$$d'\vec{e}_r = d'\theta(\cos \theta \cos \omega t \vec{e}_x + \cos \theta \sin \omega t \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) + \omega dt \sin \theta(-\sin \omega t \vec{e}_x + \cos \omega t \vec{e}_y),$$

za virtuelnu promenu orta \vec{e}_r dobijamo

$$\delta\vec{e}_r = \delta\theta(\cos \theta \cos \omega t \vec{e}_x + \cos \theta \sin \omega t \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z) = \delta\theta \vec{e}_\theta, \quad (9.10)$$

gde je $\delta\theta = d\theta - d'\theta$. S druge strane, ukupna sila reakcije je idealna, pa se može napisati u obliku:

$$\vec{N} = \lambda_1 \text{grad}(r - R) + \lambda_2 \text{grad}(\varphi - \omega t) = \lambda_1 \vec{e}_r + \frac{\lambda_2}{R \sin \theta} \vec{e}_\varphi, \quad (9.11)$$

gde je iskorišćen izraz za gradijent u sfernim koordinatama, kao i jednačine veza. Rad sila reakcije na virtuelnom pomeranju čestice je onda jednak

$$\vec{N} \cdot \delta\vec{e}_r = 0, \quad (9.12)$$

zbog ortogonalnosti sfernih koordinatnih ortova.

9.3 Lagranževe jednačine

Rešenje 5.3.1. (i) Ako x osu orijentišemo vertikalno naniže, sa početkom u centru gornjeg (nepokretnog) diska, a sa L_1 i L_2 označimo dužine niti (L_1 se odnosi na nit prebačenu preko gornjeg diska), odnosno poluprečnik diskova sa R , onda se sa slike 5.1 vidi da x_3 koordinata čestice 3 može da se izrazi kao: $x_3 = 2L_1 + L_2 - 2\pi R - 2x_1 - x_2$. Kinetička energija sistema je onda jednaka:

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}m_3(2\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2, \quad (9.13)$$

a potencijalna (koja ovde potiče samo od gravitacione sile) je:

$$U = g[(2m_3 - m_1)x_1 + (m_3 - m_2)x_2] + \text{const}. \quad (9.14)$$

Zamenom ovih izraza u lagranžijan $L = T - U$ i nalaženjem odgovarajućih parcijalnih izvoda, Lagranževe jednačine dobijaju sledeći oblik:

$$(m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 + g(2m_3 - m_1) = 0, \quad (9.15)$$

$$2m_3\ddot{x}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + g(m_3 - m_2) = 0. \quad (9.16)$$

(ii) Ovaj slučaj razlikuje se od prethodnog samo po tome što osim gravitacione sile deluje još jedna aktivna sila: sila otpora sredine i to samo na česticu 1. Ova sila je nepotencijalna, pa se izraz za potencijalnu energiju ne menja (kao ni izraz za kinetičku energiju, pošto su veze ostale iste), a potrebno je naći odgovarajuće generalisane nepotencijalne sile Q_1^* i Q_2^* , koje se pridružuju generalisanim koordinatama x_1 i x_2 . Pošto su veze stacionarne, to može najjednostavnije da se uradi polazeći od izraza za elementarni rad koji izvrši sila otpora:

$$\vec{F}^* \cdot d\vec{r}_1 = -\gamma \vec{v}_1 \cdot d\vec{r}_1 = -\gamma \dot{x}_1 dx_1,$$

odakle sledi da je $Q_1^* = -\gamma \dot{x}_1$, a $Q_2^* = 0$, pa u ovom slučaju Lagranževe jednačine imaju oblik:

$$(m_1 + 4m_3)\ddot{x}_1 + 2m_3\ddot{x}_2 + g(2m_3 - m_1) = -\gamma \dot{x}_1, \quad (9.17)$$

$$2m_3\ddot{x}_1 + (m_2 + m_3)\ddot{x}_2 + g(m_3 - m_2) = 0. \quad (9.18)$$

(iii) Za $m_1 = 5m$, $m_2 = 4m$, $m_3 = 2m$ jednačine nađene u prethodnom delu zadatka svode se na:

$$13\ddot{x}_1 + \frac{\gamma}{m}\dot{x}_1 + 4\ddot{x}_2 = g, \quad (9.19)$$

$$2\ddot{x}_1 + 3\ddot{x}_2 = g. \quad (9.20)$$

Ako se \ddot{x}_2 izrazi iz poslednje jednačine, pa zatim zameni u prethodnu dobija se diferencijalna jednačina:

$$31\ddot{x}_1 + \frac{3\gamma}{m}\dot{x}_1 = -g, \quad (9.21)$$

iz koje direktno sledi:

$$31\dot{x}_1 + \frac{3\gamma}{m}x_1 = -gt + C_1. \quad (9.22)$$

Iz oblika diferencijalnih jednačina je jasno da se one neće promeniti ako x_1 i x_2 umesto u odnosu na položaj centra gornjeg diska merimo u odnosu na početne položaje čestica. U tom slučaju

integraciona konstanta C_1 , koju određujemo iz uslova da je u početnom trenutku čestica 1 mirovala postaje jednaka nuli, tj. za nepoznatu funkciju $x_1(t)$ se dobija diferencijalna jednačina prvog reda:

$$\dot{x}_1 + \frac{3\gamma}{31m}x_1 = -\frac{g}{31}t. \quad (9.23)$$

Ovo je, naravno, linearna diferencijalna jednačina prvog reda, čije opšte rešenje ima oblik:

$$x_1(t) = \exp \left[-\int \frac{3\gamma}{31m} dt \right] \left(\int \left(-\frac{g}{31}t \right) \exp \left[\int \frac{3\gamma}{31m} dt \right] dt + C_2 \right) = C_2 e^{-kt} - \frac{g}{31k^2}(kt - 1), \quad (9.24)$$

gde je $k = \frac{3\gamma}{31m}$. Integraciona konstanta se određuje iz početnog uslova $x_1(0) = 0$, tako da je konačno

$$x_1(t) = \frac{g}{31k^2} (1 - kt - e^{-kt}). \quad (9.25)$$

Znajući $x_1(t)$, iz jednačine (9.20) i početnih uslova sledi:

$$x_2(t) = \frac{1}{6}gt^2 - \frac{2}{3}x_1(t). \quad (9.26)$$

(iv) Za silu zatezanja koja deluje na česticu 1 se iz II Njutnovog zakona dobija:

$$N_1 = m_1g - m_1\ddot{x}_1 - \gamma\dot{x}_1 = 5m(g - \ddot{x}_1) - \gamma\dot{x}_1 = 5mg \left(1 + \frac{1}{31}e^{-kt} \right) + \frac{\gamma g}{31k} (e^{-kt} - 1)$$

i slično za silu zatezanja konca koja deluje na česticu 2:

$$N_2 = m_2(g - \ddot{x}_2) = 4m(g - \ddot{x}_2) = \frac{8}{3}mg \left(1 - \frac{1}{31}e^{-kt} \right).$$

Rešenje 5.3.3. (i) Za generalisanu koordinatu izaberimo rastojanje x kuglice od tačke A (slika 5.2). Kinetička energija kuglice, izražena u cilindričnim koordinatama, koje su izabrane tako da je osa z određena pravcem i smerom vektora ω , a koordinatni početak je u tački O je $T = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\omega^2 + \dot{z}^2)$. Pošto je $r = x \sin \alpha$ i $z = OA - x \cos \alpha$, za kinetičku energiju se dobija izraz $T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^2\omega^2 \sin^2 \alpha)$. Potencijalna energija jednaka je $U = mg(OA - x \cos \alpha) + \frac{1}{2}k((x-l)^2 + (2L - x - l)^2) = -mgx \cos \alpha + k(x-l)^2 + const$, tako da za lagranžijan možemo da uzmemo izraz

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + x^2\omega^2 \sin^2 \alpha) + mgx \cos \alpha - k(x-l)^2, \quad (9.27)$$

a Lagranževa jednačina dobija oblik:

$$\ddot{x} + \left(\frac{2k}{m} - \omega^2 \sin^2 \alpha \right) x = g \cos \alpha + \frac{2kl}{m}. \quad (9.28)$$

(ii) U ovom slučaju Lagranževa jednačina se svodi na

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \cos \alpha + \frac{2kl}{m}, \quad (9.29)$$

čije je opšte rešenje

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{gm}{k} \cos \alpha + 2l. \quad (9.30)$$

Pošto je u početnom trenutku

$$x(0) = A + \frac{gm}{k} \cos \alpha + 2l = l, \quad (9.31)$$

sledi da je $A = \frac{gm}{k} \cos \alpha - l$. Slično,

$$\dot{x}(0) = \sqrt{\frac{k}{m}}B, \quad (9.32)$$

ali kako je

$$T(0) = \frac{m}{2} ((\dot{x}(0))^2 + l^2 \omega^2 \sin^2 \alpha) = \frac{1}{2} m l^2 \omega^2 \sin^2 \alpha, \quad (9.33)$$

jasno je da je $B = 0$, tako da je

$$x(t) = l + \left(\frac{gm}{k} \cos \alpha + l \right) \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right). \quad (9.34)$$

Rešenje 5.3.2. (i) Označimo sa \vec{a}_M ubrzanje strme ravni u odnosu na inercijalni sistem vezan za nepokretnu horizontalnu ravan, a sa \vec{a} ubrzanje materijalne tačke u odnosu na strmu ravan. Ubrzanje materijalne tačke u odnosu na nepokretnu ravan je onda $\vec{a} + \vec{a}_M$, a osnovna jednačina dinamike za tu tačku ima oblik:

$$m(\vec{a} + \vec{a}_M) = m\vec{g} + \vec{R}_1, \quad (9.35)$$

gde je \vec{R}_1 sila reakcije kojom strma ravan deluje na materijalnu tačku (slika 9.1). Projektovanjem ove jednačine na pravac paralelan nagnutoj površini strme ravni dobijamo jednačinu:

$$m(a_{\parallel} + a_M \cos \alpha) = mg \sin \alpha, \quad (9.36)$$

pošto je sila \vec{R}_1 normalna na strmu ravan. Projektovanjem (9.35) na pravac normalan na strmu ravnu dobijamo:

$$m(a_{\perp} + a_M \sin \alpha) = R_1 - mg \cos \alpha, \quad (9.37)$$

a pošto se materijalna tačka kreće po strmoj ravni, njeno ubrzanje u odnosu na strmu ravan paralelno je strmoj ravni, tj. $a_{\perp} = 0$, pa je

$$R_1 = m(g \cos \alpha + a_M \sin \alpha). \quad (9.38)$$

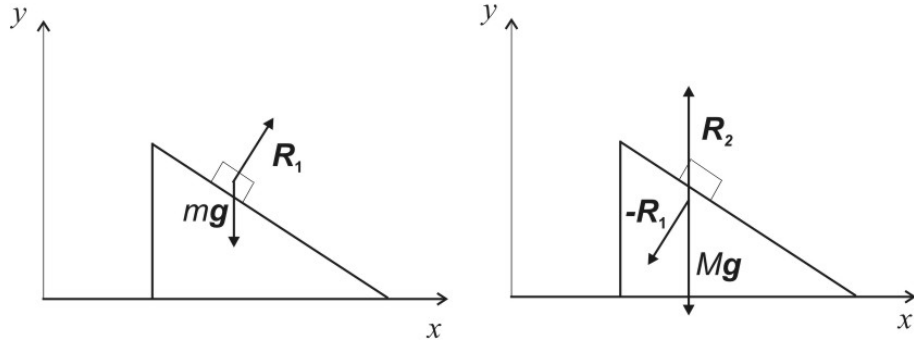
Osnovna jednačina dinamike za strmu ravan ima oblik:

$$M\vec{a}_M = -\vec{R}_1 + \vec{R}_2 + M\vec{g}, \quad (9.39)$$

gde je $-\vec{R}_1$ sila kojom materijalna tačka deluje na strmu ravan, a \vec{R}_2 sila reakcije horizontalne podloge. Projektovanjem ove jednačine na pravac duž kog se kreće strma ravan (x -osa) i na pravac normalan na njega (y -osa, $\vec{g} = -g\vec{e}_y$), dobijaju se jednačine:

$$R_2 - Mg = -R_1 \cos \alpha, \quad (9.40)$$

$$Ma_M = -R_1 \sin \alpha \quad (9.41)$$



Slika 9.1: Sile koje deluju na česticu i strmu ravan - slika uz rešenje zadatka 5.3.2.

Iz jednačina (9.38) i (9.41) sledi

$$a_M = -g \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \frac{M}{m}} \right), \quad (9.42)$$

što, imajući u vidu da je $a_M = \ddot{x}_M$, predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja strme ravni. Zamenjujući dobijeni izraz za a_M u jednačinu (9.41) lako se nalazi R_1 , a zamenom u jednačinu (9.36) i izraz za $a_{||}$:

$$a_{||} = g \sin \alpha - a_M \cos \alpha = g \sin \alpha \left(\frac{M + m}{M + m \sin^2 \alpha} \right).$$

Vertikalna komponenta ubrzanja a_y materijalne tačke jednaka je

$$a_y = -a_{||} \sin \alpha = -g \sin^2 \alpha \left(\frac{M + m}{M + m \sin^2 \alpha} \right). \quad (9.43)$$

Pošto je visina strme ravni h , materijalna tačka će se spustiti do njenog dna za vreme

$$t = \sqrt{-\frac{2h}{a_y}}.$$

(ii) Ukupni rad sila reakcije na virtuelnom pomeranju jednak je

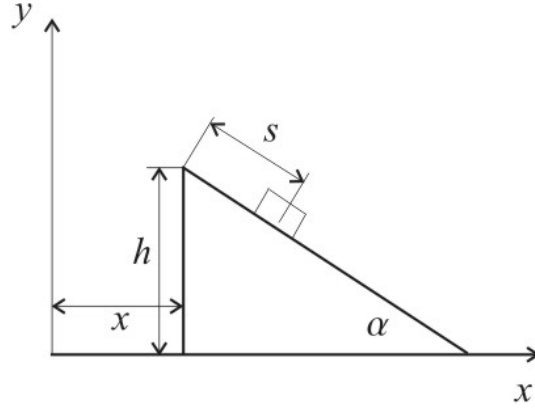
$$\vec{R}_1 \delta \vec{r}_m + (\vec{R}_2 - \vec{R}_1) \delta \vec{r}_M, \quad (9.44)$$

gde je $\delta \vec{r}_m$ virtuelno pomeranje materijalne tačke mase m , a $\delta \vec{r}_M$ virtuelno pomeranje strme ravni. Ako sa x označimo položaj strme ravni kao na slici 9.2, a sa s rastojanje materijalne tačke od vrha strme ravni, onda su koordinate materijalne tačke jednake

$$x_m = x + s \cos \alpha, \quad y_m = h - s \sin \alpha,$$

pa je

$$\delta \vec{r}_m = (\delta x + \cos \alpha \delta s) \vec{e}_x - \sin \alpha \delta s \vec{e}_y,$$



Slika 9.2: Slika uz rešenje zadatka 5.3.2 - deo (ii).

dok je virtuelno pomeranje strme ravni: $\delta \vec{r}_M = \delta x \vec{e}_x$. Iz rešenja dela zadatka pod (i) sledi da se sile reakcije mogu da se napišu kao

$$\vec{R}_1 = \frac{mM \cos \alpha}{m \sin^2 \alpha + M} g (\sin \alpha \vec{e}_x + \cos \alpha \vec{e}_y), \quad \vec{R}_2 = -\frac{M + m}{1 + \frac{m}{M} \sin^2 \alpha} \vec{g}.$$

Zamenom navedenih izraza za sile reakcije i virtuelna pomeranja u (9.44) direktno se dobija da je ukupni rad na virtuelnom pomeranju jednak nuli, što je i trebalo pokazati.

(iii) Ako za generalisane koordinate izaberemo x i s (kako su definisani u prethodnom delu rešenja), za kinetičku energiju dobijamo izraz

$$T = \frac{1}{2} (m(\dot{x}_m^2 + \dot{y}_m^2) + M\dot{x}^2) = \frac{1}{2} (M\dot{x}^2 + m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cos \alpha)),$$

a za potencijalnu

$$U = mg(h - s \sin \alpha),$$

pa je lagranžijan

$$L(x, \dot{x}, s, \dot{s}) = \frac{1}{2} (M\dot{x}^2 + m(\dot{x}^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{x}\dot{s} \cos \alpha)) - mg(h - s \sin \alpha).$$

Pošto je x ciklična koordinata jednačina koja odgovara x koordinati ima oblik:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0, \quad (9.45)$$

odakle se direktno dobija jedan integral kretanja

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + m\dot{s} \cos \alpha = \text{const}. \quad (9.46)$$

Lagranževa jednačina koja odgovara s koordinati ima oblik

$$\ddot{x} \cos \alpha + \ddot{s} - g \sin \alpha = 0. \quad (9.47)$$

Komentar: Eksplicitnim raspisivanjem jednačine (9.45) (tj. diferenciranjem jednačine (9.46) po vremenu), dobija se jednačina koja zajedno sa jednačinom (9.47) čini sistem iz koga se lako mogu eksplicitno izraziti \ddot{x} :

$$\ddot{x} = -g \left(\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{\sin^2 \alpha + \frac{M}{m}} \right),$$

što se zaista poklapa sa izrazom za a_M dobijenim u delu rešenju pod (i), kao i \ddot{s} :

$$\ddot{s} = g \sin \alpha \left(\frac{\frac{M}{m} + 1}{\sin^2 \alpha + \frac{M}{m}} \right).$$

Pošto je vertikalna komponenta ubrzanja materijalne tačke jednaka $a_y = -\ddot{s} \sin \alpha$, zamenom poslednjeg izraza u tu jednačinu lako se proverava da se dobija isti rezultat kao pod (i).

Rešenje 5.3.4. (i) Primenjujući izraz za kvadrat brzine u sfernim koordinatama i uzimajući u obzir vezu $r - R = 0$, dobijamo izraz za kinetičku energiju čestice: $T = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2)$, dok je njena potencijalna energija, ako se računa u odnosu na nivo $z = 0$, jednaka $U = mgR \cos \theta$. Lagranžijan je onda

$$L = T - U = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) - mgR \cos \theta, \quad (9.48)$$

odakle odmah vidimo da je φ ciklična koordinata, kojoj odgovara jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{dt} (mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0.$$

Odatle odmah sledi jedan integral kretanja

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = mR^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} = K_1, \quad (9.49)$$

pa je

$$\dot{\varphi} = \frac{C_1}{\sin^2 \theta}, \quad (9.50)$$

gde je C_1 konstanta.

Nalaženjem parcijalnih izvoda lagranžijana po θ i $\dot{\theta}$ dobijamo Lagranževu jednačinu koja odgovara koordinati θ :

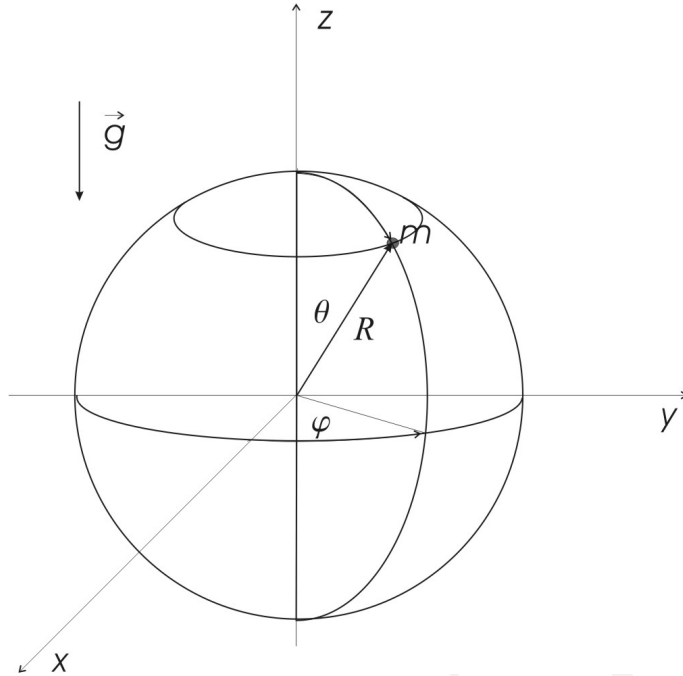
$$\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta - \frac{g}{R} \sin \theta = 0. \quad (9.51)$$

(ii) Zamenom $\dot{\varphi}$ iz (9.50) u jednačinu (9.51) zaista dobijamo diferencijalnu jednačinu u traženom obliku:

$$\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta + \frac{C_1^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta}. \quad (9.52)$$

(iii) Iz jednačine (9.52), uz $\ddot{\theta} = \frac{d}{d\theta}(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2)$, direktno sledi

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 = \int \left(\frac{g}{R} \sin \theta + \frac{C_1^2 \cos \theta}{\sin^3 \theta} \right) d\theta = -\frac{g}{R} \cos \theta - \frac{C_1^2}{2 \sin^2 \theta} + C_2.$$



Slika 9.3: Sferno klatno - slika uz rešenje zadatka 5.3.4.

S druge strane, ukupna mehanička energija E jednaka je

$$E = T + U = \frac{1}{2}mR^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + mgR \cos \theta = mR^2 \left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{R} \cos \theta + \frac{C_1^2}{2 \sin^2 \theta} \right) = \text{const},$$

što uz $C_2 = E/mR^2$ zaista jeste ekvivalentno prethodno nađenoj jednačini.

(iv) Impuls čestice jednak je

$$\vec{p} = m\vec{v} = mR(\sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta),$$

odakle korišćenjem jednačina koje povezuju koordinatne ortove sfernog i Dekartovog sistema:

$$\vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y, \quad \vec{e}_\theta = \cos \varphi \cos \theta \vec{e}_x + \sin \varphi \cos \theta \vec{e}_y - \sin \theta \vec{e}_z,$$

sledi:

$$p_x = mR(-\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi \cos \theta),$$

$$p_y = mR(\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \sin \varphi \cos \theta), \quad p_z = -mR\dot{\theta} \sin \theta.$$

Moment impulsa čestice jednak je

$$\vec{J} = \vec{r} \times m\vec{v} = R\vec{e}_r \times mR(\sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = mR^2(-\sin \theta \dot{\varphi} \vec{e}_\theta + \dot{\theta} \vec{e}_\varphi),$$

odakle je

$$J_x = -mR^2(\dot{\varphi} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + \dot{\theta} \sin \varphi),$$

$$J_y = mR^2(-\dot{\varphi} \sin \varphi \sin \theta \cos \theta + \dot{\theta} \cos \varphi), \quad J_z = mR^2 \dot{\varphi} \sin^2 \theta.$$

Na česticu deluju gravitaciona sila i sila reakcije, koja ima sve tri komponente, tako da se nijedna komponenta impulsa čestice ne održava. Moment sile idealne sile reakcije jednak je nuli (sila reakcije je kolinearna sa \vec{r}), pa je ukupni moment sila koje deluju na česticu jednak

$$\vec{K} = \vec{r} \times m\vec{g} = mgR(\vec{e}_r \times \vec{e}_z) = mgR(\sin\theta \sin\varphi \vec{e}_x - \sin\theta \cos\varphi \vec{e}_y),$$

odakle se vidi da je jedino z komponenta momenta sile jednaka nuli, tj. jedino se z komponenta momenta impulsa J_z održava:

$$J_z = mR^2\dot{\varphi} \sin^2\theta = \text{const},$$

što je ekvivalentno integralu (9.50), koji smo već dobili iz Lagranževe jednačine.

(v) Zamenjujući $\theta = \pi$ u (9.49) dobijamo da je konstanta $K_1 = 0$, pa je i onda i $C_1 = 0$, a jednačina (9.52) se onda svodi na jednačinu

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{R} \sin\theta = 0.$$

Smenom $\alpha = \pi - \theta$, ova jednačina dobija oblik jednačine matematičkog klatna

$$\ddot{\alpha} + \frac{g}{R} \sin\alpha = 0.$$

Kako je sa ovim početnim uslovima ukupna energija čestice jednaka $E = mgR$, a iz $C_1 = 0$ sledi $\dot{\varphi} = 0$, odnosno $\varphi = \text{const}$, nalaženje konačnih jednačina kretanja se u ovom slučaju svodi na nalaženje konačne jednačine kretanja za matematičko klatno za slučaj asimptotskog kretanja. Vertikalna ravan u kojoj se u ovom slučaju odvija kretanje $\varphi = \text{const}$ određena je početnim pravcem brzine i z -osom.

Rešenje 5.3.5. (i) Ako za z -osu izaberemo vertikalnu osu orijentisanu suprotno gravitacionom ubrzanju, onda je, pošto nema ni proklizavanja ni istežanja, koordinata z materijalne tačke jednaka

$$z = a\varphi, \quad (9.53)$$

odakle je kinetička energija tačke $T_m = ma^2\dot{\varphi}^2/2$. Ukupna kinetička energija sistema je

$$T = \frac{1}{4}(M + 2m)a^2\dot{\varphi}^2,$$

a potencijalna $U = -mga\varphi$, pa je lagranžijan sistema:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{4}(M + 2m)a^2\dot{\varphi}^2 + mga\varphi. \quad (9.54)$$

Lagranževa jednačina

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

onda ima oblik diferencijalne jednačine

$$\frac{1}{2}(M + 2m)a^2\ddot{\varphi} - mga = 0,$$

odakle direktno sledi da je ugaono ubrzanje diska $\ddot{\varphi}$ konstantno i jednako

$$\ddot{\varphi} = \frac{2g}{a} \frac{m}{M + 2m}. \quad (9.55)$$

U trenutku kada se konac potpuno razmota disk se okrenuo za ukupni ugao $\Phi = l/a$, pri čemu je

$$\Phi = \frac{\Omega^2}{2\ddot{\varphi}},$$

gde je Ω ugaona brzina diska u tom trenutku (ravnomerno ubrzano rotaciono kretanje oko fiksirane ose), odakle je

$$\Omega = \sqrt{2\Phi\ddot{\varphi}} = \sqrt{\frac{4gl}{a^2} \frac{m}{M+2m}}.$$

(ii) U slučaju kada je konac istegljiv sistem ima dva stepena slobode. Izaberimo za drugu generalisanu koordinatu elongaciju konca x . Koordinata z materijalne tačke u ovom slučaju može da se napiše kao

$$z = a\varphi + x,$$

pa je njena kinetička energija jednaka

$$T_m = \frac{1}{2}m(a\dot{\varphi} + \dot{x})^2.$$

Kinetička energija diska ima isti oblik kao u slučaju kada nema istezanja konca, a ukupna potencijalna energija se u ovom slučaju sastoji od potencijalne energije koja potiče od gravitacije $-mg(a\varphi + x)$ i potencijalne energije koja potiče od elastičnosti konca $kx^2/2$, tako da je lagranžijan sistema jednak:

$$L(\varphi, x, \dot{\varphi}, \dot{x}) = \frac{1}{4}Ma^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}m(a\dot{\varphi} + \dot{x})^2 + mg(a\varphi + x) - \frac{1}{2}kx^2.$$

Lagranževe jednačine se onda mogu napisati u obliku:

$$\left(\frac{M}{2m} + 1\right)a\ddot{\varphi} + \ddot{x} = g, \quad (9.56)$$

$$a\ddot{\varphi} + \ddot{x} + \frac{k}{m}x = g. \quad (9.57)$$

Ako se iz jednačine (9.56) izrazi $\ddot{\varphi}$ i zameni u jednačinu (9.57) dobija se diferencijalna jednačina

$$\ddot{x} + \frac{k(M+2m)}{Mm}x = g,$$

čije je opšte rešenje

$$x(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t + \frac{gmM}{k(M+2m)}, \quad (9.58)$$

gde je

$$\omega = \sqrt{\frac{k(M+2m)}{Mm}}. \quad (9.59)$$

Nalaženjem \ddot{x} iz jednačine (9.58) i vraćanjem u jednačinu (9.56) sledi jednačina

$$\ddot{\varphi} = \frac{\omega^2}{\left(\frac{M}{2m} + 1\right)a} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) + \frac{g}{a\left(\frac{M}{2m} + 1\right)},$$

čijim se integraljenjem po vremenu dobija

$$\varphi(t) = -\frac{C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}{\left(\frac{M}{2m} + 1\right) a} + \frac{1}{2} \frac{g}{a\left(\frac{M}{2m} + 1\right)} t^2 + K_1 t + K_2. \quad (9.60)$$

Koordinata z materijalne tačke je onda jednaka

$$z(t) = a\varphi(t) + x(t) = \frac{M}{M + 2m} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) + \frac{1}{2} \frac{g}{\frac{M}{2m} + 1} t^2 + aK_1 t + aK_2 + \frac{gmM}{k(M + 2m)}, \quad (9.61)$$

što zaista odgovara superpoziciji oscilatornog kretanja frekvencom ω i kretanja sa konstantnim ubrzanjem $g/(\frac{M}{2m} + 1)$, kakvo je nađeno u slučaju kada je konac neistegljiv (videti jednačine (9.53) i (9.55)). Ako je u početnom trenutku konac neistegnuto, a sistem miruje, to znači da je

$$x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0, \quad \varphi(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(0) = 0,$$

pa uvrštavanjem takvih početnih uslova u konačne jednačine kretanja (9.58) i (9.60) i njihove izvode po vremenu dobijamo jednačine:

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + \frac{gmM}{k(M + 2m)}, \\ 0 &= C_2 \omega, \\ 0 &= -\frac{C_1}{\left(\frac{M}{2m} + 1\right) a} + K_2, \\ 0 &= -\frac{C_2 \omega}{\left(\frac{M}{2m} + 1\right) a} + K_1. \end{aligned}$$

Iz ovog skupa jednačina sledi $C_2 = K_1 = 0$ i

$$C_1 = -\frac{gmM}{k(M + 2m)}, \quad K_2 = \frac{2gm^2M}{ak(M + 2m)^2}$$

pa je onda amplituda A oscilacija materijalne tačke jednaka

$$A = \left| \frac{M}{M + 2m} C_1 \right| = \frac{gmM^2}{k(M + 2m)^2}.$$

Rešenje 5.3.7. (i) Pošto je kinetička energija čestice jednaka:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2),$$

gde je iskorišćena veza $\theta = \alpha$, a potencijalna: $U = -\frac{k^2 m}{2r^2}$, lagranžijan je:

$$L = \frac{m}{2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \frac{k^2}{r^2} \right), \quad (9.62)$$

pa se Lagranževe jednačine svode na sledeći oblik:

$$\ddot{r} - r^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \frac{k^2}{r^3} = 0, \quad (9.63)$$

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}) = 0 \Rightarrow r^2 \dot{\varphi} = \text{const} = r_0^2 \dot{\varphi}_0, \quad (9.64)$$

gde su indeksom "0" označene početne vrednosti odgovarajućih veličina.

(ii) Ako se $\dot{\varphi}$ izrazi iz druge Lagranževe jednačine i zameni u prvu, sledi diferencijalna jednačina:

$$\ddot{r} + \frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r^3} = 0, \quad (9.65)$$

iz koje se dalje dobija:

$$\ddot{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{2} \dot{r}^2 \right) = - \frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r^3} \Rightarrow \quad (9.66)$$

$$\dot{r}^2 = \frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r^2} + \dot{r}_0^2 - \frac{k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha}{r_0^2} \Rightarrow \quad (9.67)$$

$$\frac{r r_0 dr}{\sqrt{r^2(\dot{r}_0^2 r_0^2 - A) + A r_0^2}} = dt, \quad A = k^2 - r_0^4 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow \quad (9.68)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{\frac{\left(\dot{r}_0 r_0^2 + \frac{\dot{r}_0^2 r_0^2 - A}{r_0} t \right)^2 - A r_0^2}{\dot{r}_0^2 r_0^2 - A}} \quad (9.69)$$

(iii) Ako se u jednačinu (9.65) zameni uslov $r = r_0$ sledi

$$\dot{\varphi}_0 = \pm \frac{k}{r_0^2 \sin \alpha},$$

što znači da početna brzina treba da bude oblika:

$$\vec{v}_0 = \dot{r}_0 \vec{e}_r + r_0 \sin \alpha \dot{\varphi}_0 \vec{e}_\varphi = \pm \frac{k}{r_0} \vec{e}_\varphi.$$

Sila reakcije \vec{N} sigurno ima pravac orta \vec{e}_θ i može se naći iz II Njutnovog zakona:

$$m \ddot{\vec{r}} = - \frac{k^2 m}{r_0^3} \vec{e}_r + \vec{N} \Rightarrow \vec{N} = m \vec{a} + \frac{k^2 m}{r_0^3} \vec{e}_r.$$

Pošto je $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_r = 0$, množenjem poslednje jednačine skalarno ortom \vec{e}_θ dobijamo intenzitet sile reakcije kao:

$$|\vec{N}| = m |\vec{a} \cdot \vec{e}_\theta|.$$

Ubrzanje \vec{a} nalazimo diferenciranjem brzine $\vec{v} = v_0 \vec{e}_\varphi$ po vremenu, odnosno ovde može i odmah da se primeni poznati izraz za centripetalno ubrzanje, pošto se čestica kreće ravnomerno po krugu poluprečnika $r_0 \sin \alpha$, pa je:

$$\vec{a} = - \frac{v_0^2}{r_0 \sin \alpha} \vec{e}_\rho,$$

gde je \vec{e}_ρ odgovarajući cilindrični ort. S druge strane je $\vec{r} = \vec{e}_z r_0 \cos \alpha + \vec{e}_\rho r_0 \sin \alpha$, pa je

$$\vec{a} = - \frac{k^2}{r_0^4 \sin^2 \alpha} (\vec{r} - r_0 \cos \alpha \vec{e}_z),$$

odakle se konačno dobija:

$$|\vec{N}| = \frac{mk^2 \cos \alpha}{r_0^3 \sin \alpha}.$$

Rešenje 5.3.6. (i) Ukoliko se nepokretna tačka A (slika 5.4) uzme za početak koordinatnog sistema, a osa rotacije za z -osu ($\vec{g} = g\vec{e}_z$), onda se kinetičke energije čestice koje ne leže na osi mogu računati pomoću izraza za kvadrat brzine u sfernim koordinatama, koji se, zbog veza nametnutih na ovaj sistem, za obe čestice svodi na: $v^2 = a^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta)$. Pošto je z koordinata čestice u tački B jednaka $-2a \cos \theta$, kvadrat brzine ove čestice je $4a^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta$, pa je ukupna kinetička energija sistema jednaka

$$T = ma^2(\dot{\theta}^2 + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 2ma^2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta = ma^2(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \Omega^2 \sin^2 \theta)$$

Potencijalna energija sistema je $U = -4mga \cos \theta$, tako da je lagranžijan sistema

$$L = ma^2(\dot{\theta}^2 + 2\dot{\theta}^2 \sin^2 \theta + \Omega^2 \sin^2 \theta) + 4mga \cos \theta, \quad (9.70)$$

a Lagranževa jednačina

$$\ddot{\theta} + 2\ddot{\theta} \sin^2 \theta + 2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - \Omega^2 \sin \theta \cos \theta + 2\frac{g}{a} \sin \theta = 0. \quad (9.71)$$

(ii) Ako se u Lagranževoj jednačini uvede smena $\ddot{\theta} = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right)$, pa zatim cela jednačina podeli sa $1 + 2 \sin^2 \theta$, dobija se jednačina

$$\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) + 4 \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + 2 \sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right) = \Omega^2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + 2 \sin^2 \theta} - 2\frac{g}{a} \frac{\sin \theta}{1 + 2 \sin^2 \theta},$$

koja ima oblik nehomogene linearne diferencijalne jednačine prvog reda (u kojoj je nepoznata funkcija $\frac{1}{2} \dot{\theta}^2$, a nezavisno promenljiva θ), čijim rešavanjem se dobija

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 = \frac{1}{1 + 2 \sin^2 \theta} \left(\frac{1}{2} \Omega^2 \sin^2 \theta + 2\frac{g}{a} \cos \theta + K \right), \quad (9.72)$$

gde je K integraciona konstanta (detalji računa: $P(\theta) = 4 \sin \theta \cos \theta / (1 + 2 \sin^2 \theta)$, pa je $\int P(\theta) d\theta = \int d(1 + 2 \sin^2 \theta) / (1 + 2 \sin^2 \theta) = \ln(1 + 2 \sin^2 \theta)$, itd). Ako se iz ove jednačine eksplicitno izrazi K i pomnoži sa $2ma^2$ sledi jednačina, koja se, uzimajući u obzir izraze za kinetičku i potencijalnu energiju nađene u prethodnom delu rešenja, svodi na

$$T + U - 2ma^2 \Omega^2 \sin^2 \theta = 2Kma^2,$$

što znači da ukupna mehanička energija $E = T + U$ nije integral kretanja (ona je konstantna samo u specijalnom slučaju $\theta = \text{const}$). To je, naravno, trebalo i očekivati zbog postojanja nestacionarne veze ($\varphi = \omega t$, za čestice koje se ne nalaze na osi rotacije).

(iii) Iz Lagranževe jednačine sledi da ukoliko postoji rešenje $\theta = \theta_0 = \text{const}$, ono mora da zadovoljava jednačinu

$$\sin \theta_0 \left(2\frac{g}{a} - \Omega^2 \cos \theta_0 \right) = 0,$$

tj. ili je: (1) $\theta_0 = 0$ ili (2) $\cos \theta_0 = 2g/(a\Omega^2)$. U slučaju (1) linearizacijom Lagranževe jednačine dobijamo jednačinu

$$\ddot{\eta} + \left(2\frac{g}{a} - \Omega^2 \right) \eta = 0,$$

koja se zbog uslova $\Omega > \sqrt{\frac{2g}{a}}$ ne svodi na jednačinu linearnog harmonijskog oscilatora, već su njena rešenja eksponencijalne funkcije vremena. U slučaju (2) linearizacijom Lagranževe jednačine oko θ_0 , dobijamo jednačinu linearnog harmonijskog oscilatora:

$$\ddot{\eta} + \omega^2 \eta = 0, \quad \omega = \Omega \sqrt{\frac{\Omega^4 - \Omega_0^4}{3\Omega^4 - 2\Omega_0^4}}, \quad \Omega_0^2 = \frac{2g}{a}.$$

Detalji linearizacije: ako se Lagranževa jednačina napiše u obliku:

$$\ddot{\theta} + 2 \frac{\sin \theta \cos \theta}{1 + 2 \sin^2 \theta} \dot{\theta}^2 + \frac{\sin \theta (2 \frac{g}{a} - \Omega^2 \cos \theta)}{1 + 2 \sin^2 \theta} = 0,$$

član sa $\dot{\theta}^2 = \dot{\eta}^2$ se zanemaruje, a treći član sa leve strane jednačine postaje

$$\frac{\sin(\theta_0 + \eta) (2 \frac{g}{a} - \Omega^2 \cos(\theta_0 + \eta))}{1 + 2 \sin^2(\theta_0 + \eta)} \approx \frac{(\sin \theta_0 + \eta \cos \theta_0) (2 \frac{g}{a} - \Omega^2 \cos \theta_0 + \eta \Omega^2 \sin \theta_0)}{1 + 2 \sin^2 \theta_0} \approx \eta \Omega^2 \frac{\sin^2 \theta_0}{1 + 2 \sin^2 \theta_0}.$$

4. Integral kretanja (9.72) dobijen u rešenju drugog dela zadatka u ovom slučaju ima oblik:

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 (1 + 2 \sin^2 \theta) - \Omega^2 \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta + \cos \theta \right) = K = \frac{1}{2} \Omega^2 (\epsilon^2 - 2).$$

Odatle je

$$\dot{\theta}^2 = \Omega^2 \frac{\epsilon^2 - 2 + \sin^2 \theta + 2 \cos \theta}{1 + 2 \sin^2 \theta} = \Omega^2 \frac{\epsilon^2 - 4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}{1 + 2 \sin^2 \theta} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\Omega} \int_0^\alpha d\theta \frac{\sqrt{1 + 2 \sin^2 \theta}}{\sqrt{\epsilon^2 - 4 \sin^4 \frac{\theta}{2}}}.$$

Deo II

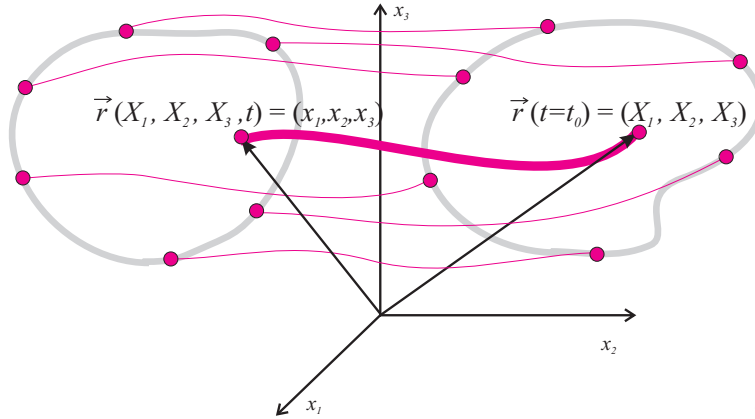
Mehanika neprekidnih sistema

Glava 10

Opisivanje kretanja

10.1 Hipoteza kontinuuma

Supstanca se sastoji od molekula, koji se sastoje od atoma i subatomske čestice. Ona, dakle, nije kontinualna. Pa ipak, postoje mnogi aspekti ponašanja raznih materijala, kao što je, npr, istezanje čelične šipke pod delovanjem neke sile ili postojanje sile otpora pri kretanju tela kroz vazduh i slično, koji se mogu opisati i predvideti pomoću teorija koje ne uzimaju u obzir diskretnu prirodu supstance. U osnovi tih teorija leži tzv. *hipoteza kontinuuma*, po kojoj su materijali beskonačno deljivi. U skladu sa hipotezom kontinuuma moguće je uočiti infinitezimalno malu zapreminu supstance, koja se naziva delić kontinuuma, pri čemu u svakoj okolini tog delića postoji supstanca. Da li je hipoteza kontinuuma opravdana ili ne zavisi od posmatrane situacije: npr. u mnogim slučajevima moguće je čelik smatrati kontinualnim materijalom, ali ne i ako se posmatra prostiranje talasa izuzetno malih talasnih dužina kroz njega. S druge strane, osobine razređenog gasa pod određenim okolnostima mogu se odlično opisati smatrajući gas neprekidnom sredinom. U svakom slučaju, nije dobro opravdavati kontinualni pristup brojem čestica u određenoj zapremini (tj. gustinom). Na kraju krajeva, infinitezimalno mala zapremina u limesu ili sadrži elementarnu česticu ili ne sadrži ništa. U tom smislu treba imati u vidu da matematički gledano delić predstavlja tačku, ali sa stanovišta fizike, to je mala zapremina (mnogo manja od ukupne zapremine razmatranog sistema) u kojoj se još uvek nalazi puno čestica $N \gg 1$, ali mnogo manje od ukupnog broja čestica u sistemu. Takva mala zapremina naziva se *fizički* beskonačno mala zapremina. Takođe, vrednosti fizičkih veličine „u tački” \vec{r} i „u trenutku” t , zapravo predstavljaju *lokalne vrednosti*, tj. vrednosti razmatrane veličine usrednjene po fizički beskonačno maloj zapremini, u kratkom vremenskom intervalu. Ovaj kratki vremenski interval, može se slično uvesti kao *fizički* beskonačno kratak, tj. to je interval mnogo kraći od ukupnog vremena razmatranja sistema, u toku kog se pri merenju ta veličina ne menja toliko da bi se promenila njena srednja vrednost, ali dovoljno dugačak da mikroskopske promene unutar delića ne dođu do izražaja. Samo ako je u razmatranoj situaciji moguće na takav način uvesti delić, koji dalje može da se tretira kao čestica, hipoteza kontinuuma ima smisla. Konačan odgovor na pitanje da li je hipoteza kontinuuma opravdana u nekoj situaciji ili nije daje samo eksperimentalna provera. Ono što će u okviru ovog kursa biti razmatrano u praksi je već veoma dugo potvrđivano u raznim situacijama, pa ćemo u daljem toku kursa uvek smatrati da se ono što radimo odnosi na slučajeve kada su zadovoljeni uslovi za primenu hipoteze kontinuuma.



Slika 10.1: U supstancijalnom metodu prati se kretanje delića sredine.

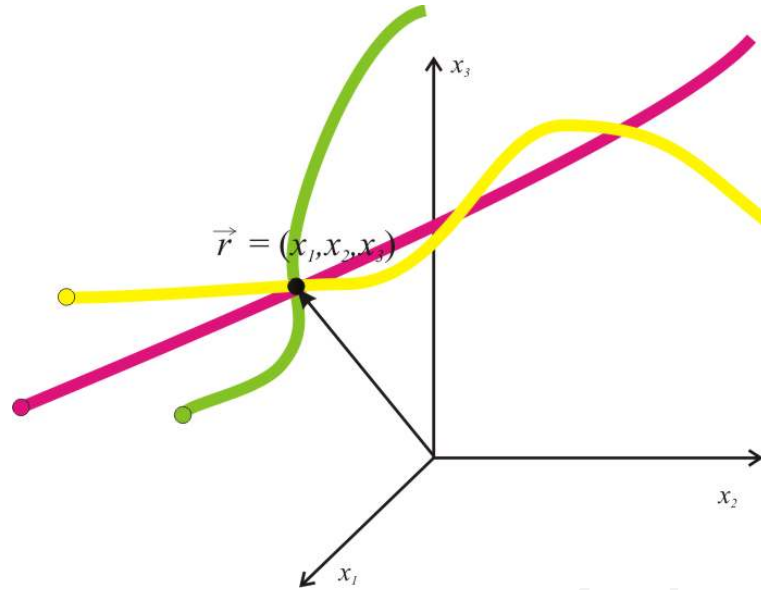
10.2 Lagranžev i Ojlerov metod

Postoje dva osnovna pristupa prilikom proučavanja kontinualne sredine: (1) Lagranžev ili supstancijalni i (2) Ojlerov ili metod polja.

1. **Lagranžev metod.** Kod ovog metoda uoči se položaj svih delića u nekom početnom trenutku $t = t_0$ i dalje se prati kretanje svakog od tih delića. Ako se neki delić u početnom trenutku nalazio u tački $\vec{r}_0 = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$, onda možemo da kažemo da će se u proizvoljnom sledećem trenutku on nalaziti u tački $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$, čiji položaj zavisi kako od početnog položaja $\vec{r}_0 = (X_1, X_2, X_3)$, tako i trenutka t (slika 1). Sve fizičke veličine razmatramo duž putanje delića, dakle u funkciji početnih koordinata (X_1, X_2, X_3) i vremenskog trenutka t . Ako, recimo, sa T označimo temperaturu, onda $T(X_1, X_2, X_3, t)$ predstavlja temperaturu u tački u kojoj se u trenutku t nalazi delić koji se u početnom trenutku nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) . Kolokvijalno bismo mogli da kažemo da se u ovom pristupu razmatraju fizičke veličine i pojave onako kako ih „osećaju” delići, tj. supstanca, pa se zato ovaj pristup zove i supstancijalni, a promenljive (X_1, X_2, X_3) supstancijalne promenljive. Slično, zapremina koja se uvek sastoji od istih delića naziva se „supstancijalna zapremina”. Ilustracija primene Lagranževog metoda je razmatranje pomeranja velikih vazdušnih masa na satelitskim snimcima u realnom vremenu.

2. **Ojlerov metod** odgovara matematičkom metodu polja, tj. sve fizičke veličine razmatraju se u tački prostora $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, čisto geometrijski, nezavisno od toga koji se delić nalazi u toj tački, u proizvoljnom vremenskom trenutku t (slika 2). U tom metodu bi izraz $T(x_1, x_2, x_3, t)$ predstavljao temperaturu u tački (x_1, x_2, x_3) u trenutku t . Poređenja radi, mogli bismo da kažemo da $T(x_1, x_2, x_3, t)$ predstavlja temperaturu koju „oseća” delić koji se u trenutku t našao na mestu (x_1, x_2, x_3) . U ovom pristupu nas, dakle, ne interesuje šta se sa tim delićem ranije dešavalo, niti šta će se sa njim dešavati posle prolaska kroz tu tačku. Koordinate (x_1, x_2, x_3) nazivaju se Ojlerove promenljive. Beleženje dnevnih vrednosti temperature, pritiska i brzine vetra na jednom mestu predstavlja primer primene Ojlerovog metoda.

Iako se u svakoj situaciji mogu primeniti i jedan i drugi metod, Lagranžev metod se češće primenjuje kod čvrstih tela, kod kojih je pokretljivost delića mala, tj. obično čestice osciluju oko



Slika 10.2: U Ojlerovom metodu prati se šta se dešava u fiksiranoj tački prostora.

nekog svog srednjeg položaja, dok se kod fluida, koji se odlikuju velikom pokretljivošću, najčešće primenjuje Ojlerov metod.

Primer 10.2.1. Polje brzine u kontinualnoj sredini definisano je jednačinama: $v_1 = ax_2$, $v_2 = -ax_1$, $v_3 = 0$, gde je a konstanta. Nađimo trajektoriju delića koji se u trenutku $t = 0$ nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) . Iz definicije brzine $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ slede jednačine:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_2, \quad (10.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1, \quad (10.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0. \quad (10.3)$$

Iz poslednje jednačine trivijalno sledi da je $x_3(t) = \text{const} = X_3$. Diferenciranjem jednačine (10.1) po vremenu sledi jednačina

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a \frac{dx_2}{dt}, \quad (10.4)$$

pa zamenom $\frac{dx_2}{dt}$ iz jednačine (10.2) dobijamo jednačinu

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -a^2x_1, \quad (10.5)$$

odnosno

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + a^2x_1 = 0, \quad (10.6)$$

čije opšte rešenje ima oblik

$$x_1(t) = A \cos at + B \sin at. \quad (10.7)$$

Iz uslova da je $x_1(0) = X_1$ sledi da je $A = X_1$, pa zamenom tako dobijenog izraza za x_1 u jednačinu (10.1), direktno sledi izraz za x_2 :

$$x_2(t) = \frac{1}{a} \frac{dx_1}{dt} = -X_1 \sin at + B \cos at. \quad (10.8)$$

Kako je $x_2(0) = X_2$, sledi da je $B = X_2$, pa se konačno dobija $x_2(t) = -X_1 \sin at + X_2 \cos at$. Konačnim jednačinama

$$x_1(t) = X_1 \cos at + X_2 \sin at, \quad x_2(t) = -X_1 \sin at + X_2 \cos at, \quad x_3(t) = X_3 \quad (10.9)$$

opisano je kretanje delića Lagranževom metodom. Eliminacijom vremena iz ovih jednačina lako se dobija i eksplicitna jednačina trajektorije delića: $x_1^2 + x_2^2 = X_1^2 + X_2^2$, $x_3 = X_3$, tj. delići se kreću po kružnicama, koje leže u ravnima normalnim na x_3 osu, sa centrom upravo na x_3 osi.

10.3 Supstancijalni izvod

Pretpostavimo da razmatramo neku vektorsku fizičku veličinu \vec{A} i uočimo dve njene vrednosti: u tački $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ u trenutku t i u infinitezimalno bliskoj tački $\vec{r} + d\vec{r} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ i infinitezimalno bliskom vremenskom trenutku $t + dt$. Primenjujući matematički izraz za diferencijal funkcije više promenljivih, možemo da pišemo da je:

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt, \quad (10.10)$$

gde je $d\vec{A} = \vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t)$. Ovaj izraz važi za bilo kakve infinitezimalne vrednosti $d\vec{r}$ i dt , međutim, ako nas zanima kako se menja veličina \vec{A} duž trajektorije delića, onda važi $d\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}, t)dt$, gde je $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$ polje brzine u razmatranoj kontinualnoj sredini (brzina delića). Onda iz formule (10.10) sledi

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt, \quad (10.11)$$

odnosno

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (10.12)$$

što se uz pomoć Hamiltonovog (nabla) operatora

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

može napisati kao

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (10.13)$$

Izraz $(\vec{v} \cdot \nabla)$ je kraći zapis za

$$v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

i formalno predstavlja skalarni proizvod vektora brzine \vec{v} i nabla operatora ∇ .

Izraz (10.12) predstavlja brzinu promene vektorske veličine \vec{A} duž trajektorije delića, dakle brzinu promene \vec{A} , kako je „oseća” supstanca, pa se zato naziva **supstancijalni izvod** veličine \vec{A} . Na sličan način bismo mogli da izvedemo i izraz za brzinu promene skalarnog polja $f(\vec{r}, t)$ duž trajektorije delića. Tako bismo dobili

$$\frac{df}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{v} \cdot \text{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (10.14)$$

Vidimo da se supstancijalni izvod, kako vektorske, tako i skalarne veličine, sastoji od dva sabirka: $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}(f)$ i $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} (\frac{\partial f}{\partial t})$. Prvi u sebi sadrži polje brzine i parcijalne izvode po prostornim koordinatama, pa se fizički može protumačiti da potiče od toga što delići koji pristižu u uočenu tačku sa sobom donose promenu fizičke situacije, tj. vrednosti razmatrane fizičke veličine. Drugi sabirak predstavlja lokalnu promenu fizičke veličine sa vremenom.

Ubrzanje delića po definiciji predstavlja supstancijalni izvod brzine, pa je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (10.15)$$

Primer 10.3.1. Nađimo ubrzanje delića, ako su njihove brzine definisane poljem iz Primera 10.2.1. To ćemo uraditi prvo direktno, koristeći konačne jednačine kretanja koje smo već našli, a zatim pomoću formule (10.15).

Diferenciranjem jednačina (10.9) dva puta po vremenu dobijamo izraze za Dekartove komponente ubrzanja u Lagranževom opisu:

$$a_1(X_1, X_2, X_3, t) = -a^2(X_1 \cos at + X_2 \sin at), \quad (10.16)$$

$$a_2(X_1, X_2, X_3, t) = -a^2(-X_1 \sin at + X_2 \cos at), \quad (10.17)$$

$$a_3(X_1, X_2, X_3, t) = 0, \quad (10.18)$$

iz kojih se lako vidi (poređenjem sa jednačinama (10.9)) da je polje ubrzanja onda dato jednačinama

$$a_1(x_1, x_2, x_3, t) = -a^2 x_1, \quad a_2(x_1, x_2, x_3, t) = -a^2 x_2, \quad a_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (10.19)$$

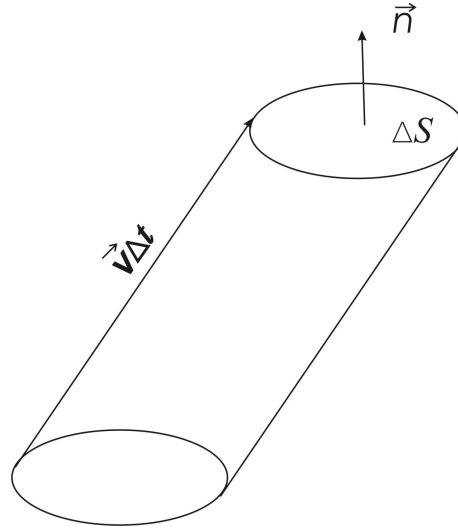
S druge strane, direktnom primenom formule (10.15) na polje $\vec{v} = ax_2 \vec{e}_1 - ax_1 \vec{e}_2$ dobija se

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} = -a^2(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2), \quad (10.20)$$

što je, naravno, ekvivalentno formulama (10.19).

10.4 Jednačina kontinuiteta

Masa supstance koja u jedinici vremena prođe kroz neku površinu (zatvorenu ili otvorenu) naziva se *protok* kroz tu površinu. Izračunaćemo prvo protok kroz malu otvorenu površinu ΔS , čiji je ort normale \vec{n} . Pretpostavićemo da su nam poznati polje brzine \vec{v} i polje gustine ρ . Kroz površinu ΔS za vreme Δt prođu svi delići koji se nalaze unutar cilindra čija se gornja osnova poklapa sa ΔS , a dužina izvodnice (čiji je pravac određen vektorom \vec{v}) mu je jednaka $|\vec{v}| \Delta t$ (slika 10.3). Dakle,



Slika 10.3: Kroz malu površinu ΔS za kratko vreme Δt prođu svi delići koji se nalaze unutar cilindra čija je izvodnica određena vektorom $\vec{v}\Delta t$.

kroz uočenu malu površinu će za vreme Δt proći masa Δm koja se nalazi unutar tog cilindra, pa je $\Delta m = \Delta V \rho$, gde je ΔV zapremina cilindra. Ovde smo pretpostavili da je Δt malo (što ne smanjuje opštost izvođenja), pa je i zapremina cilindra mala, što znači da se može smatrati da se gustina unutar njega ne menja značajno. Zapremina cilindra jednaka je $\Delta V = \Delta S h$, gde je h visina cilindra i iznosi $h = (\vec{v}\Delta t) \cdot \vec{n}$, kao projekcija izvodnice na normalu osnove. Imajući sve to u vidu dalje sledi

$$\Delta m = \rho \Delta S (\vec{v}\Delta t) \cdot \vec{n} = \rho (\vec{n}\Delta S) \cdot \vec{v} \Delta t, \quad (10.21)$$

pa je protok ΔQ po definiciji jednak

$$\Delta Q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho (\vec{n}\Delta S) \cdot \vec{v}. \quad (10.22)$$

U slučaju infinitezimalno male površine dS , izraz za protok može da se piše kao

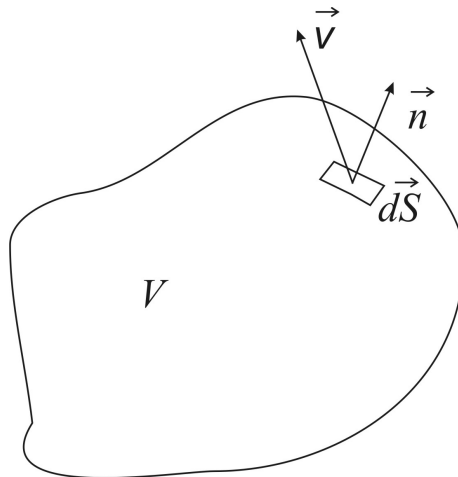
$$dQ = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad (10.23)$$

gde smo sa $d\vec{S} = \vec{n} dS$ označili vektor elementarne površine. Ukoliko se radi o većoj površini S , protok kroz nju može da se izračuna tako što se ona podeli na male površine, za svaku se izračuna protok i na kraju se svi ti protoci saberu. Ukoliko se površina podeli na infinitezimalno male površine, sumiranje odgovara integraciji po površini, pa izraz za protok Q , imajući u vidu poslednju formulu za protok kroz infinitezimalnu površinu, može da se piše u obliku površinskog integrala:

$$Q = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (10.24)$$

Ukoliko se gustina ne menja, ρ u prethodnom izrazu može da izađe ispred integrala, pa je uobičajeno da se u takvim slučajevima govori o zapreminskom protoku F , koji se definiše kao zapremina fluida koja u jedinici vremena prođe kroz datu površinu i očigledno je jednaka:

$$F = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (10.25)$$



Slika 10.4: Kontrolna zapremina V fiksirana je u prostoru i kroz nju delići prolaze.

Primer 10.4.1. Ukoliko polje iz Primera 10.2.1 opisuje strujanje fluida konstantne gustine ρ izračunajmo protok fluida kroz površinu pravougaonika koji leži u ravni $x_2 = 0$ i $0 \leq x_1 \leq L$, $0 \leq x_3 \leq H$.

Prema formuli (10.24) traženi protok je

$$\begin{aligned} Q &= \rho \int_S (ax_2 \vec{e}_1 - ax_1 \vec{e}_2) \cdot (dS \vec{e}_2) = \rho \int_0^L dx_1 \int_0^H dx_2 (-ax_1) \\ &= -a\rho \int_0^L x_1 dx_1 \int_0^H dx_2 = -\frac{1}{2}a\rho L^2 H. \end{aligned}$$

Znak minus se pojavio zbog toga što smo ort normale na površinu izabrali u smeru orta e_2 , dok brzina u tačkama uočene površine ima suprotan smer (tj. smer vektora $-ax_1 \vec{e}_2$).

Uočimo sada jednu fiksiranu zapreminu V (slika 10.4), koja se u toku vremena ne menja (tzv. kontrolna zapremina). Bez obzira šta se dešava sa delićima kontinualne sredine koju posmatramo, masa m sadržana u zapremini V u svakom trenutku jednaka je

$$m(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (10.26)$$

gde je $\rho(\vec{r}, t)$ polje brzine. Brzina promene mase (promena mase u jedinici vremena) jednaka je

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV, \quad (10.27)$$

gde je totalni izvod po vremenu mogao da „prođe” kroz određeni integral po zapremini zahvaljujući tome što je zapremina fiksirana (ne zavisi od vremena), ali se pri tome „pretvorio” u parcijalni izvod po vremenu, pošto ρ zavisi i od koordinata i vremena. S druge strane, masa unutar zapremine V se u jedinici vremena promeni za onoliko koliko uđe ili izađe kroz ukupnu površinu S koja obuhvata V , tj. brzina promene mase jednaka je protoku kroz graničnu površinu S . Ako ortove normala na S

orijentišemo kao spoljne normale (iz unutrašnjosti prema spoljašnjosti) onda prema formuli (10.24) za protok možemo da pišemo da je

$$\frac{dm}{dt} = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (10.28)$$

Znak minus na desnoj strani ove jednakosti pojavio se zato što izabrana orijentacija normala zapravo znači da posmatramo protok iz unutrašnjosti V , tj. za koliko se smanji masa unutar V u jedinici vremena. Pošto se poslednji površinski integral odnosi na zatvorenu površinu, na njega možemo da primenimo teoremu Gausa-Ostrogradskog, čime dalje dobijamo:

$$\frac{dm}{dt} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV, \quad (10.29)$$

što u kombinaciji sa (10.27) daje

$$\int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV, \quad (10.30)$$

odnosno

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0. \quad (10.31)$$

Poslednja relacija važi za proizvoljnu fiksiranu zapreminu V , a to je moguće jedino ako je u svakoj tački i u svakom trenutku podintegralna funkcija jednaka nuli, tj. ako važi jednačina

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (10.32)$$

Ova jednačina poznata je kao **jednačina kontinuiteta** i predstavlja posledicu klasičnog zakona održanja mase (masa u V može da uđe ili izađe, ne može da se smanji ili poveća bez prolaska čestica kroz S). Alternativno, ona može da se zapiše i kao

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (10.33)$$

gde je iskorišćen izraz za supstancijalni izvod funkcije ρ i identitet:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v}.$$

Iz ovog drugog oblika jednačine kontinuiteta vidi se da ukoliko se duž trajektorije delića gustina ρ ne menja, što znači da je njen supstancijalni izvod $\frac{d\rho}{dt}$ jednak nuli, sledi uslov

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (10.34)$$

Ova jednačina poznata je kao **uslov nestišljivosti**.

Primer 10.4.2. Lako se proverava da polje brzine definisano u primeru 10.2.1 zadovoljava uslov nestišljivosti:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial(ax_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(-ax_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(0)}{\partial x_3} = 0.$$

10.5 Tenzor brzine deformacije i vektor vrtložnosti

Neka je zadato polje brzine $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}(\vec{x}, t)$. Za dve infinitezimalno bliske tačke u prostoru \vec{x} i $\vec{x} + d\vec{x}$ važi

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t) = d\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} dx_i, \quad (10.35)$$

odakle se vidi da su komponente vektora $d\vec{v}$ linearne homogene funkcije komponenta vektora $d\vec{x}$, tj. prethodnu relaciju možemo da napišemo u sledećem matricnom obliku:

$$\begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \quad (10.36)$$

Ovo znači da postoji linearni operator (ili tenzor) $\tilde{\mathcal{T}}$, koji je u sistemu $Ox_1x_2x_3$ reprezentovan matricom

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (10.37)$$

Tenzor $\tilde{\mathcal{T}}$ možemo da napišemo u obliku zbira njegovog simetričnog $\tilde{\mathcal{S}}$ i antisimetričnog dela $\tilde{\mathcal{R}}$ kao:

$$\tilde{\mathcal{T}} = \tilde{\mathcal{S}} + \tilde{\mathcal{R}}, \quad \mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (10.38)$$

Simetrični tenzor $\tilde{\mathcal{S}}$ nazivamo **tenzorom brzine deformacije**. Da bismo videli kakav fizički smisao ima ovaj tenzor uočimo kratku supstancijalnu duž (tj. duž koja se sastoji od delića kontinualne sredine koju razmatramo) $\Delta\vec{x}$, koja u trenutku t ima pravac ose x_1 i dužinu Δs (slika 10.5). Za kratko vreme Δt , ova duž se pomeri, pri čemu joj se dužina i orijentacija takođe promene. Ako su Δs i Δt dovoljno mali možemo da pretpostavimo da su te promene male. Početna tačka uočene duži se u pravcu x_1 za vreme Δt pomeri za $v_1(\vec{x}, t)\Delta t$, a krajnja za $v_1(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t)\Delta t = (v_1(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta s)\Delta t$, tako da projekcija ove duži na x_1 osu u trenutku $t + \Delta t$ ima dužinu

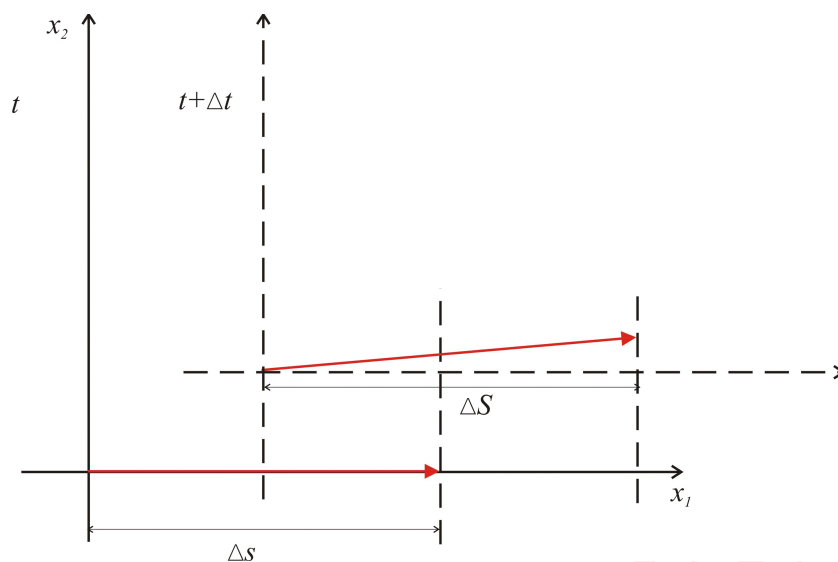
$$\Delta S = \left(\Delta s + \left(v_1(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta s \right) \Delta t \right) - v_1(\vec{x}, t)\Delta t = \Delta s \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta t \right). \quad (10.39)$$

Odatle direktno sledi

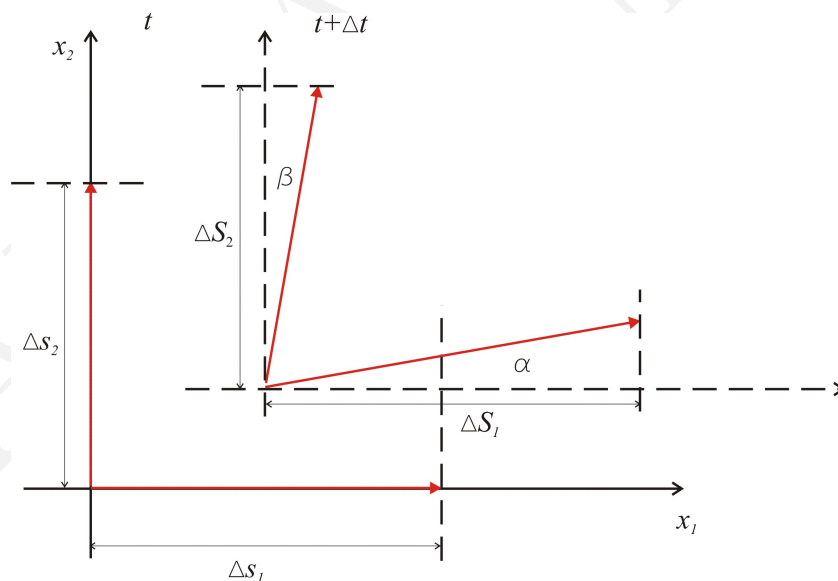
$$\frac{\Delta S - \Delta s}{\Delta t \Delta s} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \mathcal{S}_{11}, \quad (10.40)$$

što znači da dijagonalni element \mathcal{S}_{11} tenzora brzine deformacije ima smisao relativne promene dužine u jedinici vremena supstancijalnih duži u pravcu ose x_1 . Sličnim postupkom bi se moglo pokazati da i preostala dva dijagonalna elementa imaju smisao brzine relativne promene dužine u odgovarajućem pravcu. Još opštije, može se pokazati da veličina $\vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{S}} \cdot \vec{n}$, gde je \vec{n} ort proizvoljnog pravca, ima fizički smisao brzine promene dužine infinitezimalnih supstancijalnih duži u pravcu orta \vec{n} .

Vandijagonalni elementi tenzora brzine deformacije su u vezi sa promenama uglova. Da bismo se u to uverili uočimo dve male supstancijalne duži sa zajedničkim početkom: $\Delta\vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ i $\Delta\vec{x}^2 =$



Slika 10.5: Kratka supstancijalna duž $\Delta\vec{x} = \Delta s\vec{e}_1$ u trenutku t i njena projekcija na ravan x_1x_2 u bliskom sledećem trenutku $t + \Delta t$ (crveni vektori). Za kratko vreme Δt duž je promenila samo svoju orijentaciju i dužinu.



Slika 10.6: Dve kratke supstancijalne duži u trenutku t i njihova projekcija na ravan x_1x_2 u trenutku $t + \Delta t$.

$\Delta s_2 \vec{e}_2$, u trenutku t . Nakon kratkog vremenskog intervala Δt ove dve duži promene pravac, tako da projekcija prve duži na ravan $x_1 x_2$ zaklapa mali ugao α sa osom x_1 , a projekcija druge mali ugao β sa osom x_2 (slika 10.6). Zajednička tačka ovih duži u pravcu x_2 za vreme Δt pređe put $v_2(\vec{x}, t) \Delta t$, a drugi kraj duži $\Delta \vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ se u pravcu x_2 pomeri za $v_2(\vec{x} + \Delta s_1 \vec{e}_1, t) \Delta t = (v_2(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta s_1) \Delta t$. Ugao α je onda jednak

$$\alpha \approx \operatorname{tg} \alpha = \frac{(v_2(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta s_1) \Delta t - v_2(\vec{x}, t) \Delta t}{\Delta s_1 \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t\right)} \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta t. \quad (10.41)$$

Slično, ugao β je jednak

$$\beta \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Delta t, \quad (10.42)$$

pa je vandijagonalni element \mathcal{S}_{12} jednak

$$\mathcal{S}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\alpha + \beta}{2 \Delta t}. \quad (10.43)$$

Drugim rečima, vandijagonalni element \mathcal{S}_{12} ima smisao polovine promene ugla između supstancijalnih duži koje imaju pravac osa x_1 i x_2 , u jedinici vremena. Slično se pokazuje da je veličina $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{m}$ jednaka polovini brzine promene ugla između infinitezimalnih supstancijalnih duži u pravcu međusobno ortogonalnih ortova \vec{n} i \vec{m} .

Vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ definiše se kao

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}, \quad (10.44)$$

odakle sledi da je antisimetrični tenzor $\tilde{\mathcal{R}}$ reprezentovan matricom

$$\tilde{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (10.45)$$

pa se lako pokazuje da je

$$\tilde{\mathcal{R}} d\vec{x} = \vec{\omega} \times d\vec{x}. \quad (10.46)$$

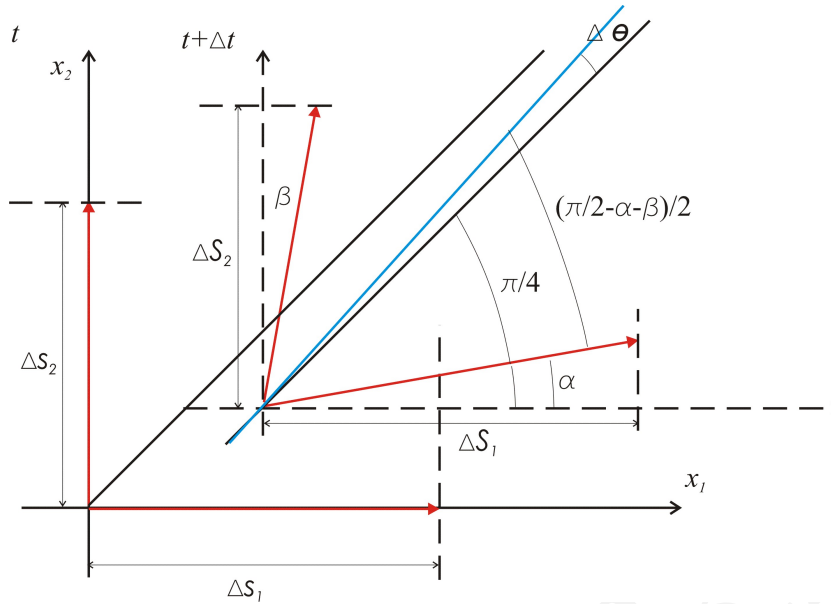
Ako ponovo uočimo male supstancijalne duži $\Delta \vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ i $\Delta \vec{x}^2 = \Delta s_2 \vec{e}_2$, u trenutku t i simetralu ugla između ovih duži, a zatim simetralu ugla koji projekcije ovih duži zaklapaju u trenutku $t + \Delta t$, sa slike 10.7 se vidi da je ugao $\Delta \theta$ za koji se simetrala zaokrene za vreme Δt jednak

$$\Delta \theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \Delta t = \omega_3 \Delta t, \quad (10.47)$$

pa je

$$\frac{\Delta \theta}{\Delta t} = \omega_3, \quad (10.48)$$

tj. komponenta ω_3 vektora vrtložnosti ima smisao ugaone brzine rotacije simetrale ugla između supstancijalnih duži koje se kreću u ravni $Ox_1 x_2$. Slično se može pokazati i za preostale komponente vektora vrtložnosti $\vec{\omega}$, što znači da se deo promene brzine $d\vec{v}$ (10.35) koji odgovara antisimetričnom



Slika 10.7: Projekcija (na ravan x_1x_2) simetrale ugla koji zaklapaju dve male supstancijalne duži za kratko vreme Δt zaokrene se za mali ugao $\Delta\Theta$.

delu tenzora $\tilde{\mathcal{T}}$ može interpretirati kao brzina pri rotaciji ugaonom brzinom jednakom vektoru vrtložnosti $\vec{\omega}$. Konačno, iz relacije

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{\omega} \times d\vec{x} + \tilde{\mathcal{S}}d\vec{x} \quad (10.49)$$

možemo da zaključimo da je kretanje infinitezimalnih delova unutar kontinualne sredine može opisati kao kombinacija translatornog, rotacionog i deformacionog kretanja, kojima redom odgovaraju brzine $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $\vec{\omega} \times d\vec{x}$ i $\tilde{\mathcal{S}}d\vec{x}$ u prethodnom izrazu.

Primer 10.5.1. Polju brzine iz Primera 10.2.1 odgovaraju matrice

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \mathcal{T}^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} - \mathcal{T}^T) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. tenzor \mathcal{T} je antisimetričan i jednak tenzoru vrtložnosti \mathcal{R} , a tenzor brzine deformacije je nulti tenzor $\mathcal{S} = 0$. Ovo je u skladu sa već donetim zaključkom da ovakvo polje brzine opisuje kretanje pri kome delići rotiraju oko x_3 ose ugaonom brzinom a , pa se prilikom ovakvog kretanja sredina ne deformiše.

Primer 10.5.2. Polje brzine oblika $\vec{v} = kx_2\vec{e}_1$ opisuje kretanje pri kome se delići kreću po pravim linijama paralelnim osi x_1 . Tenzorima brzine deformacije i vrtložnosti u ovom slučaju odgovaraju

matrice

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

što znači da se infinitezimalne supstancijalne duži koje imaju pravac koordinatnih osa ne deformišu, ali se uglovi između dve takve duži, jedne u pravcu ose x_1 , a druge u pravcu ose x_2 menjaju. Drugim rečima, pri ovakvom kretanju dolazi do deformacija iskošenja, tj. do promene oblika malih delova ovakve sredine koje se u toku kretanja sastoje od istih čestica (supstancijalne zapremine), ali ne i do promene ukupne zapremine takvih delova. Zaista, sredina je pri ovakvom kretanju nestišljiva, pošto je $\text{div} \vec{v} = \text{Tr} \mathcal{S} = 0$. Činjenica da su tenzor i vektor vrtložnosti različiti od nule može se na prvi pogled učiniti čudnom, s obzirom na to da se delići kreću pravolinijski. Međutim, ovde nikakvog apsurdna nema, pošto $\vec{\omega} \neq 0$ ukazuje samo na činjenicu da postoje mali supstancijalni delovi sredine koji rotiraju. U ovom slučaju to su, recimo, supstancijalne duži koje su u nekom trenutku postavljene u pravcu ose x_2 .

ZADACI

Zadatak 10.5.1. Polje brzine u Dekartovim koordinatama ima oblik

$$v_1 = K x_1, \quad v_2 = K x_2 (1 + 2t/\tau), \quad v_3 = 0,$$

gde su K i τ zadate pozitivne konstante.

- (i) Naći konačne jednačine kretanja, tj. položaj delića u trenutku t , ako se u početnom trenutku $t = 0$ taj delić nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) .
- (ii) Naći brzinu \vec{v} u Lagranževim promenljivim (tj. brzinu delića, koji se u početnom trenutku nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) , u proizvoljnom trenutku t).
- (iii) Ako je poznato da je gustina ρ u fiksiranom vremenskom trenutku ista u svim tačkama, kao i da je u trenutku $t = 0$ ona iznosila ρ_0 , naći $\rho(t)$.

Zadatak 10.5.2. Fluid gustine $\rho = \rho_0(2 - \cos \omega t)$ (ρ_0 i ω su zadate pozitivne konstante) struji tako da polje brzine ima oblik $\vec{v} = u(x_1, t)\vec{e}_1$. Naći: (i) funkciju $u(x_1, t)$, ako je poznato da je $u(x_1 = 0, t) = U$ ($U = \text{const}$), pa na osnovu toga i (ii) polje ubrzanja.

Zadatak 10.5.3. Fluid struji tako da je proizvod njegove gustine ρ i brzine \vec{v} zadat poljem

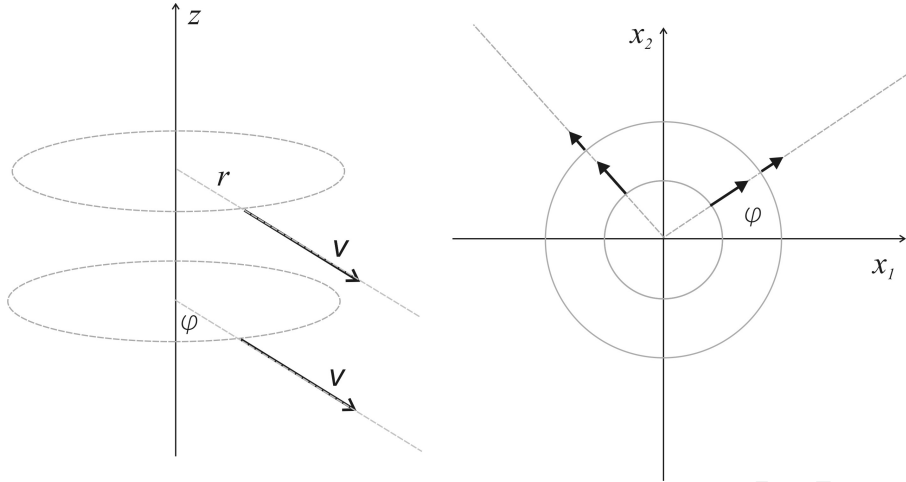
$$\rho \vec{v} = K(4x_1^2 x_2 \vec{e}_1 + x_1 x_2 x_3 \vec{e}_2 + x_2 x_3^2 \vec{e}_3).$$

Izračunati za koliko se u jedinici vremena promeni masa fluida sadržana u zapremini kocke ograničene ravnima: $x_1 = 0, x_1 = 1, x_2 = 0, x_2 = 1, x_3 = 0, x_3 = 1$. Zadatak uraditi na dva načina: (i) direktno pomoću izraza za protok i (ii) primenom teoreme Gausa-Ostrogradskog na izraz za protok.

Zadatak 10.5.4. Pod *linijskim izvorom* podrazumeva se stacionarno strujanje fluida konstantne gustine, pri kome polje brzine u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$\vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_r,$$

gde je C konstanta (slika 10.8).



Slika 10.8: Linijski izvor.

- (i) Uveriti se da je pri ovakvom strujanju zadovoljen uslov nestišljivosti (10.34).
- (ii) Izračunati *jačinu linijskog izvora* m , koja se definiše kao zapremina fluida koja u jedinici vremena istiche sa jedinične dužine izvora (tj. z -ose).
- (iii) Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$.
- (iv) Izraziti \vec{v} u Dekartovim koordinatama i naći matricu koja odgovara tenzoru brzine deformacije. Naći brzinu promene relativne promene dužine supstancijalnih duži koje imaju radijalni pravac.

Zadatak 10.5.5. Pod *linijskim vrtlogom* podrazumeva se stacionarno strujanje fluida konstantne gustine, pri kome polje brzine u cilindričnim koordinatama ima oblik:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi,$$

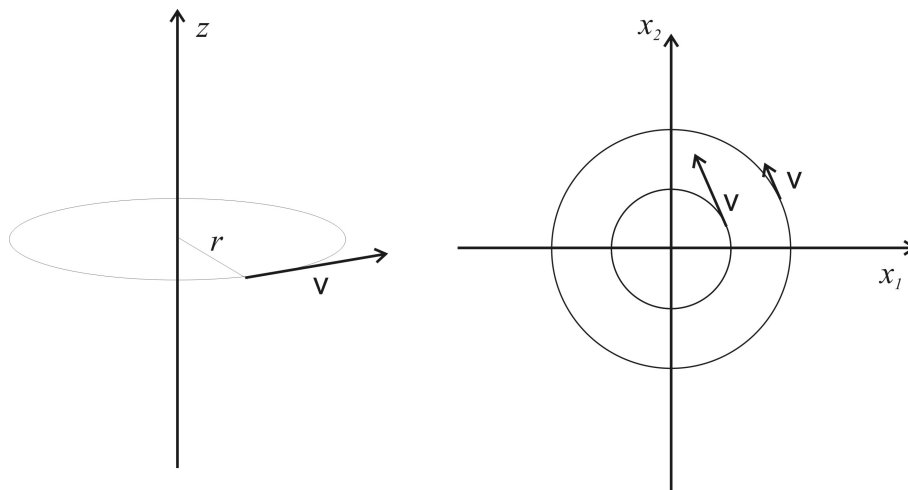
gde je Γ konstanta (slika 10.9).

- (i) Uveriti se da je pri ovakvom strujanju zadovoljen uslov nestišljivosti (10.34).
- (ii) Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$.
- (iii) Izraziti \vec{v} u Dekartovim koordinatama i naći matricu koja odgovara tenzoru brzine deformacije.

Zadatak 10.5.6. Polje brzine u fluidu ima oblik

$$\vec{v} = \frac{Q}{2\pi r} \vec{e}_r + \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi,$$

gde su r , φ i z cilindrične koordinate, a Q i Γ zadate konstante.



Slika 10.9: Linijski vrtlog (vorteks).

- (i) Naći komponente brzine u Dekartovim koordinatama.
- (ii) Naći polje ubrzanja.
- (iii) Naći tenzor brzine deformacije u Dekartovim koordinatama.
- (iv) Pokazati da je fluid nestišljiv.
- (v) Izračunati zapreminski protok kroz omotač cilindra, čija se osa poklapa sa osom z , poluprečnik osnove mu je jednak R , a visina H .
- (vi) Ispitati da li je ovakvo proticanje bezvrtložno.

©2010 S. Elezović-Hadžić

RADNA VERZIJA
Teorijska mehanika

Glava 11

Sile u fizici neprekidnih sredina

11.1 Zapreminske i površinske sile

U fizici kontinuuma sile se dele na zapreminske i površinske. Pod **zapreminskim silama** podrazumevaju se sile koje na sve deliće unutar kontinualne sredine deluju na isti način. Za takve sile kao osnovna kvantitativna karakteristika uvodi se **masena gustina** sile \vec{f} na sledeći način: ako je ukupna zapreminska sila koja deluje na infinitezimalno malu zapreminu mase Δm unutar posmatrane sredine jednaka $\Delta \vec{F}$, onda je \vec{f} po definiciji jednako

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}. \quad (11.1)$$

Primer za zapreminsku silu je sila gravitacije, a odgovarajuća masena gustina je

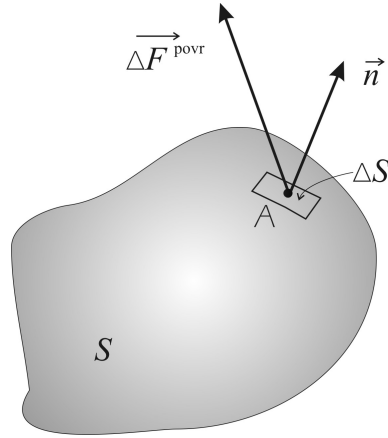
$$\vec{f} = \vec{g},$$

gde je \vec{g} gravitaciono ubrzanje.

Površinske sile su sile koje se javljaju usled interakcije između čestica unutar kontinualne sredine. Ispostavlja se da se delovanje tih sila ispoljava na graničnim površinama između pojedinih delova kontinualne sredine, a osnovna veličina kojom se ovakve sile opisuju je **vektor napona**. Uočimo u nekom trenutku tačku A u kontinualnoj sredini i neku malu površinu ΔS unutar koje se ta tačka nalazi (slika 11.1). Površinu ΔS možemo da shvatimo kao deo neke veće zatvorene površine S . Deliće unutar zapremine obuhvaćene površinom S , koji se nalaze dublje u njoj, zbog gustog „pakovanja” delića i brzog opadanja sile interakcije između molekula sa rastojanjem, praktično ne „osećaju” silu koja potiče od supstance koja se nalazi van S . To je razlog što se ta sila ispoljava samo na graničnoj površini. Označimo sa $\Delta \vec{F}^{povr}$ ukupnu površinsku silu koja deluje na deliće koji se nalaze na ΔS . Vektor napona $\vec{P}_{\vec{n}}(A)$ koji deluje u tački A se onda definiše kao

$$\vec{P}_{\vec{n}}(A) = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \vec{n} = \text{const}}} \frac{\Delta \vec{F}^{povr}}{\Delta S}, \quad (11.2)$$

gde smo sa \vec{n} označili ort normale na ΔS (koji je istovremeno i spoljašnji ort normale na zamišljenu zatvorenu površinu S). Dakle, prilikom traženja gornje granične vrednosti orijentacija površine ΔS (tj. \vec{n}) se ne menja. Ovaj zahtev je u skladu sa eksperimentalno utvrđenom činjenicom da



Slika 11.1: Zamišljeni deo unutar kontinualne sredine, obuhvaćen površinom S . Sila kojom preostali deo sredine deluje na uočeni ispoljava se samo duž granične površine S .

površinska sila koja deluje na neku malu površinu oko fiksirane tačke zavisi od toga kako je ta površina postavljena, tj. može da se menja sa orijentacijom površine. Jasno je da vektor napona ima dimenzije pritiska, a sam pritisak onda predstavlja intenzitet normalne komponente vektora napona. Znači, u opštem slučaju u kontinualnoj sredini i ta normalna komponenta vektora napona, tj. pritisak, u jednoj te istoj tački može da se menja sa orijentacijom površine.

Vektor napona je, dakle, funkcija kako položaja, tako i orijentacije površine postavljene kroz uočenu tačku. Ispostavlja se da je veza između vektora napona i orta normale na površinu tenzorskog tipa [1], tj. između komponentata vektora napona i komponentata orta \vec{n} postoji linearna homogena veza:

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \tilde{\mathcal{P}}\vec{n}. \quad (11.3)$$

Tenzor koji povezuje vektore $\vec{P}_{\vec{n}}$ i \vec{n} naziva se **tenzorom napona** $\tilde{\mathcal{P}}$. Takođe je za dosta široku klasu sredina utvrđeno da je tenzor napona simetričan tenzor [1] i mi ćemo ovde razmatrati samo takve sredine.

Normalna komponenta vektora napona koji deluje u nekoj tački na elementarnu površinu čiji je ort normale \vec{n} jednaka je $\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{P}}\vec{n}$, odakle je jasno da dijagonalni elementi tenzora napona imaju smisao normalnih komponentata napona. Slično, vandijagonalni elementi tenzora napona imaju smisao odgovarajućih tangencijalnih komponentata vektora napona.

U opštem slučaju, tenzor napona nije unapred zadata veličina, već se za konkretnu sredinu njegovi elementi povezuju sa drugim karakterističnim veličinama kojima se opisuje kretanje te sredine, npr. sa pritiskom, elementima tenzora brzine deformacije i slično (vrši se tzv. modeliranje sredine). Na primer, poznato je da u fluidima koji miruju postoje samo normalni naponi. Drugim rečima, matrica koja odgovara tenzoru napona ima oblik:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix}. \quad (11.4)$$

Vektor napona koji u nekoj tački deluje na elementarnu površinu čiji je ort $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ u tom slučaju je jednak

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \mathcal{P}_{11}n_1\vec{e}_1 + \mathcal{P}_{22}n_2\vec{e}_2 + \mathcal{P}_{33}n_3\vec{e}_3,$$

ali takođe i izrazu

$$\vec{P}_{\vec{n}} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_1 \vec{e}_1 + (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_2 \vec{e}_2 + (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_3 \vec{e}_3,$$

pa izjednačavanjem tih izraza zaključujemo da je

$$\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22} = \mathcal{P}_{33} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}).$$

Ispostavlja se, dakle, da ne samo što tenzor napona ima samo dijagonalne elemente, već su oni i međusobno jednaki i upravo imaju smisao negativne vrednosti hidrostatičkog pritiska p , tj. za fluide koji miruju tenzor napona ima oblik

$$\mathcal{P} = -p(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11.5)$$

Drugim rečima, pritisak (kao normalna komponenta napona) u proizvoljnoj tački fluida koji miruje ne zavisi od orijentacije površine na koju deluje - ovaj stav poznat je i kao **Paskalov zakon**.

Sila potiska

Ukupna površinska sila \vec{F}^{povr} koja deluje na proizvoljnu supstancijalnu zapreminu V unutar fluida koji miruje (*sila potiska*) može se izračunati na sledeći način. Prema definiciji vektora napona, ta sila je jednaka

$$\vec{F}^{povr} = \oint_S \vec{P}_{\vec{n}} dS = \oint_S (-p) \vec{n} dS = - \oint_S p d\vec{S}, \quad (11.6)$$

gde je S granična površina zapremine V , a $d\vec{S} = \vec{n} dS$. Neka je $\vec{I} = \oint_S p d\vec{S}$. Ovaj integral može da se izračuna na sledeći način. Ako pomnožimo \vec{I} skalarno sa konstantnim, ali proizvoljnim vektorom \vec{a} dobijamo relaciju

$$\vec{a} \cdot \vec{I} = \oint_S (p\vec{a}) \cdot d\vec{S},$$

u kojoj novodobijeni površinski integral može da se transformiše pomoću teoreme Gausa-Ostrogradskog, pa je

$$\vec{a} \cdot \vec{I} = \int_V \text{div}(p\vec{a}) dV = \vec{a} \cdot \int_V \text{grad} p dV.$$

U poslednjem koraku iskorišćena je relacija $\text{div}(p\vec{a}) = (\text{grad} p) \cdot \vec{a}$. Jasno je da odavde sledi

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{I} - \int_V \text{grad} p dV \right) = 0.$$

Pošto je vektor \vec{a} proizvoljan, konačno može da se zaključi da je

$$\vec{I} = \oint_S p d\vec{S} = \int_V \text{grad} p dV.$$

Prilikom izvođenja ove relacije nigde nisu korišćene nikakve specijalne osobine pritiska p , što znači da ista relacija važi za bilo koju skalarnu funkciju, tj. na ovaj način smo izveli jedan specijalan slučaj (posledicu) teoreme Gausa-Ostrogradskog. Ako se sada vratimo u izraz (11.6) za silu potiska konačno dobijamo izraz

$$\vec{F}^{povr} = - \int_V \text{grad} p \, dV. \quad (11.7)$$

Jednačina ravnoteže

Uočimo sada neku malu supstancijalnu zapreminu ΔV u fluidu koji miruje. Ako je ΔV dovoljno malo, možemo da pretpostavimo da se gustina ρ unutar te zapremine malo menja, pa je masa ovog malog tela jednaka $\Delta m = \rho \Delta V$. Pošto fluid miruje, svi njegovi delovi se nalaze u ravnoteži, pa je ukupna sila koja deluje na svaki takav deo jednaka nuli. Ukupna sila koja deluje na uočeno malo telo jednaka je zbiru zapreminskih i površinskih sila koje deluju na njega, pa je

$$0 = \Delta m \vec{f} - \int_{\Delta V} \text{grad} p \, dV$$

gde je \vec{f} masena gustina zapreminskih sila. Takođe, pošto je ΔV mala zapremina, možemo da smatramo da se ni gradijent pritiska unutar nje bitno ne menja, pa je

$$\int_{\Delta V} \text{grad} p \, dV = \text{grad} p \, \Delta V.$$

Iz svega ovoga direktno sledi jednačina

$$\rho \vec{f} = \text{grad} p, \quad (11.8)$$

koja u hidrostatičkom slučaju uvek mora da bude zadovoljena.

Fluid koji miruje u homogenom gravitacionom polju

Pomoću jednačine (11.8) lako možemo da nađemo kako se pritisak menja u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. U tom slučaju je $\vec{f} = \vec{g}$, pa projektovanjem jednačine na ose Dekartovog koordinatnog sistema dobijamo sledeće skalarne jednačine

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad -\rho g = \frac{\partial p}{\partial x_3}.$$

Iz prve dve dobijene jednačine sledi da pritisak zavisi samo od koordinate x_3 , pa onda iz treće sledi:

$$p(x_3) = p(0) - \int_0^{x_3} \rho g \, dx_3,$$

gde je $p(0)$ vrednost pritiska na nivou $x_3 = 0$. Znači, pritisak se sa povećavanjem visine smanjuje za težinu stuba fluida jediničnog poprečnog preseka, što je fizički smisao integrala dobijenog u izrazu

za pritisak. Naravno, ako možemo da smatramo da se gustina ne menja, onda se za hidrostatički pritisak dobija jednostavna formula:

$$p(x_3) = p(0) - \rho g x_3 .$$

Pomoću jednačine (11.8) i izraza za površinsku silu (11.7) možemo da izvedemo *Arhimedov zakon*. Naime, ako zamislimo čvrsto telo zapremine V i površine S , koje je potopljeno (lebd) u fluidu koji miruje, i ako pretpostavimo da to telo ne menja gravitaciono polje, pa time ni polje pritiska u fluidu (što je prihvatljivo ako telo nije ogromno), onda je sila potiska kojom fluid deluje na telo ista kao i površinska sila koja bi delovala na površinu S da se u njoj nalazi fluid, tj.

$$\vec{F}^{potiska} = - \int_V \text{grad} p \, dV .$$

Pošto zbog ravnoteže važi

$$\rho \vec{g} = \text{grad} p ,$$

zamenom u izraz za silu potiska dobijamo

$$\vec{F}^{potiska} = - \int_V \rho \vec{g} \, dV .$$

Kako je $\rho \vec{g} \, dV = \vec{g} \, dm$ težina fluida koji bi se nalazio u zapremini dV da nema čvrstog tela, integral dobijen u izrazu za silu potiska ima smisao težine fluida koji bi se nalazio u zapremini V da tu nema tela. Drugim rečima, pokazali smo da je *intenzitet sile potiska kojom fluid deluje na telo koje lebdi u njemu jednak težini telom istisnute tečnosti, a smer suprotan smeru gravitacione sile*, što zaista i tvrdi Arhimedov zakon.

Fluid koji se kreće kao kruto telo

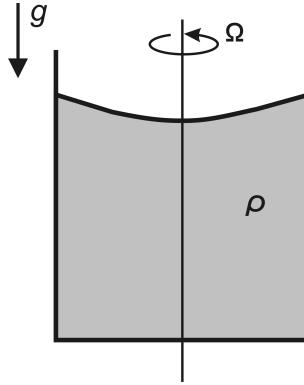
U fluidu koji se kreće kao kruto telo, delići se ne pomeraju jedan u odnosu na drugi, pa takođe važi da nema tangencijalnih napona, tj. tenzor napona ima oblik $\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}}$, gde je $\tilde{\mathcal{I}}$ jedinični tenzor. Površinska sila se onda računa na isti način kao i u slučaju fluida koji miruje. S druge strane, ako uočimo malu supstancijalnu zapreminu unutar ovakvog fluida, onda drugi Njutnov zakon primenjen na takvo telo ima oblik:

$$\Delta m \vec{a} = \Delta m \vec{f} + \Delta \vec{F}^{povr} ,$$

gde je \vec{a} ubrzanje tela. Lako se onda pokazuje da odatle sledi jednačina

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{f} - \text{grad} p . \quad (11.9)$$

Primer 11.1.1. Razmotrimo kretanje tečnosti u cilindričnoj posudi (čaši), koja u homogenom gravitacionom polju rotira oko svoje ose, postavljene vertikalno, kao na slici 11.2. Pretpostavljamo da je gustina ρ tečnosti konstantna, a da ona, zajedno sa posudom, rotira kao kruto telo, konstantnom ugaonom brzinom ω . Pošto se svaki delić fluida kreće po kružnici normalnoj na osu, ako je poluprečnik kružnice r , onda je intenzitet brzine delića $v = \omega r$, a ubrzanje je usmereno prema centru kružnice (koji se nalazi na osi rotacije). To je tzv. centripetalno ubrzanje i jednako je $\omega^2 r$.



Slika 11.2: Fluid, zajedno sa čašom u kojoj se nalazi, rotira oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω .

U cilindričnim koordinatama, gde je osa čase izabrana za z -osu, ubrzanje kao vektor može da se napiše u obliku $\vec{a} = -\omega^2 r \vec{e}_r$, a, pošto je $\vec{f} = -g \vec{e}_z$, projektovanjem jednačine na pravce cilindričnih ortova dobijaju se sledeće skalarne jednačine:

$$\begin{aligned} -\rho\omega^2 r &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ 0 &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Iz druge od ovih jednačina sledi da pritisak ne zavisi od ugla φ , što se iz simetrije i očekuje. Iz treće jednačine se zaključuje da je $p(r, z) = -\rho g z + F(r)$, gde je $F(r)$ neka funkcija od r , koja se određuje zamenom dobijenog izraza za p u prvu jednačinu. Na taj način se dobija jednačina

$$\rho\omega^2 r = \frac{dF}{dr},$$

odakle je $F(r) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 + C$, gde je C integraciona konstanta, tako da je konačno pritisak unutar tečnosti jednak

$$p(r, z) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 r^2 - \rho g z + C.$$

Ako koordinatni početak postavimo u najnižu tačku granične površine, onda je za $z = 0$ i $r = 0$ pritisak jednak atmosferskom pritisku p_0 , pa se iz dobijenog izraza za pritisak dobija da je $C = p_0$. Naravno, i za sve ostale tačke granične površine između tečnosti i vazduha važi da je pritisak jednak p_0 ¹, što znači da je $p(r, z = z_G(r)) = p_0$, gde smo sa $z = z_G(r)$ označili jednačinu granične površine. Odatle je

$$z = \frac{\omega^2}{2g} r^2,$$

što znači da usled rotacije granična površina tečnosti dobija oblik rotacionog paraboloida.

¹Ako bi se pritisak kojom tečnost deluje na graničnu površinu razlikovao od pritiska kojim atmosfera deluje na nju, javila bi se rezultujuća sila koja bi dovela do promene oblika granične površine, što nije dozvoljeno pošto smo pretpostavili da se tečnost kreće kao kruto telo.

11.2 Osnovni dinamički zakon za kontinuum

Ako uočimo malu supstancijalnu zapreminu unutar proizvoljne kontinualne sredine, onda osnovna jednačina dinamike za takvo telo ima oblik

$$\Delta m \vec{a} = \Delta m \vec{f} + \Delta \vec{F}^{povr}, \quad (11.10)$$

gde je Δm masa unutar uočene zapremine ΔV , \vec{a} ubrzanje tela, a \vec{f} srednja gustina zapreminske sile koja deluje na telo. Ako je ΔS ukupna površina koja ograničava uočeno telo, ukupna površinska sila $\Delta \vec{F}^{povr}$ koja deluje na telo jednaka je

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F}^{povr} &= \oint_{\Delta S} \vec{P}_{\vec{n}} dS = \oint_{\Delta S} \tilde{\mathcal{P}} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\Delta S} \tilde{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Delta S} \tilde{\mathcal{P}} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \vec{e}_i \right) = \oint_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \tilde{\mathcal{P}} \vec{e}_i \\ &= \oint_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j P_{ji} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \oint_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (P_{ji} \vec{e}_i) \cdot d\vec{S} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \int_{\Delta V} \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^3 P_{ji} \vec{e}_i \right) dV \\ &= \int_{\Delta V} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{P}}^\dagger \cdot \vec{e}_j) dV, \end{aligned} \quad (11.11)$$

gde smo iskoristili oznaku za divergenciju tenzora, koja se u opštem slučaju za proizvoljni tenzor $\tilde{\mathcal{A}}$ u trodimenzionalnom prostoru definiše kao

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{A}} = \nabla \tilde{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{A}} \vec{e}_i). \quad (11.12)$$

Zbog simetričnosti tenzora napona dalje imamo

$$\Delta \vec{F}^{povr} = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}^\dagger dV = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} dV, \quad (11.13)$$

odakle je

$$\Delta \vec{F}^{povr} = \Delta V \langle \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} \rangle, \quad (11.14)$$

gde smo sa $\langle \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} \rangle$ označili srednju vrednost divergencije tenzora napona u uočenoj supstancijalnoj zapremini. Vraćanjem ovog izraza u jednačinu (11.10), njenim deljenjem sa Δm , konačno u limesu $\Delta V \rightarrow 0$ dobijamo **osnovni dinamički zakon** za kontinualnu sredinu:

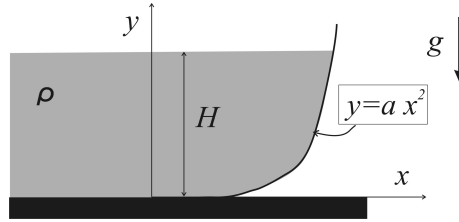
$$\vec{a} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{\mathcal{P}}. \quad (11.15)$$

Pošto je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (11.16)$$

eksplicitnije ova jednačina ima oblik

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{\mathcal{P}}. \quad (11.17)$$



Slika 11.3: Slika uz zadatak 11.2.3.

To je vektorska parcijalna diferencijalna jednačina u kojoj su nezavisne promenljive prostorne koordinate i vreme, a nepoznata funkcija brzina. U opštem slučaju, međutim, ni gustina ρ ni elementi tenzora napona nisu poznati, tako da je svaku konkretnu sredinu potrebno modelirati, tj. na neki način dovesti tenzor napona u vezu sa brzinom dodatnim jednačinama (tzv. konstitutivne jednačine). Što se zapreminskih sila tiče, one su u ovom kontekstu po pravilu poznate.

ZADACI

Zadatak 11.2.1. U $Ox_1x_2x_3$ koordinatnom sistemu tenzor napona $\tilde{\mathcal{P}}$ u nekoj tački reprezentovan je matricom

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ MPa} \quad .$$

- Naći vektor napona koji u toj tački deluje na elementarnu površinu paralelnu ravni $x + 2y + 2z - 6 = 0$, kao i intenzitet njegove normalne komponente.
- Ako je $\vec{e}'_1 = (2\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + \vec{e}_3)/3$ i $\vec{e}'_2 = (\vec{e}_1 - \vec{e}_2)/\sqrt{2}$, naći \mathcal{P}'_{12} .

Zadatak 11.2.2. Tenzor napona reprezentovan je matricom

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Naći vektor napona koji deluje na ravan koja prolazi kroz tačku $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$, a tangentna je na cilindričnu površinu $x_1^2 + x_2^2 = 1$ u toj tački.

Zadatak 11.2.3. Tečnost gustine ρ nalazi se u rezervoaru, čiji je poprečni presek prikazan na slici 11.3. Naći ukupnu silu pritiska na zakrivljeni deo zida rezervoara, širine L (duž z -ose).

Zadatak 11.2.4. Ispitati da li matrica čiji su elementi

$$\begin{aligned} P_{11} &= x_2^2 + \nu(x_1^2 - x_2^2) \quad , & P_{12} &= -2\nu x_1 x_2 \quad , \\ P_{22} &= x_1^2 + \nu(x_2^2 - x_1^2) \quad , & P_{23} &= P_{13} = 0 \quad , \end{aligned}$$

$$P_{33} = \nu(x_1^2 + x_2^2)$$

može da reprezentuje tenzor napona u sredini čiji se delići nalaze u ravnoteži, a zapreminskih sila nema.

Glava 12

Fluidi

12.1 Viskozni fluidi

Pri kretanju fluida realno postoje tangencijalni naponi i oni su u vezi sa **viskoznošću**, tj. unutrašnjim trenjem. Usled uzajamne interakcije brže čestice fluida teže da povuku sporije, tako da se javljaju tangencijalni naponi između slojeva fluida koji se kreću različitim brzinama. Takođe, usled toplotnog kretanja pri sudaru čestica iz slojeva različitih brzina ili pri prelasku čestica iz jednog u drugi sloj dolazi do razmene impulsa, što se takođe manifestuje kroz postojanje tangencijalnih napona. Prvi mehanizam nastajanja viskoznosti je dominantan kod tečnosti, a drugi kod gasova. Jasno je da u oba slučaja viskoznost zavisi od temperature. Kako se sa porastom temperature povećava rastojanje među česticama, kod tečnosti se viskoznost smanjuje sa porastom temperature. Kod gasova se, naprotiv, usled intenziviranja toplotnog kretanja, sa porastom temperature povećava razmena impulsa između slojeva, a samim tim sa temperaturom se povećava i viskoznost.

12.2 Navije-Stoksovi fluidi

U opštem slučaju, postojanje tangencijalnih napona znači da tenzor napona ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{P}}', \quad (12.1)$$

gde je $\tilde{\mathcal{P}}'$ tzv. *tenzor viskoznosti*. Mi ćemo ovde detaljnije razmotriti samo slučaj **Navije-Stoksovih fluida**, kod kojih tenzor viskoznosti ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}}' = 2\eta\tilde{\mathcal{K}}_1 + \xi\tilde{\mathcal{K}}_2, \quad (12.2)$$

gde su η i ξ **dinamički koeficijenti viskoznosti** (koje smatramo konstantama), a

$$\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{K}}_1 + \tilde{\mathcal{K}}_2, \quad \tilde{\mathcal{K}}_2 = \frac{1}{3}(\nabla\vec{v})\tilde{\mathcal{E}}. \quad (12.3)$$

Iz definicije tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_2$ sledi da on predstavlja deo tenzora brzine deformacije koji je u vezi sa deformacijama pri kojima ne dolazi do iskošenja, tj. promena oblika (pošto nema vandijagonalnih elemenata), već samo do promena zapremine (tzv. *izotropne* deformacije), pri čemu je

$$\text{Tr}\tilde{\mathcal{K}}_2 = \nabla\vec{v} = \text{Tr}\tilde{\mathcal{S}}.$$

Ako pri kretanju ne dolazi do promena zapremine, onda je $\tilde{\mathcal{K}}_2 = 0$, pa se tenzor brzine deformacije svodi na tenzor $\tilde{\mathcal{K}}_1$, tj. $\tilde{\mathcal{K}}_1$ predstavlja onaj deo tenzora brzine deformacije koji je u vezi sa deformacijama pri kojima dolazi samo do promene oblika, a ne i zapremine (tzv. *ekvivolumne* deformacije).

Razmotrimo kako izgleda tenzor viskoznosti u slučaju jednostavnog polja brzine oblika $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$. Lako se proverava da je pri ovakvom kretanju fluid nestišljiv, što znači da je

$$\tilde{\mathcal{P}}' = 2\eta\tilde{\mathcal{S}} = \eta \frac{dv}{dx_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je sila viskoznosti $d\vec{F}^{visk}$ koja deluje na elementarnu površinu $d\vec{S} = dS\vec{e}_2$ jednaka

$$d\vec{F}^{visk} = \tilde{\mathcal{P}}' d\vec{S} = dS\eta \frac{dv}{dx_2} \vec{e}_1,$$

odakle je

$$\left| \frac{d\vec{F}^{visk}}{dS} \right| = \eta \left| \frac{dv}{dx_2} \right|.$$

Ovaj rezultat poznat je kao *Njutnov zakon viskoznosti*.

12.2.1 Navije-Stoksova jednačina

Da bismo dobili eksplicitan oblik osnovnog dinamičkog zakona za Navije-Stoksove fluide potrebno je da izračunamo divergenciju tenzora viskoznosti, odnosno divergencije tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_1$ i $\tilde{\mathcal{K}}_2$. Divergencija tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_2$ jednaka je

$$\nabla \tilde{\mathcal{K}}_2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}((\operatorname{div} \vec{v}) \vec{e}_i) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \vec{v}) = \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}, \quad (12.4)$$

a divergencija tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_1$:

$$\nabla \tilde{\mathcal{K}}_1 = \nabla \tilde{\mathcal{S}} - \nabla \tilde{\mathcal{K}}_2 = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{S}} \vec{e}_i) - \frac{1}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v}. \quad (12.5)$$

Pošto je

$$\tilde{\mathcal{S}} \vec{e}_i = \sum_{j=1}^3 \mathcal{S}_{ji} \vec{e}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_j, \quad (12.6)$$

sledi da je

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\tilde{\mathcal{S}} \vec{e}_i) &= \frac{1}{2} \operatorname{div} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \vec{e}_j = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{v} + \Delta v_i \right), \end{aligned} \quad (12.7)$$

koeficijent [jedinice]	vazduh	voda	živa	maslinovo ulje	glicerin
$\eta \left[\frac{kg}{ms} \right]$	1.8×10^{-5}	1.1×10^{-3}	1.6×10^{-6}	0.10	2.33
$\nu \left[\frac{m^2}{s} \right]$	1.5×10^{-5}	1.1×10^{-6}	1.2×10^{-7}	1.1×10^{-4}	1.8×10^{-3}

Tabela 12.1: Vrednosti dinamičkog i kinematičkog koeficijenta viskoznosti za neke supstance na temperaturi $T = 288$ K.

pa je

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{v} + \Delta v_i \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \Delta \vec{v}), \quad (12.8)$$

odnosno

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{K}}_1 = \frac{1}{6} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{2} \Delta \vec{v}. \quad (12.9)$$

Onda je divergencija tenzora viskoznosti

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}' = \frac{\eta + \xi}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v}, \quad (12.10)$$

pa osnovni dinamički zakon dobija oblik jednačine

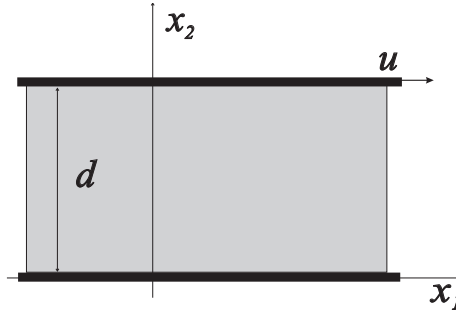
$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta + \xi}{3\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}, \quad (12.11)$$

poznate pod nazivom **Navije–Stoksova jednačina**. Ako je gustina konstantna, onda Navije–Stoksov fluid nazivamo Stoksovim fluidom, a iz Navije–Stoksove jednačine sledi tzv. **Stoksova jednačina**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (12.12)$$

Često se umesto kombinacije $\frac{\eta}{\rho}$ koristi tzv. kinematički koeficijent viskoznosti $\nu = \eta/\rho$. U tabeli 12.1 date su uporedo vrednosti dinamičkog η i kinematičkog koeficijenta ν za neke fluide na temperaturi $T = 288$ K: I Stoksova i Navije–Stoksova jednačina su parcijalne diferencijalne jednačine, drugog reda i nelinearne, u opštem slučaju vrlo komplikovane. U nastavku teksta na nekoliko jednostavnih primera stacionarnog proticanja fluida demonstriramo kako se može rešiti Stoksova jednačina.

Primer 12.2.1. Pod ravnim Kuetovim strujanjem podrazumeva se stacionarno proticanje Stoksovog fluida između dve paralelne beskonačne ravne ploče (slika 12.1). Zapreminske sile se zanemaruju, a fluid se kreće samo usled kretanja gornje ploče u sopstvenoj ravni konstantnom brzinom \vec{u} . Neka je rastojanje između ploča d , a gustina fluida $\rho = \text{const}$. Izaberimo koordinatni sistem tako da donja ploča leži u ravni $x_2 = 0$, gornja u ravni $x_2 = d$, a neka je x_1 osa određena pravcem vektora \vec{u} , tj neka je $\vec{u} = u\vec{e}_1$. Pod pretpostavkom da je kretanje *laminarno*, tj. u slojevima (dakle da nema



Slika 12.1: Ravno Kuetovo strujanje - Stoksov fluid stacionarno i laminarno struji kroz prostor između dve velike paralelne ploče, usled toga što se jedna od ploča pomera u svojoj ravni konstantnom brzinom.

značajnog mešanja susednih slojeva, tj. turbulencija), kao i zbog simetrije, uzmimo da je brzina delića u fluidu oblika $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$. Onda je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \vec{v} = 0,$$

a pošto se zapreminske sile zanemaruju i nema gradijenta pritiska, Stoksova jednačina se svodi na

$$\Delta \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dx_2^2} = 0, \quad (12.13)$$

odakle sledi

$$v(x_2) = C_1 x_2 + C_2. \quad (12.14)$$

Integracione konstante u poslednjem izrazu odeđuju se iz graničnih uslova – u ovom slučaju to su tzv. uslovi *slepljivanja*. Naime, usled viskoznosti delići fluida neposredno uz čvrstu površinu se lepe za nju, tako da je brzina delića jednaka brzini granice (površine). U ovom slučaju to znači da je $v(0) = 0$, pošto ploča $x_2 = 0$ miruje, odnosno $v(d) = u$, pošto se ploča $x_2 = d$ kreće brzinom u . Zamenom ovih graničnih uslova u dobijeni izraz za profil brzine, dobijamo dve jednostavne algebarske jednačine, čijim rešavanjem nalazimo konstante C_1 i C_2 , tako da je konačno

$$\vec{v} = \frac{u}{d} x_2 \vec{e}_1. \quad (12.15)$$

Primer 12.2.2. Pod Poazejevim strujanjem podrazumeva se stacionarno laminarno proticanje Stoksovog fluida kroz cilindričnu cev kružnog poprečnog preseka poluprečnika R , usled delovanja konstantnog gradijenta pritiska u pravcu ose cevi. Zbog simetrije problema najzgodnije je raditi u cilindričnim koordinatama, koje su uvedene tako da se z -osa poklapa sa osom cilindra. Pretpostavićemo takođe da brzina fluida ima oblik $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$. Ako zanemarimo zapreminske sile i ako je gradijent pritiska jednak

$$\text{grad } p = -K \vec{e}_z$$

Stoksova jednačina

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}$$

se svodi na

$$0 = \frac{1}{\rho} K \vec{e}_z + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v},$$

odnosno

$$\frac{K}{\eta} \vec{e}_z = -\Delta \vec{v}.$$

Laplasijan vektorske veličine u krivolinijskim koordinatama može da se izračuna korišćenjem identiteta

$$\text{rot rot } \vec{v} = \text{grad div } \vec{v} - \Delta \vec{v}, \quad (12.16)$$

što se u ovom slučaju, zbog nestišljivosti fluida, tj. uslova $\text{div } \vec{v} = 0$, svodi na

$$\Delta \vec{v} = -\text{rot rot } \vec{v}.$$

Pošto je

$$\text{rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\varphi & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(r) \end{vmatrix} = -\frac{dv}{dr} \vec{e}_\varphi$$

sledi da je

$$\Delta \vec{v} = -\text{rot rot } \vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r \frac{dv}{dr} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv}{dr} \right) \vec{e}_z$$

tako da se konačno iz Stoksove jednačine dobija sledeća obična diferencijalna jednačina:

$$\frac{K}{\eta} = -\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv(r)}{dr} \right),$$

Iz ove jednačine prvo sledi

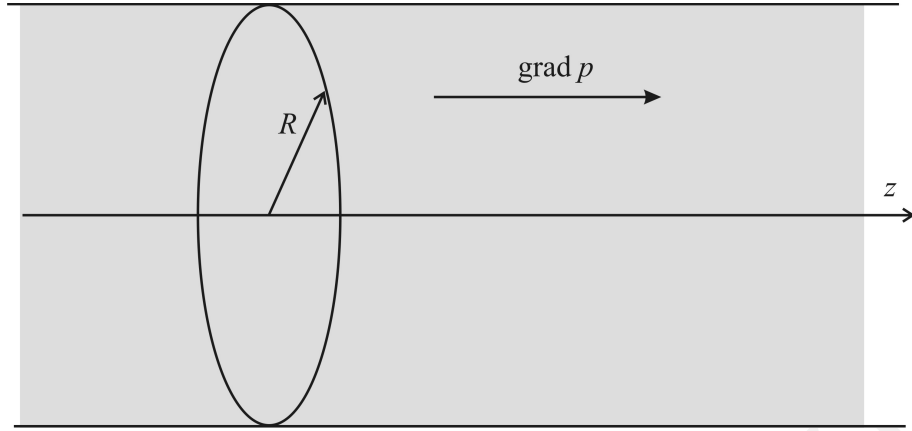
$$r \frac{dv(r)}{dr} = -\frac{K}{2\eta} r^2 + C_1,$$

a zatim

$$v(r) = -\frac{K}{4\eta} r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Ukoliko bi integraciona konstanta C_1 bila različita od nule, to bi značilo da delići fluida na osi cevi imaju beskonačno veliku brzinu, što fizički nije realno - to znači da konstanta C_1 mora biti jednaka nuli. Drugu integracionu konstantu C_2 određujemo iz graničnog uslova za $r = R$: $v(R) = 0$, odakle je $C_2 = KR^2/4\eta$, pa se konačno za brzinu dobija izraz

$$v(r) = \frac{KR^2}{4\eta} \left[1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right]. \quad (12.17)$$



Slika 12.2: Poazejevo strujanje - Stoksov fluid laminarno i stacionarno struji kroz cev usled postojanja konstantnog gradijenta pritiska u pravcu ose cevi.

12.3 Idealan fluid

Realni fluidi su u većoj ili manjoj meri viskozni, međutim česte su situacije kada viskoznost može da se zanemari, što odgovara zanemarivanju tangencijalnih napona. Formalno, to znači da tenzor napona ima oblik:

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}}. \quad (12.18)$$

Videli smo da ovakvo naponsko stanje odgovara fluidima koji miruju, kao i fluidima koji se kreću kao kruto telo, tj. kod kojih nema relativnog međusobnog pomeranja slojeva. U ostalim slučajevima, pretpostavka da naponsko stanje ima oblik (12.18) predstavlja aproksimaciju i tada kažemo da fluid opisujemo modelom *idealnog fluida*.

12.3.1 Ojlerova jednačina

Pošto je

$$\operatorname{div}(-p\tilde{\mathcal{I}}) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}(-p\tilde{\mathcal{I}}\vec{e}_i) = - \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}(p\vec{e}_i) = - \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p,$$

iz opšte jednačine kretanja za kontinualnu sredinu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{\mathcal{P}},$$

sledi diferencijalna jednačina kretanja za idealni fluid

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (12.19)$$

koja se naziva **Ojlerova jednačina**. Ona predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu, u kojoj su koordinate i vreme nezavisno promenljive, a unapred je u opštem slučaju zadata jedino masena

gustina zapreminskih sila \vec{f} . Gustina i pritisak mogu da se menjaju, tj. mogu da zavise i od koordinata i vremena, tako da Ojlerova jednačina u opštem slučaju nije dovoljna za određivanje polja brzine, već ju je potrebno dopuniti još nekim jednačinama. Uvek može da se iskoristi jednačina kontinuiteta, ali je osim nje potrebna još jedna jednačina, pošto ima ukupno pet nepoznatih funkcija (tri komponente brzine, pritisak p i gustina ρ). Takođe, pošto se radi o parcijalnoj diferencijalnoj jednačini, potrebno je znati i početne i granične uslove. Ako je granični uslov zadat na čvrstom zidu (uz koji fluid struji), zbog zanemarivanja viskoznosti ne postoji razlog da se deliće lepe za taj zid. Zato se uslov slepljivanja, koji važi za Navije-Stoksove fluide, zamenjuje *uslovom neprobojnosti*, koji je blaži. Naime, tangencijalna komponenta brzine idealnog fluida na čvrstoj granici može imati proizvoljnu vrednost (delići fluida mogu da klize po zidu), ali normalna komponenta brzine u odnosu na granicu mora biti jednaka nuli, jer delići ne mogu da prođu kroz čvrsti zid.

12.3.2 Bernulijev i Koši–Lagranžev integral

Ako se iskoristi vektorski identitet

$$\vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (12.20)$$

Ojlerova jednačina se transformiše u oblik:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p, \quad (12.21)$$

koji se često naziva *Gromeka-Lembova jednačina*. Ovaj oblik Ojlerove jednačine iskoristićemo za izvođenje tzv. Bernulijevog i Koši–Lagranževog integrala, koji su ponekad pogodniji od Ojlerove jednačine za analizu kretanja fluida.

Za proticanje fluida se kaže da je barotropno ako je pri takvom proticanju pritisak funkcija samo gustine, tj. $p = F(\rho)$. U tom slučaju se može uvesti funkcija pritiska $I(p)$ relacijom

$$I(p) = \int \frac{dp}{\rho}, \quad (12.22)$$

pa je

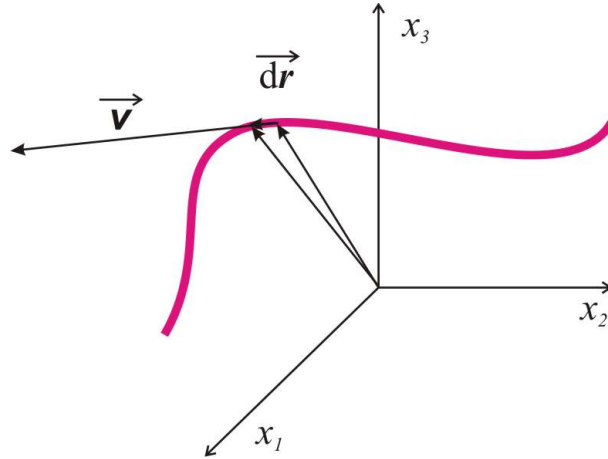
$$\text{grad} I(p) = \frac{dI}{dp} \text{grad} p = \frac{1}{\rho} \text{grad} p, \quad (12.23)$$

a iz Gromeka-Lembove jednačine onda sledi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad}(v^2) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{f} - \text{grad} I(p). \quad (12.24)$$

Ako su još i zapreminske sile potencijalne, tj. $\vec{f} = -\text{grad} u$, gde je u potencijalna energija po jedinici mase, dobija se jednačina

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + u + I(p) \right) = \vec{v} \times \text{rot} \vec{v}. \quad (12.25)$$



Slika 12.3: Vektor brzine je tangentan na strujnu liniju u svakoj njenoj tački.

Bernulijev integral

Za vizualizaciju kretanja fluida često se koriste tzv. **strujne linije**, koje se definišu kao linije kod kojih u svakoj tački vektor polja brzine \vec{v} ima pravac tangente na tu liniju (slika 12.3). Drugim rečima, ako sa $d\vec{r}$ označimo infinitezimalni element strujne linije (koji, naravno, ima pravac tangente na nju), onda je

$$d\vec{v} = \lambda d\vec{r} \quad \text{ili} \quad d\vec{r} \times \vec{v} = 0, \quad (12.26)$$

odakle se dobijaju jednačine

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}, \quad (12.27)$$

čijim rešavanjem (tretirajući vreme kao parametar) možemo dobiti jednačine strujnih linija. Za stacionarna kretanja, kod kojih brzina ne zavisi eksplicitno od vremena, strujne linije se poklapaju sa trajektorijama delića fluida.

Pretpostavimo sada da je

- proticanje stacionarno, što znači da je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$,
- zapreminske sile potencijalne, što znači da je $\vec{f} = -\text{grad}u$,
- fluid barotropan ili konstantne gustine, što znači da $\text{grad}p/\rho$ može da se napiše u obliku $\text{grad}I$.

Pod ovim pretpostavkama važi jednačina (12.25), koja se zbog uslova stacionarnosti svodi na

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + u + I \right) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = 0. \quad (12.28)$$

Množenjem ove jednačine elementom strujne linije $d\vec{r} = \lambda \vec{v}$ dobijamo jednačinu

$$d\vec{r} \cdot \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + u + I \right) = 0, \quad (12.29)$$

odakle sledi

$$d\left(\frac{1}{2}v^2 + u + I\right) = 0, \quad (12.30)$$

odnosno

$$\frac{1}{2}v^2 + u + I = \text{const} \quad (12.31)$$

duž strujne linije (istovremeno i trajektorije delića, pošto je strujanje stacionarno), što predstavlja tzv. *Bernulijev integral*. Ako je gustina fluida konstantna, a jedina zapreminska sila homogena sila gravitacije gustine $\vec{f} = -g\vec{e}_3$, onda je $u = gx_3$, $I = p/\rho$, pa dobijamo uobičajenu, iz opštih kurseva fizike poznatu **Bernulijevu jednačinu**:

$$\frac{1}{2}v^2 + gx_3 + \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (12.32)$$

Iz načina na koji je Bernulijev integral izveden i činjenice da Stoksova jednačina u slučaju kada je $\text{rot}\vec{v} = 0$ dobija oblik Ojlerove jednačine (pošto je $\Delta\vec{v} = -\text{rot}\text{rot}\vec{v}$), sledi da Bernulijev integral važi duž strujne linije (i trajektorije delića) ne samo za idealan fluid, već i za Stoksov fluid koji struji bezvrtložno ($\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{v} = 0$).

Koši–Lagranžev integral

Koši–Lagranžev integral odnosi se bezvrtložno proticanje barotropnih fluida u polju potencijalnih zapreminskih sila. Bezvrtložno strujanje fluida, pri kome po definiciji važi da je

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{v} = 0, \quad (12.33)$$

naziva se još i potencijalno, pošto je poznato [3] da iz uslova $\text{rot}\vec{v} = 0$ sledi da postoji skalarna funkcija Φ , takva da je

$$\vec{v} = \text{grad}\Phi. \quad (12.34)$$

Funkcija Φ se u ovom kontekstu naziva **potencijal brzine**. Dakle, u ovom slučaju zadovoljeni su uslovi

- proticanje je bezvrtložno ($\text{rot}\vec{v} = 0$),
- zapreminske sile potencijalne ($\vec{f} = -\text{grad}u$),
- fluid barotropan ($\text{grad}p/\rho = \text{grad}I$),

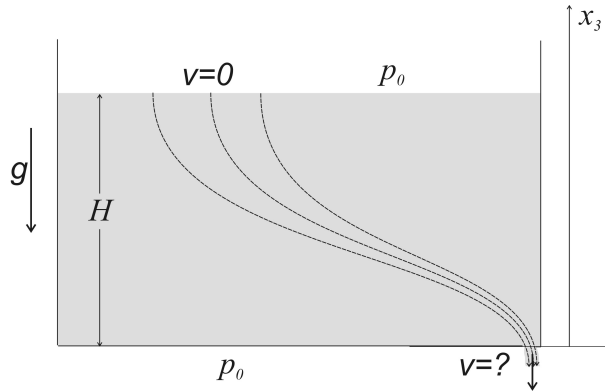
pa se jednačina (12.25) svodi na

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + u + I(p)\right) = 0, \quad (12.35)$$

odakle zaključujemo da zbir $\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + u + I(p)$ ne zavisi od prostornih koordinata, već samo od vremena, tj. funkcija

$$F(t) = \frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + u + I(p) \quad (12.36)$$

u fiksiranom trenutku t u svakoj tački prostora ima istu vrednost. Ovaj integral je poznat kao **Koši–Lagranžev integral** ili *nestacionarni Bernulijev integral*.



Slika 12.4: Toričelijeve teorema: primenom Bernulijeve jednačine lako se nalazi da je brzina isticanja tečnosti iz velikog rezervoara jednaka $v = \sqrt{2gH}$.

Primer 12.3.1. Ukoliko je strujanje barotropnog fluida u potencijalnom polju zapreminskih sila bezvrtložno i stacionarno, onda se Bernulijev i Koši-Lagranžev integral poklapaju. Iskoristimo ih za nalaženje brzine isticanja tečnosti konstante gustine iz velikog rezervoara (slika 12.4). Otvor kroz koji tečnost ističe je vrlo mali i nalazi se na dnu rezervoara, u odnosu na koji ćemo meriti visinu nivoa tečnosti. Pošto je rezervoar veliki, možemo da pretpostavimo da se slobodna površina tečnosti (koja se nalazi na visini $x_3 = H$) sporo spušta, tako da je brzina delića na tom nivou približno jednaka nuli. Pritisak je jednak atmosferskom kako na slobodnoj površini tečnosti, tako i na mestu gde tečnost curi iz rezervoara, pa ako primenimo (12.32) na bilo koje dve tačke na visinama $x_3 = H$ i $x_3 = 0$, lako dobijamo da je tražena brzina jednaka $v = \sqrt{2gH}$. Ovaj rezultat poznat je kao *Toričelijeve teorema*.

ZADACI

Zadatak 12.3.1. Kroz jako dugačku nepokretnu cilindričnu cev, čiji poprečni presek ima oblik elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

pod delovanjem konstantnog gradijenta pritiska $\text{grad} p = K \vec{e}_z$ u pravcu ose cilindra, stacionarno i laminarno teče Stoksov fluid, koeficijenta viskoznosti η i gustine ρ . Pretpostavljajući da zapreminske sile mogu da se zanemare, kao i da polje brzine ima oblik

$$\vec{v} = C \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) \vec{e}_z,$$

(a) odrediti konstantu C ; (b) izračunati protok kroz poprečni presek cevi (uputstvo: uvesti smenu promenljivih $x = ar \cos \theta$ i $y = br \sin \theta$); (c) izračunati silu viskoznog trenja kojom fluid deluje na jediničnu dužinu cevi.

Zadatak 12.3.2. Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η , u homogenom gravitacionom polju stacionarno protiče kroz prostor između dve beskonačno velike ravne paralelne ploče, koje

sa horizontalnom ravni zaklapaju ugao θ . Ploče miruju, nalazeći se na međusobnoj udaljenosti d . Uzimajući da brzina delića fluida zavisi samo od njegove udaljenosti od ploča, kao i da je pritisak neposredno uz donju ploču konstantan i jednak p_0 , naći profil brzine u fluidu, kao i silu kojom fluid deluje na jediničnu površinu donje ploče.

Zadatak 12.3.3. Stoksov fluid, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η , ispunjava ceo prostor oko jako dugačkog cilindra poluprečnika R , čija je osa vertikalno postavljena u homogenom gravitacionom polju \vec{g} . Cilindar rotira oko svoje ose konstantnom ugaonom brzinom Ω . Pretpostavljajući da je u fluidu uspostavljeno stacionarno polje brzine, oblika $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi$, gde su (r, φ, z) cilindrične koordinate (osa z se poklapa sa osom cilindra) i $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, naći (a) $v(r)$; (b) pritisak p u fluidu, ako je poznato da je za $z = 0$, na jako velikim rastojanjima ($r \rightarrow \infty$) od cilindra $p = p_0$; (c) moment viskozne sile, kojom fluid deluje na jedinicu dužine cilindra.

Zadatak 12.3.4. Potencijal brzine Φ u cilindričnim koordinatama ima oblik

$$\Phi(r, \varphi, z) = U \left(r + \frac{R^2}{r} \right) \cos \varphi.$$

- (a) Uveriti se da Φ zadovoljava Laplasovu jednačinu $\Delta\Phi = 0$.
- (b) Uveriti se da polje brzine $\vec{v} = \nabla\Phi$ zadovoljava granične uslove za proticanje nestišljivog idealnog fluida oko nepokretnog čvrstog cilindra $r = R$. Kolika je brzina fluida na jako velikim rastojanjima od takvog cilindra?
- (c) Ako nema zapreminskih sila, a poznato je da je pritisak na jako velikim rastojanjima od cilindra jednak p_∞ , naći pritisak u bilo kojoj tački fluida, ako je gustina fluida ρ .
- (d) Izračunati silu kojom fluid deluje na jediničnu dužinu cilindra.

©2010 S. Elezović-Hadžić

RADNA VERZIJA
Teorijska mehanika

Glava 13

Elastično telo

13.1 Vektor pomeranja i tenzor deformacije

Za opisivanje kretanja unutar čvrstih deformabilnih tela pogodnije je koristiti Lagranžev nego Ojlerov formalizam, zbog male pokretljivosti delića takvih tela. U skladu sa tim, umesto tenzora brzine deformacije obično se koristi tzv. **tenzor deformacije** \tilde{D} koji se definiše pomoću vektora pomeranja $\vec{u}(X_1, X_2, X_3, t)$. Ako se delić u početnom trenutku $t = 0$ nalazio u tački $\vec{X} = (X_1, X_2, X_3)$, onda se u proizvoljnom trenutku t on nalazi u tački \vec{x} , pri čemu važi:

$$\vec{x}(\vec{X}, t) = \vec{X} + \vec{u}(\vec{X}, t), \quad \vec{x}(\vec{X}, 0) = \vec{X}, \quad (13.1)$$

a elementi tenzora deformacije se definišu kao

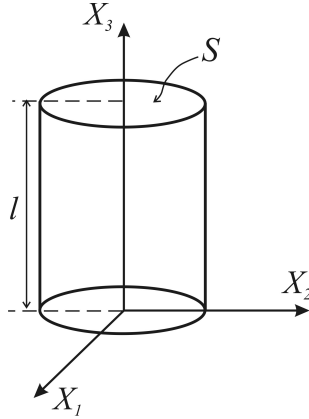
$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right). \quad (13.2)$$

Fizički smisao ovog tenzora analogan je smislu tenzora brzine deformacije. Može se pokazati da je njegov dijagonalni element \mathcal{D}_{ii} jednak relativnoj promeni dužine (koja se desi za infinitezimalno kratko vreme) infinitezimalnih supstancijalnih duži koje u početnom trenutku leže u pravcu x_i koordinatne ose, a dok je dijagonalni element \mathcal{D}_{ij} ($i \neq j$) jednak polovini promene ugla između infinitezimalnih supstancijalnih duži koje u početnom trenutku imaju pravce koordinatnih osa x_i i x_j (zadaci 13.3.1 i 13.3.2).

13.2 Generalisani Hukov zakon

Najjednostavniji slučaj čvrste deformabilne sredine je tzv. **elastično telo** koje se usled delovanja spoljašnjih sila deformiše, ali se vraća u svoje prvobitno stanje nakon prestanka delovanja spoljašnjih sila. Ako je pri tome

- tenzor napona u nekoj tački i nekom trenutku funkcija samo tenzora deformacije u toj istoj tački i istom trenutku, a tenzor napona jednak nuli ako nema deformacije (idealno elastično telo),
- razmatramo samo linearne fenomene (tj. elementi tenzora napona su linearne funkcije elemenata tenzora deformacije),



Slika 13.1: Malo supstancijalna zapremina u obliku cilindra unutar elastične neprekidne sredine.

- sredina je homogena i izotropna,

može se pokazati da je veza između tenzora napona i tenzora deformacije oblika

$$\tilde{\mathcal{P}} = \lambda \left(\text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} \right) \tilde{\mathcal{E}} + 2\mu \tilde{\mathcal{D}}. \quad (13.3)$$

U ovom izrazu $\tilde{\mathcal{E}}$ je jedinični tenzor, λ i μ su tzv. Laméove konstante, a sama jednačina se naziva **generalisanim Hukovim zakonom**.

Uočimo elastično telo u obliku cilindra čija osa leži na x_3 koordinatnoj osi (slika 13.1), a visina mu je jednaka l i neka je tenzor napona reprezentovan matricom

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix}. \quad (13.4)$$

Izjednačavanjem dijagonalnih elemenata ovakvog tenzora sa odgovarajućim izrazima koji se dobijaju iz generalisanog Hukovog zakona (13.3) dobijaju se jednačine

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda \text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} + 2\mu \mathcal{D}_{11}, \\ 0 &= \lambda \text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} + 2\mu \mathcal{D}_{22}, \\ p &= \lambda \text{Tr} \tilde{\mathcal{D}} + 2\mu \mathcal{D}_{33}, \end{aligned} \quad (13.5)$$

iz kojih sledi

$$p = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \mathcal{D}_{33}. \quad (13.6)$$

Pošto je u ovom slučaju p jednako normalnoj sili F koja u pravcu x_3 deluje po jedinici površine S osnove cilindra, onda poslednja jednakost može da se prepíše kao

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}, \quad E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \quad (13.7)$$

gde je Δl promena dužine cilindra usled delovanja sile F , a E Jungov moduo. U ovom slučaju smo, dakle, dobili uobičajeni Hukov zakon.

13.3 Osnovna jednačina dinamike za elastično telo

Polazeći od generalisanog Hukovog zakona (13.3) divergenciju tenzora napona, koja nam je potrebna za formiranje osnovne jednačine dinamike dobijamo na sledeći način. Ako se tenzor napona prepíše u obliku

$$\tilde{\mathcal{P}} = (3\lambda + 2\mu)\frac{1}{3}(\text{Tr}\tilde{\mathcal{D}})\tilde{\mathcal{E}} + 2\mu\left(\tilde{\mathcal{D}} - \frac{1}{3}(\text{Tr}\tilde{\mathcal{D}})\tilde{\mathcal{E}}\right), \quad (13.8)$$

onda se vidi da postoji analogija sa izrazom za tenzorom viskoznosti Navije–Stoksovog fluid, s tim što ovde umesto tenzora brzine deformacije figuriše tenzor deformacije. Takođe, uzimajući u obzir da se delići malo udaljavaju od svojih ravnotežnih položaja, približno važi $\frac{\partial}{\partial x_i} \approx \frac{\partial}{\partial X_i}$, pa divergencija tenzora napona može da se izračuna analogno divergenciji tenzora viskoznosti. Osim toga, u Lagranževim koordinatama je

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2},$$

pa se, uzimajući sve to u obzir, ispostavlja da osnovna jednačina dinamike u ovom slučaju ima oblik

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \rho \vec{f} + \mu \Delta \vec{u} + (\lambda + \mu) \text{graddiv} \vec{u}, \quad (13.9)$$

gde se parcijalni izvodi u 'Δ' i 'graddiv' računaju po Lagranževim koordinatama.

ZADACI

Zadatak 13.3.1. Pokazati da je relativna promena dužine supstancijalne duži $d\vec{X} = dS\vec{e}_1$, do koje dođe za infintezimalno kratko vreme dt jednaka dijagonalnom elementu $\text{cal}D_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1}$ tenzora deformacije (računatom u početnoj tački uočene supstancijalne duži), pod pretpostavkom da je $|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}| \ll 1$.

Zadatak 13.3.2. Uočiti supstancijalne duži $d\vec{X}_1 = dS_1\vec{e}_1$ i $d\vec{X}_2 = dS_2\vec{e}_2$, koje u nekom trenutku imaju zajednički početak. Pokazati da je

$$\mathcal{D}_{12} \approx \frac{\frac{\pi}{2} - \Theta}{2},$$

gde je Θ ugao između uočenih supstancijalnih duži u bliskom sledećem trenutku, pod pretpostavkom da je $|\frac{\partial u_i}{\partial X_j}| \ll 1$.

Zadatak 13.3.3. Kroz elastičnu sredinu prostire se longitudinalni talas

$$\vec{u} = u\vec{e}_1 = \varepsilon \sin \frac{2\pi}{l}(X_1 - c_L t)\vec{e}_1, \varepsilon \ll l.$$

Pretpostavljajući da se zapreminske sile mogu zanemariti, kao i da se gustina sredine malo menja pri prostiranjju ovakvog talasa kroz nju, tj. $\rho \approx \rho_0$, pokazati da je fazna brzina talasa jednaka

$$c_L = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho_0}}.$$

Zadatak 13.3.4. Za transversalni talas

$$\vec{u} = u\vec{e}_2 = \varepsilon \sin \frac{2\pi}{l}(X_1 - c_T t)\vec{e}_2, \varepsilon \ll l,$$

koji se prostire kroz elastičnu sredinu, pri čemu je $\rho = \rho_0$, pokazati da je $c_T = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_0}}$, zanemarujući zapreminske sile.

Glava 14

Rešenja zadataka

14.1 Opisivanje kretanja

Rešenje 10.5.1. (i) Pošto je $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ iz izraza za v_1 sledi:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} = K x_1 \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_1}{x_1} = K dt \quad \Rightarrow \quad \ln x_1 = Kt + \text{const} \quad \Rightarrow \quad x_1 = C_1 e^{Kt},$$

gde se integraciona konstanta određuje iz početnog uslova $x_1(0) = X_1$, odakle je

$$x_1(t) = X_1 e^{Kt}.$$

Na sličan način je:

$$\begin{aligned} v_2 = \frac{dx_2}{dt} &= K x_2 (1 + 2t/\tau) \quad \Rightarrow \quad \frac{dx_2}{x_2} = K (1 + 2t/\tau) dt \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \ln x_2 &= K \left(t + \frac{t^2}{\tau} \right) + \text{const} \quad \Rightarrow \quad x_2 = C_2 e^{K(t+t^2/\tau)} \end{aligned}$$

odnosno

$$x_2(t) = X_2 e^{K(t+t^2/\tau)}.$$

Takođe, iz $v_3 = 0$ sledi da je $x_3 = X_3$.

(ii) Zamenom dobijenih izraza za $x_i(t)$ u polje brzine dobija se izraz za brzinu u Lagranževim promenljivim (X_1, X_2, X_3):

$$v_1^L = K X_1 e^{Kt}, \quad v_2^L = K X_2 (1 + 2t/\tau) e^{K(t+t^2/\tau)}, \quad v_3^L = 0.$$

(iii) Pošto gustina ne zavisi od koordinata, već samo od vremena, iz jednačine kontinuiteta sledi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(t) \text{div} \vec{v} &= 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{dt} + 2K(1 + t/\tau)\rho = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\rho}{\rho} = -2K(1 + t/\tau)dt \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \ln \rho &= -2K[t + t^2/(2\tau)] + \text{const} \quad \Rightarrow \quad \rho = C_3 e^{-2K[t+t^2/(2\tau)]}, \end{aligned}$$

gde se konstanta C_3 određuje iz uslova $\rho(t=0) = \rho_0$, tako da je konačno

$$\rho(t) = \rho_0 e^{-2K[t+t^2/(2\tau)]}.$$

Rešenje 10.5.2 (i) Pošto brzina ima samo x_1 komponentu, jednačina kontinuiteta se svodi na jednačinu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x_1} = 0,$$

odakle sledi

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \omega \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t - 2} \Rightarrow u(x_1, t) = x_1 \omega \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t - 2} + F(t).$$

Funkciju $F(t)$ određujemo iz zadatog uslova $u(x_1 = 0, t) = U$, odakle je $F(t) = U$, tj. zaključujemo da se ova funkcija svodi na konstantu, pa se za bolje brzine dobija oblik

$$\vec{v} = \left(x_1 \omega \frac{\sin \omega t}{\cos \omega t - 2} + U \right) \vec{e}_1.$$

(ii) Polje ubrzanja dobija se direktnom zamenom brzine u izraz za njen supstancijalni izvod:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{e}_1 \left(u \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial t} \right).$$

Pošto je

$$\frac{\partial u}{\partial t} = x_1 \omega^2 \frac{1 - 2 \cos \omega t}{(\cos \omega t - 2)^2},$$

a $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ je izračunat u delu (i), nakon ubacivanja u izraz za \vec{a} i sređivanja konačno se dobija

$$\vec{a} = \frac{\omega}{2 - \cos \omega t} \left(\frac{\omega x_1}{2 - \cos \omega t} (1 - 2 \cos \omega t + \sin^2 \omega t) - U \sin \omega t \right) \vec{e}_1.$$

Rešenje 10.5.3.

Rezultat 10.5.6. (i)

$$v_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{Q x_1 - \Gamma x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{Q x_2 + \Gamma x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_3 = 0$$

(ii)

$$a_1 = -\frac{Q^2 + \Gamma^2}{4\pi^2} \frac{x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad a_2 = -\frac{Q^2 + \Gamma^2}{4\pi^2} \frac{x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}$$

(iii)

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2\pi(x_1^2 + x_2^2)^2} \begin{pmatrix} Q(x_2^2 - x_1^2) + 2\Gamma x_1 x_2 & \Gamma(x_2^2 - x_1^2) - 2Q x_1 x_2 & 0 \\ \Gamma(x_2^2 - x_1^2) - 2Q x_1 x_2 & -(Q(x_2^2 - x_1^2) + 2\Gamma x_1 x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(v)

$$F = \frac{Q}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz = QH$$

(vi)

$$\text{rot} \vec{v} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(r v_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(\Gamma/(2\pi))}{\partial r} - \frac{\partial(Q/(2\pi r))}{\partial \varphi} \right) \vec{e}_z = 0$$

14.2 Sile u fizici neprekidnih sistema

Rešenje 11.2.1 a) Traženi vektor napona $\vec{P}_{\vec{n}}$ jednak je

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \tilde{\vec{P}} \cdot \vec{n},$$

gde je $\vec{n} = (\vec{e}_1 + 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)/3$ ort normale uočene površine, tj.

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ MPa} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \text{ MPa}.$$

Normalna komponenta $(\vec{P}_{\vec{n}})_N$ ovog vektora je

$$(\vec{P}_{\vec{n}})_N = \vec{P}_{\vec{n}} \cdot \vec{n} = \frac{25}{9} \text{ MPa}.$$

b)

$$\mathcal{P}'_{12} = \vec{e}_1 \cdot \tilde{\vec{P}} \cdot \vec{e}_2 = \frac{7\sqrt{2}}{6} \text{ MPa}$$

Rešenje 11.2.2 Ako sa $f(x_1, x_2)$ označimo funkciju $x_1^2 + x_2^2$, onda je ort normale na površinu $x_1^2 + x_2^2 = 1$ u proizvoljnoj njenoj tački

$$\vec{n} = \frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|} = \frac{2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)}{\sqrt{4(x_1^2 + x_2^2)}} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2,$$

što znači da je vektor napona koji deluje na ravan tangentnu na uočenu površinu jednak

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100x_1x_2 \\ 100x_1^2 \\ -100x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

U tački $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ je traženi vektor napona onda jednak

$$\vec{P} = 25(\sqrt{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \sqrt{3}\vec{e}_3).$$

Rešenje 11.2.3 Na uočeni deo zida deluje tečnost sa unutrašnje strane i atmosfera sa spoljašnje strane rezervoara. Neka je atmosferski pritisak jednak p_0 . Pritisak u tečnosti jednak je $p(y) = \text{const} - \rho gy$, gde konstantu određujemo iz uslova da je na površini tečnosti $y = H$ pritisak jednak atmosferskom:

$$p(H) = \text{const} - \rho gH = p_0 \Rightarrow \text{const} = p_0 + \rho gH \Rightarrow p(y) = p_0 + \rho g(H - y).$$

Sila kojom tečnost deluje na zid jednaka je

$$\vec{F}^t = - \int_S p \, d\vec{S} = - \int_S (p_0 + \rho g(H - y)) \vec{n} \, dS,$$

a sila kojom atmosfera spolja deluje je

$$\vec{F}^a = - \int_S p_0(-\vec{n})dS,$$

tako da je ukupna površinska sila koja deluje na zid:

$$\vec{F} = \vec{F}^t + \vec{F}^a = - \int_S \rho g(H - y)\vec{n}dS.$$

Element površine jednak je

$$dS = dzdl = dz\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dzdx\sqrt{1 + (y')^2} = dzdx\sqrt{1 + 4a^2x^2},$$

a ort normale

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}(y - ax^2)}{|\text{grad}(y - ax^2)|} = \frac{\vec{e}_y - 2ax\vec{e}_x}{\sqrt{1 + 4a^2x^2}},$$

pa je

$$\begin{aligned}\vec{F} &= - \int_z^{z+L} dz \int_0^{\sqrt{H/a}} dx \rho g(H - ax^2)(\vec{e}_y - 2ax\vec{e}_x) \\ &= -\rho gL \int_0^{\sqrt{H/a}} dx (H - ax^2)(\vec{e}_y - 2ax\vec{e}_x).\end{aligned}$$

Projekcija ove sile na x -osu jednaka je

$$F_x = 2\rho gLa \int_0^{\sqrt{H/a}} dx (H - ax^2)x = \frac{1}{2}L\rho gH^2,$$

a na osu y :

$$F_y = -\rho gL \int_0^{\sqrt{H/a}} dx (H - ax^2) = -\frac{2}{3}L\rho gH\sqrt{\frac{H}{a}}.$$

Rešenje 11.2.4 Ako sa $f(x_1, x_2)$ označimo funkciju $x_1^2 + x_2^2$, onda je ort normale na površinu $x_1^2 + x_2^2 = 1$ u proizvoljnoj njenoj tački

$$\vec{n} = \frac{\text{grad} f}{|\text{grad} f|} = \frac{2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)}{\sqrt{4(x_1^2 + x_2^2)}} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2,$$

što znači da je vektor napona koji deluje na ravan tangentnu na uočenu površinu jednak

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 & 100x_1 & -100x_2 \\ 100x_1 & 0 & 0 \\ -100x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100x_1x_2 \\ 100x_1^2 \\ -100x_1x_2 \end{pmatrix}.$$

U tački $(1/2, \sqrt{3}/2, 3)$ je traženi vektor napona onda jednak

$$\vec{P} = 25(\sqrt{3}\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \sqrt{3}\vec{e}_3).$$

14.3 Fluidi

Rešenje 12.3.1 (a) Pošto je

$$\Delta \vec{v} = \vec{e}_z \Delta v = \vec{e}_z \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) = -2C \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \vec{e}_z, \quad (14.1)$$

i $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = 0$, zamenom u Stoksovu jednačinom, iz njene projekcije na z -osu, direktno sledi vrednost konstante C :

$$C = -\frac{K}{2\eta} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}. \quad (14.2)$$

(b) Protok kroz poprečni presek cevi jednak je

$$Q = \rho \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \int_S v dS$$

gde je S površina elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Sa predloženom smenom promenljivih dalje se dobija

$$Q = \rho C \int_0^1 dr \int_0^{2\pi} d\theta (1 - r^2) abr = \frac{1}{2} \pi \rho ab C.$$

(c) Iz oblika polja brzine jasno je da su svi parcijalni izvodi $v_1 = v_x$ i $v_2 = v_y$ komponente brzine jednaki nuli, kao i da $\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0$, tako da je tenzor brzine deformacije reprezentovan matricom:

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{pmatrix} = \frac{K}{2\eta(a^2 + b^2)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & b^2 x \\ 0 & 0 & a^2 y \\ b^2 x & a^2 y & 0 \end{pmatrix}. \quad (14.3)$$

Vektor napona koji deluje na elementarnu površinu, čiji je ort normale \vec{n} , jednak je $\vec{P}_{\vec{n}} = (-p\mathcal{I} + 2\eta\mathcal{S})\vec{n}$. Ort normale na površinu cevi najlakše se određuje pomoću gradijenta funkcije $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$, pošto jednačina $F(x, y, z) = 0$ predstavlja jednačinu površine cevi. Na taj način je

$$\vec{n} = \frac{\text{grad} F(x, y, z)}{|\text{grad} F(x, y, z)|},$$

pa je

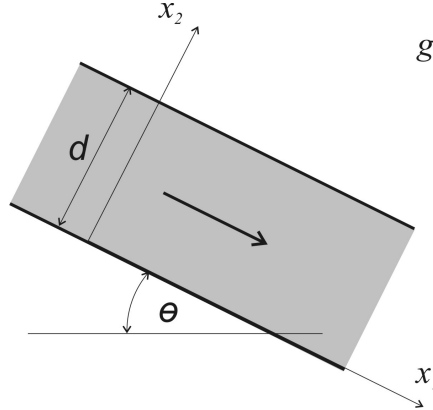
$$\vec{n} = -\frac{\frac{x}{a^2}\vec{e}_x + \frac{y}{b^2}\vec{e}_y}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}},$$

gde je znak minus uzet pošto tečnost iznutra deluje na zid cevi. Sila viskoznosti po jedinici površine jednaka je tangencijalnoj komponenti napona, pa je sila viskoznosti koja deluje na jediničnu dužinu cevi

$$\vec{F}_{visk} = \int_S (2\eta\mathcal{S})\vec{n} dS,$$

gde je dS elementarna površina na cevi, a S je površina odsečka cevi jedinične dužine. Jano je da je $dS = dz dl$, gde je dl dužina elementarnog luka elipse, tj.

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}.$$



Slika 14.1: Slika uz rešenje zadatka 12.3.2.

Ako ponovo iskoristimo predloženu smenu promenljivih elementarna površina postaje

$$dS = \sqrt{a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta} d\theta dz,$$

a tražena sila viskoznosti

$$\vec{F}_{visk} = -\vec{e}_z \frac{Kab}{a^2 + b^2} \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\theta (a^2 \sin^2 \theta + b^2 \cos^2 \theta) = -\pi Kab \vec{e}_z.$$

Rešenje 12.3.2 Uvodeći koordinatni sistem kao što je naznačeno na slici 14.1 po pretpostavci zadatka brzinu treba tražiti u obliku $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$, pa se nakon projektovanja Stoksove jednačine na koordinatne ose, dobijaju jednačine:

$$0 = g \sin \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\eta}{\rho} \Delta v \quad (14.4)$$

$$0 = -g \cos \theta - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_2} \quad (14.5)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_3}. \quad (14.6)$$

Iz treće od ovih jednačina se zaključuje da pritisak ne zavisi od x_3 koordinate, a iz druge onda sledi da pritisak ima oblik

$$p(x_1, x_2) = F(x_1) - \rho g \cos \theta x_2,$$

gde je $F(x_1)$ funkcija koju treba odrediti. Pošto je, prema uslovu zadatka, pritisak uz donju ploču konstantan i jednak p_0 , sledi da je $p(x_1, x_2 = 0) = p_0$, odnosno $F(x_1) = p_0$, pa je konačni izraz za pritisak

$$p(x_1, x_2, x_3) = p_0 - \rho g \cos \theta x_2. \quad (14.7)$$

Onda iz jednačine (14.4) sledi

$$\frac{d^2 v}{dx_2^2} = -\frac{g\rho}{\eta} \sin \theta \Rightarrow v(x_2) = -\frac{g\rho}{2\eta} \sin \theta x_2^2 + C_1 x_2 + C_2,$$

gde se integracione konstante C_1 i C_2 dobijaju iz graničnih uslova $v(0) = v(d) = 0$, tako da je konačni izraz za brzinu

$$v(x_2) = \frac{g\rho}{2\eta} \sin \theta x_2 (d - x_2). \quad (14.8)$$

Ukupna sila kojom fluid deluje na jediničnu površinu donje ploče jednaka je

$$\vec{P}_{\vec{e}_2} = \tilde{\mathcal{P}} \Big|_{x_2=0} \vec{e}_2,$$

gde je tenzor napona $\tilde{\mathcal{P}}$ dat izrazom

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}} + 2\eta\tilde{\mathcal{S}}.$$

Na osnovu dobijenog izraza za brzinu, lako se nalazi da tenzoru brzine deformacije $\tilde{\mathcal{S}}$ odgovara matrica

$$\mathcal{S} = \frac{g\rho}{4\eta} \sin \theta (d - 2x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je tražena sila po jedinici površine jednaka

$$\vec{P}_{\vec{e}_2} = -p_0\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\rho g d \sin \theta \vec{e}_1.$$

Rešenje 12.3.4 (a) Direktnom zamenom datog potencijala u izraz za laplasijan u cilindričnim koordinatama

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial\Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \quad (14.9)$$

dobija se da je $\Delta\Phi = 0$.

(b) Pošto je

$$\vec{v} = \text{grad}\Phi = \nabla\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{e}_z, \quad (14.10)$$

cilindrične komponente brzine jednake su

$$v_r = U \cos \varphi \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right), \quad v_\varphi = -U \sin \varphi \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right), \quad v_z = 0. \quad (14.11)$$

Granični uslov koji treba da bude zadovoljen pri proticanju idealnog fluida oko cilindra $r = R$ je uslov neprobojnosti, tj. uslov da je normalna komponenta brzine na površini cilindra jednaka nuli:

$$v_r|_{r=R} = 0, \quad (14.12)$$

što jeste zadovoljeno. Takođe, pošto je $\text{div}\vec{v} = \text{div grad}\Phi = \Delta\Phi = 0$, zaista se radi o nestišljivom proticanju.

Dekartove komponente brzine v_x i v_y izražavaju se preko cilindričnih komponenta kao

$$v_x = v_r \cos \varphi - v_\varphi \sin \varphi, \quad v_y = v_r \sin \varphi + v_\varphi \cos \varphi, \quad (14.13)$$

odakle je

$$\lim_{r \rightarrow \infty} v_x = U, \quad \lim_{r \rightarrow \infty} v_y = 0. \quad (14.14)$$

(c) Pošto je kretanje potencijalno i stacionarno, zapreminskih sila nema, a gustina fluida konstantna, zadovoljeni su uslovi za primenu Bernulijeve jednačine u bilo kojoj tački i bilo kom trenutku, pa je

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} \right) = \frac{p_\infty}{\rho} + \frac{U^2}{2}, \quad (14.15)$$

odakle je

$$p = p_\infty - \frac{\rho U^2}{2} \left(\frac{2R^2}{r^2} (\sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) + \frac{R^4}{r^4} \right), \quad (14.16)$$

pri čemu smo iskoristili izraze za komponente brzine nađene pod b).

(d) Ukupna površinska sila \vec{F} , koja deluje na jedinicu dužine cilindra jednaka je

$$\vec{F} = - \int_S p \, d\vec{S},$$

gde je S površina tog dela cilindra. Element površine $d\vec{S}$ na omotaču cilindra jednak je $Rd\varphi dz \vec{e}_r$, gde je R poluprečnik osnove cilindra, pa je

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -R \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz p(R, \varphi) \vec{e}_r \\ &= -R \int_0^{2\pi} d\varphi \left(p_\infty - \frac{\rho U^2}{2} (4 \sin^2 \varphi - 1) \right) (\vec{e}_1 \cos \varphi + \vec{e}_2 \sin \varphi) = 0, \end{aligned}$$

gde smo iskoristili

$$\int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \varphi - 1) \cos \varphi d\varphi = \int_0^{2\pi} (4 \sin^2 \varphi - 1) \sin \varphi d\varphi = 0.$$

14.4 Elastično telo

Rešenje 13.3.1

$$d\vec{X} + \vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}, t) = \vec{u}(\vec{X}, t) + d\vec{x}$$

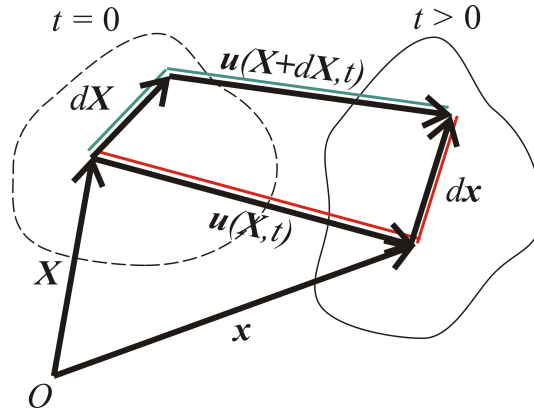
$$d\vec{x} = d\vec{X} + \vec{u}(\vec{X} + d\vec{X}, t) - \vec{u}(\vec{X}, t) = d\vec{X} + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX_1 \\ dX_2 \\ dX_3 \end{pmatrix}$$

$$\tau_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j} = \tau_{ij}^S + \tau_{ij}^A, \quad \tau_{ij}^S = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right) = \mathcal{D}_{ij}, \quad \tau_{ij}^A = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial X_j} - \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \right)$$

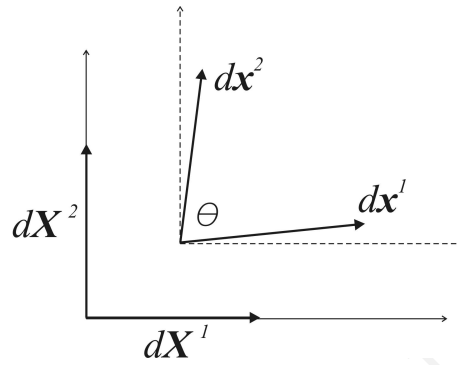
$$d\vec{X} = dS \vec{e}_1:$$

$$d\vec{x} = dS \vec{e}_1 + \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dS \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = dS \left(\vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X_1} \right)$$

$$\Rightarrow (d\vec{x})^2 = (dS)^2 \left(\vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X_1} \right)^2 = (dS)^2 \left[1 + 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial X_1} \right)^2 \right]$$



Slika 14.2: Slika uz rešenje zadatka 13.3.1.



Slika 14.3: Smisao vandijagonalnih elemenata tenzora deformacije - slika uz rešenje zadatka 13.3.2.

$$\left| \frac{\partial u_i}{\partial X_j} \right| \ll 1 \Rightarrow \frac{(\vec{d}\vec{x})^2 - (dS)^2}{(dS)^2} = 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1} + \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial X_1} \right)^2 \approx 2 \frac{\partial u_1}{\partial X_1},$$

$$\mathcal{D}_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial X_1} = \frac{(\vec{d}\vec{x})^2 - (dS)^2}{2(dS)^2} = \frac{(|\vec{d}\vec{x}| - dS)(|\vec{d}\vec{x}| + dS)}{2(dS)^2} \approx \frac{|\vec{d}\vec{x}| - dS}{dS}$$

Rešenje 13.3.2 $d\vec{X}^1 = dS_1 \vec{e}_1$, $d\vec{X}^2 = dS_2 \vec{e}_2$:

$$d\vec{x}^1 = dS_1 \left(\vec{e}_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X_1} \right), \quad d\vec{x}^2 = dS_2 \left(\vec{e}_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial X_2} \right)$$

$$d\vec{x}^1 \cdot d\vec{x}^2 \approx dS_1 dS_2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \right) = 2 dS_1 dS_2 \mathcal{D}_{12}$$

$$\Rightarrow \mathcal{D}_{12} = \frac{d\vec{x}^1 \cdot d\vec{x}^2}{2 dS_1 dS_2} = \frac{|\vec{d}\vec{x}^1| |\vec{d}\vec{x}^2| \cos \angle(\vec{d}\vec{x}^1, \vec{d}\vec{x}^2)}{2 dS_1 dS_2} \approx \frac{1}{2} \cos \Theta = \frac{1}{2} \sin \angle\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) \approx \frac{\frac{\pi}{2} - \Theta}{2}$$

Deo III

Specijalna teorija relativnosti

Glava 15

Postulati specijalne teorije relativnosti

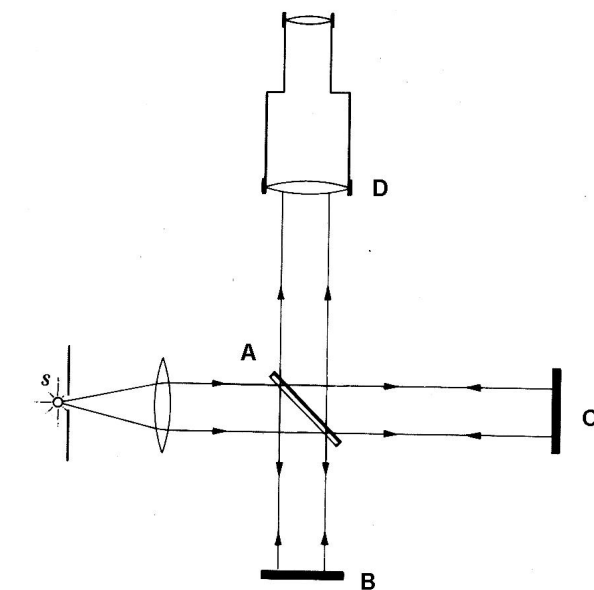
15.1 Istorijski uvod

- ...mehanika, elektromagnetizam, optika... bla-bla...
- Maksvelove jednačine (1873) za elektromagnetno polje...
- Iz Maksvelovih jednačina sledi postojanje elektromagnetnih talasa u vakuumu...
- Za takve talase se u to vreme nije znalo, a Maksvelova teorija je predviđala da je njihova brzina jednaka $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0} = 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}$, što se poklapalo sa brzinom svetlosti \Rightarrow da li je svetlost elektromagnetni talas?
- Hercovi ogledi (1888) - eksplicitna demonstracija postojanja elektromagnetnih talasa
- U međuvremenu - teorijski pokušaji objašnjenja postojanja elektromagnetnih talasa, hipoteza etra (elektromagnetni talas predstavlja prenošenje oscilacija kroz etar - sredinu koja je apsolutno prozirna, nulte gustine, nedektabilna itd, a vezan je za apsolutno mirujući referentni sistem)...
- Majkelson-Morlijev eksperiment (1887)...

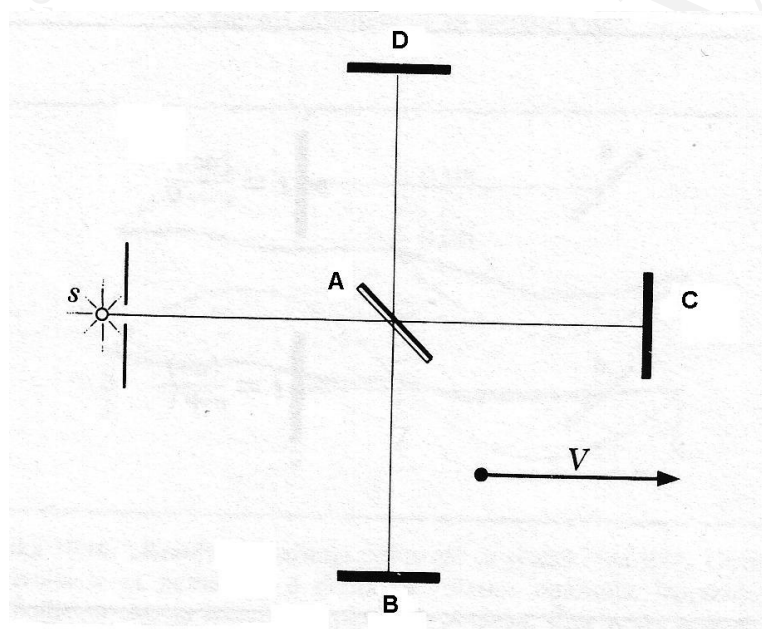
15.1.1 Majkelson-Morlijev eksperiment

Cilj Majkelson-Morlijevog eksperimenta je bio da se utvrdi kretanje Zemlje u odnosu na etar, dakle postojanje etra. Eksperiment je izveden na interferometru čija je šema prikazana na slici 15.1. Iz monohromatskog izvora svetlosti zraci padaju na polupropusno ogledalo A, tako da jedan deo zraka prolazi kroz A prema ogledalu C, odbija se, vraća nazad do A, tu se reflektuje i odlazi prema detektoru D. Drugi deo zraka se odbija od A, prema ogledalu B, o koje se takođe reflektuje, vraća nazad, prolazi kroz A i pada na D. Na detektoru D se stvara interferenciona slika. Pošto se po hipotezi etra Zemlja kreće u odnosu na etar, trebalo bi da promena pravca kretanja Zemlje (i interferometra na njoj) dovede do promene interferencione slike na D, ako su svi ostali uslovi pod kojim se eksperiment izvodi isti.

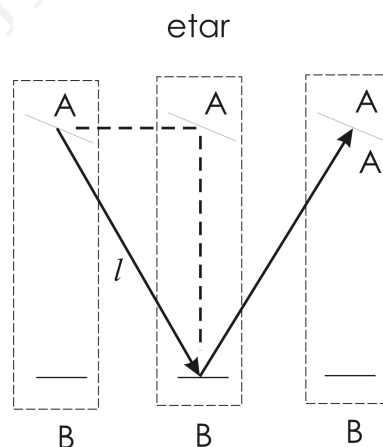
Neka su c i V redom brzina svetlosti i brzina Zemlje u odnosu na etar (slika 15.2(a)). Vreme za



Slika 15.1: Šema Majkelson-Morlijevog (Michelson-Morley) interferometra: s - monohromatski izvor svetlosti, A - polupropusno ogledalo, B i C - ogledala, D - detektor

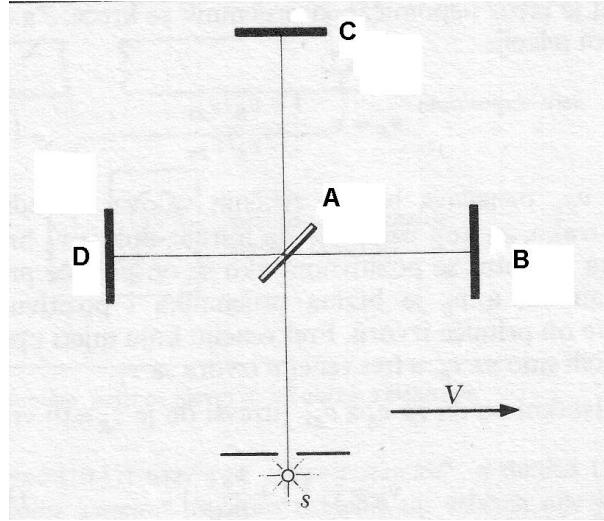


(a)



(b)

Slika 15.2: (a) Majkelson-Morlijev interferometar se po pretpostavci, zajedno sa Zemljom kreće u odnosu na hipotetički etar: c - brzina svetlosti u odnosu na etar; V - brzina Zemlje (interferometra) u odnosu na etar; u odnosu na Zemlju, svetlost udesno putuje brzinom $c - v$, a ulevo brzinom $c + v$. (b) Pomeranje ogledala A i B i putanja zraka koji se odbija od ogledala A , a zatim od B , posmatrano iz sistema vezanog za etar.



Slika 15.3: Majkelson-Morlijev interferometar kreće se brzinom V u odnosu na etar.

koje svetlost pređe put od A do C jednako je $\frac{\overline{AC}}{c-V}$, dok isti put unazad pređe za vreme $\frac{\overline{AC}}{c+V}$, pa je ukupno vreme t jednako

$$t = \frac{\overline{AC}}{c-V} + \frac{\overline{AC}}{c+V} = 2\overline{AC} \frac{c}{c^2 - V^2}.$$

Sa stanovišta posmatrača iz sistema koji apsolutno miruje, kretanje zraka koji se odbija od A, pa zatim od B i vraća nazad na ogledalo A, izgleda kao na slici 15.2(b). Ako je t' vreme potrebno zraku da pređe taj put, put koji zrak pređe od A do B jednak je $ct'/2$, pa je onda

$$c^2 \left(\frac{t'}{2} \right)^2 = V^2 \left(\frac{t'}{2} \right)^2 + \overline{AB}^2 \Rightarrow t' = 2 \frac{\overline{AB}}{\sqrt{c^2 - V^2}}.$$

Odatle je fazna razlika ova dva zraka jednaka

$$\delta = \frac{c}{\lambda} (t' - t) = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\overline{AB}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{\overline{AC}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} \right).$$

Pretpostavimo sada da se relativna brzina interferometra (Zemlje) u odnosu na etar zarotira za $\pi/2$ (slika 15.3). U tom slučaju će fazna razlika biti jednaka

$$\delta' = \frac{2}{\lambda} \left(\frac{\overline{AB}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{\overline{AC}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right),$$

pa je

$$\Delta\delta = \delta' - \delta = \frac{2}{\lambda} (\overline{AB} + \overline{AC}) \left(\frac{1}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \right) \approx \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{\lambda} \frac{v^2}{c^2},$$

što znači da trebalo da se dobije drugačija interferenciona slika. Međutim, kako god se eksperiment ponavljao, ako su ostali uslovi bili isti (nepromenjene vrednosti rastojanja \overline{AB} , \overline{AB} i talasne dužine svetlosti λ) uvek se dobijala ista interferenciona slika. Predlagana su razna komplikovana objašnjenja ovakvog negativnog rezultata eksperimenta...

15.2 Postulati specijalne teorije relativnosti

1905. godine Albert Ajnštajn postavio je postulate specijalne teorije relativnosti:

- **Princip relativnosti:** Zakoni fizike su isti u svim inercijalnim sistemima reference.
- **Princip konstantnosti brzine svetlosti u vakuumu:** Brzina svetlosti u vakuumu ima istu vrednost c u svim inercijalnim sistemima reference, tj. ne zavisi od kretanja izvora ili posmatrača ($c = 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s} \approx 3 \times 10^8 \text{m/s}$).

Ovime je negativan rezultat Majkelson-Morlijev eksperimenta jednostavno objašnjen, a to je onda dalje značilo da relativno kretanje Zemlje u odnosu na etar ne može da se utvrdi. Takođe, etar, kao sredina potrebna za objašnjenje postojanja elektromagnetnih talasa, više nije bio potreban. Samim tim prestala je i potreba za apsolutno mirujućim referentnim sistemom, a za definiciju inercijalnog sistema usvojena je tzv. Ajnštajnova definicija, po kojoj je inercijalni sistem svaki referentni sistem u kome telo koje ne interaguje sa drugim telima ostaje u stanju mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja.

15.2.1 Direktne posledice Ajnštajnovih postulata

Inercijalni sistemi i Galilejeve transformacije

Galilejeve transformacije (slika 1.3): $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{u}t$, $t' = t$

Posledice: $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = \vec{r}'_1 - \vec{r}'_2$, $\vec{v}_1 - \vec{v}_2 = \vec{v}'_1 - \vec{v}'_2$, $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}$, $\vec{a} = \vec{a}'$

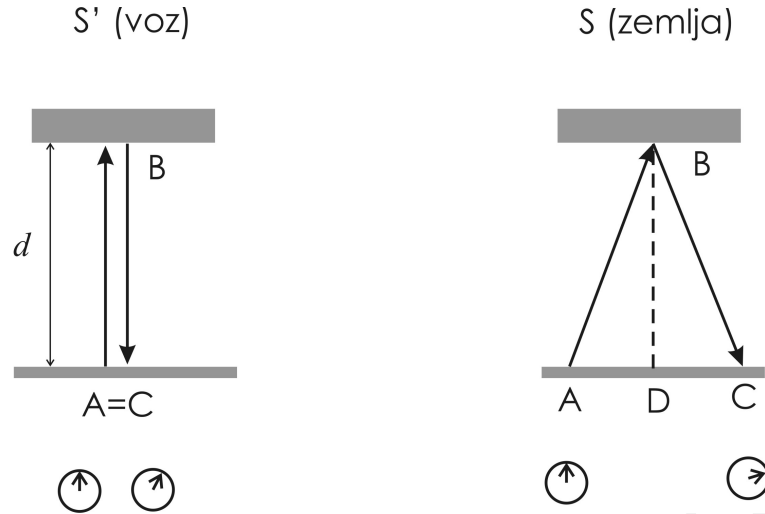
Osnovne jednačine dinamike $m_\nu \vec{a}_\nu = \vec{F}_\nu(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dots, \dot{\vec{r}}_N, t)$ zadržavaju oblik!

Ali, Maksvelove NE! Iz principa relativnosti onda sledi da nešto nije u redu sa Galilejevim transformacijama.

Relativnost vremena

Misaoni eksperiment: Svetlosni signal šalje se vertikalno naviše, odbija se od ogledala na plafonu vagona i vraća se nazad. Posmatrač koji se nalazi na mestu odakle se signal šalje, meri vreme $\Delta t'$ potrebno signalu da ode i da se vrati nazad (slika 15.4). Ako je visina vagona d , izmereno vreme jednako je $\Delta t' = 2d/c$. Za posmatrača koji stoje na platformi pored koje voz prolazi brzinom u (sistem S), događaji odašiljanja i primanja signala ne dešavaju se na istom mestu, a kretanja svetlosnog signala izgleda kao na desnoj strani slike 15.4. Pošto se i u ovom sistemu svetlost kreće brzinom c , a upadni ugao pod kojim svetlosni signal pada na ogledalo jednak je odbojnom, sledi da je

$$c^2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 = u^2 \left(\frac{\Delta t}{2} \right)^2 + d^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta t = 2 \frac{d}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$



Slika 15.4: Levo: Posmatrač koji sedi u vozu (sistem S'), šalje svetlosni signal vertikalno naviše prema ogledalu na plafonu, od koje se taj signal odbija i vraća nazad. Vreme $\Delta t'$ potrebno svetlosnom zraku da ode i da se vrati, posmatrač meri na svom časovniku. Desno: Put svetlosnog zraka, posmatran sa platforme pored koje voz prolazi (sistem S).

Oдавde je

$$\frac{\Delta t'}{\Delta t} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} < 1,$$

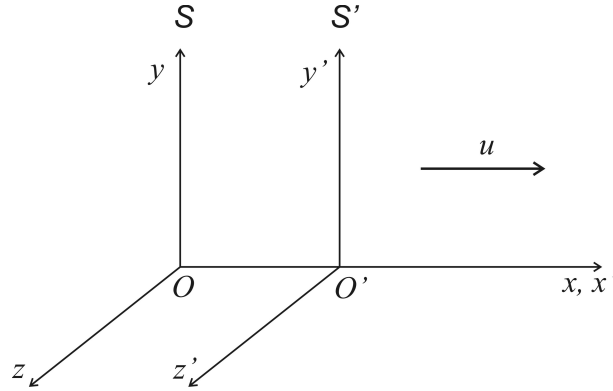
tj. vremenski interval između dva događaja nije isti u svim inercijalnim sistemima, što znači da vreme nije apsolutno, pa ponovo zaključujemo da Galilejeve transformacije nisu tačne.

15.3 Lorencove transformacije

Neka se neki događaj u inercijalnom sistemu S desio u trenutku t i tački kojoj u odgovaraju koordinate (x, y, z) . Lorencove transformacije povezuju (x, y, z) i t , sa koordinatama (x', y', z') i trenutkom t' , koji odgovaraju istom događaju u nekom drugom inercijalnom sistemu S' . To su, dakle, transformacije koje treba da zamene Galilejeve transformacije, kada se u obzir uzmu Ajnštajnovi postulati, specijalno postulat o konstantnosti brzine svetlosti. Neka se sistem S' kreće u odnosu na sistem S konstantnom brzinom \vec{u} i izaberimo koordinatne sisteme u S i S' tako da im se ose Ox i $O'x'$ poklapaju, a da ose Oy i Oy' , kao i Oz i $O'z'$ ostaju paralelne u toku kretanja (slika 15.5), pri čemu je $\vec{u} = u\vec{e}_x$, a vreme se u oba sistema meri u odnosu na trenutak kada su se O i O' poklopili. U sledećem odeljku pokazaćemo da, ako su koordinatni sistemi u sistemima S i S' izabrani kako je rečeno, onda Lorencove transformacije imaju oblik:

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{u}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}. \quad (15.1)$$

Naravno, u slučaju malih brzina, tj. kada je $u \ll c$, ove transformacije se svode na Galilejeve (1.6).



Slika 15.5: Ako se koordinatni sistemi u inercijalnim sistemima S i S' izaberu na način prikazan na ovoj slici, pri čemu se vreme meri u odnosu na trenutak kada se O i O' poklapaju, Lorencove transformacije imaju oblik (15.1).

15.3.1 Izvođenje Lorencovih transformacija

- jednačina talasnog fronta svetlosti koja je u trenutku $t = 0$ krenula iz koordinatnog početka:

$$S: \quad x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2, \quad S': \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2$$

- pokušaj:

$$x' = \alpha x + \varepsilon t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \delta x + \eta t$$

- Za $x' = 0$ je $dx/dt = u \Rightarrow \boxed{u = -\varepsilon/\alpha}$

- Za $x = 0$ je $dx'/dt' = -u \Rightarrow \boxed{-u = \varepsilon/\eta}$, pa je $\boxed{\alpha = \eta}$

- J-na talasnog fronta: $\alpha^2 x^2 + 2\alpha \varepsilon x t + \varepsilon^2 t^2 + y^2 + z^2 = c^2 (\delta^2 x^2 + 2\delta \alpha x t + \alpha^2 t^2)$ i $x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2$
 \Rightarrow

$$2\alpha \varepsilon = 2c^2 \delta \alpha, \quad \alpha^2 - c^2 \delta^2 = 1, \quad c^2 \alpha^2 - \varepsilon^2 = c^2$$

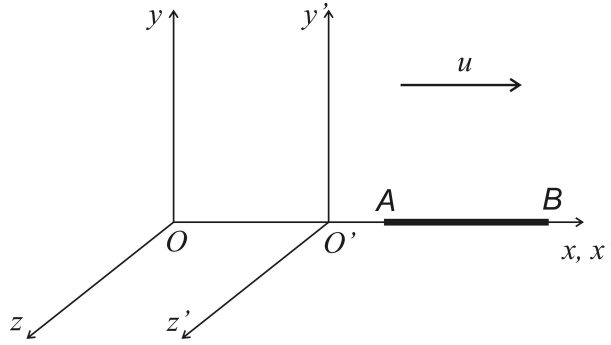
- Pošto je $\varepsilon = -u\alpha$ sledi

$$\alpha = \eta = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \varepsilon = \frac{-u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad \delta = \frac{-\frac{u^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

15.3.2 Posledice Lorencovih transformacija

Kontrakcija dužine

Neka štap AB miruje u sistemu S' i to tako što je postavljen na osu Ox' (slika 15.6) i neka je njegova dužina u tom sistemu $l_0 = x'_B - x'_A$ (tzv. *sopstvena dužina*). U odnosu na sistem S štap se kreće, a njegova dužina u tom sistemu meri se tako što se u istom trenutku izmere položaji njegovih krajeva. Takvom merenju položaja krajeva, dakle, odgovaraju događaji karakterisani koordinatama



Slika 15.6: Dužina štapa najveća je u sistemu u kome štap miruje.

i vremenskim trenutkom $(x_A, y_A = 0, z_A = 0, t)$ i $(x_B, y_B = 0, z_B = 0, t)$. Primenom Lorencovih transformacija se onda direktno dobija da je

$$l_0 = x'_B - x'_A = \frac{x_B - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{x_A - ut}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

odakle je dužina $l = x_B - x_A$ štapa u sistemu S jednaka

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}. \quad (15.2)$$

Znači, *dužina štapa najveća je u sistemu u kome štap miruje.*

Dilatacija vremena

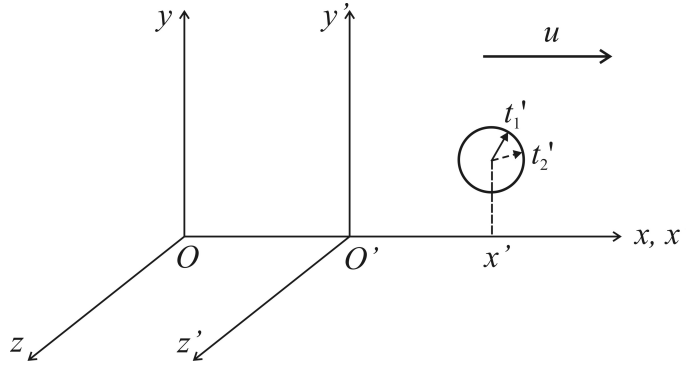
Uočimo dva događaja koji se u sistemu S' dešavaju na istom mestu x' , a u trenucima t'_1 i t'_2 . Vremenski intervala između takva dva događaja jednak je $\Delta\tau = t'_2 - t'_1$. Primenom inverznih Lorencovih transformacija dobija se da je vremenski interval između ova dva događaja u sistemu S jednak

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{t'_2 + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t'_1 + \frac{u}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}},$$

odnosno

$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad (15.3)$$

što predstavlja formula za dilataciju vremenskog intervala. Iz formule se vidi da je $\Delta t > \Delta\tau$, pa to znači da je *vremenski interval između dva događaja najkraći u sistemu u kome se ta dva događaja dešavaju na istom mestu.*



Slika 15.7: Vremenski interval između dva događaja najkraći je u sistemu u kome se ta dva događaja dešavaju na istom mestu.

Relativistički zakon slaganja brzina

$$dx' = \frac{dx - udt}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}, \quad dt' = \frac{dt - \frac{u}{c^2}dx}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \Rightarrow v'_x = \frac{dx'}{dt'} = \frac{v'_x - u}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

$$v'_y = \frac{dy'}{dt'} = \frac{v_y \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}, \quad v'_z = \frac{dz'}{dt'} = \frac{v_z \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}{1 - \frac{uv_x}{c^2}}$$

Ako je $u < c$ i $\vec{v} = c\vec{n}$ (\vec{n} je ort), onda iz relativističkog zakona slaganja brzina sledi da je $\vec{v}' = c\vec{n}'$ (\vec{n}' - ort). (Pokažite!)

Ako je $u < c$ i $|\vec{v}| < c \Rightarrow |\vec{v}'| < c$. (Pokažite!)

Invarijantnost kvadrata relativističkog intervala

Kvadrat relativističkog intervala Δs^2 između događaja (x_1, y_1, z_1, t_1) i (x_2, y_2, z_2, t_2) definiše se kao

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2, \quad (15.4)$$

gde je

$$\Delta x = x_2 - x_1, \quad \Delta y = y_2 - y_1, \quad \Delta z = z_2 - z_1, \quad \Delta t = t_2 - t_1.$$

Direktnom primenom Lorencovih transformacija lako se pokazuje da je

$$\Delta s'^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2 = \Delta s^2,$$

tj. *kvadrat relativističkog intervala između dva događaja ima istu vrednost u svim inercijalnim sistemima.*

Ako je $\Delta s^2 > 0$, to znači da je moguće naći inercijalni sistem u kome je $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$, tj. sistem u kome se uočeni događaji dešavaju na istom mestu. Pošto u tom slučaju u izrazu za kvadrat relativističkog intervala dominira „vremenski” deo, kaže se da su takvi događaji razdvojeni

intervalom vremenskog tipa, a sam interval $\Delta s = \sqrt{c^2\Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2}$ je u tom slučaju realan broj. U suprotnom slučaju, tj. kada je $\Delta s^2 < 0$, postoji inercijalni sistem u kome se događaji dešavaju u istom trenutku ($\Delta t = 0$), a interval je *prostornog tipa* i imaginaran je. Intervali za koje je $\Delta s^2 = 0$ nazivaju se intervalima *svetlosnog tipa*.

©2010 S. Elezović-Hadžić

RADNA VERZIJA
Teorijska mehanika

Glava 16

Tenzorski račun u specijalnoj teoriji relativnosti

16.1 Prostor Minkovskog

Prostor Minkovskog (Hermann Minkowski, 1908): četvorodimenzionalni prostor u kome je tačka uređena četvorka $(ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$, a metrika, tj. kvadrat rastojanja između dve infinitezimalno bliske tačke, definisan relacijom

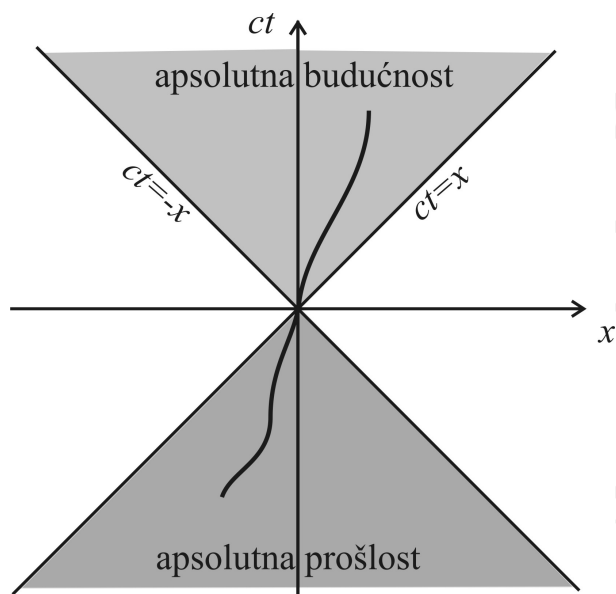
$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 \quad (16.1)$$

tačka \leftrightarrow događaj, prostor Minkovskog \leftrightarrow svet događaja

16.1.1 Svetlosni konus

Tačka $(0, 0, 0, 0)$ u prostoru Minkovskog odgovara tzv. nultom događaju. Posmatrajmo samo ravan (ct, x) u prostoru Minkovskog, tj. ograničimo se na događaje za koje je $y = z = 0$. Prave $ct = \pm x$ u toj ravni odgovaraju kretanju svetlosti duž x ose. Neka se telo u trenutku $t = 0$ nalazilo u tački $x = 0$. Pošto brzina tela ne može biti veća od c , tzv. svetska linija tog tela, tj. linija koja odgovara kretanju tela u ravni (ct, x) leži unutar osenčene oblasti na slici 16.1. Ta oblast naziva se *svetlosni konus*,¹ njegov deo u kome je $t > 0$ zove se apsolutna budućnost, a deo u kome je $t < 0$ apsolutna prošlost. Naime, u sistemu vezanom za uočeno telo, događaji vezani za to telo dešavaju se na istom mestu, pa su intervali između bilo koja takva dva događaja vremenskog tipa: $\Delta s^2 > 0$. Ako je $\Delta\tau = \Delta s/c$ vremenski interval između takva dva događaja u sistemu vezanom za telo, onda je vremenski interval $\Delta t = \Delta\tau / \sqrt{1 - v^2/c^2}$ u sistemu u odnosu na koji se telo kreće brzinom v , istog znaka kao i $\Delta\tau$, tj. vremenski redosled događaja se održava. Događaji van svetlosnog konusa razdvojeni su intervalima prostornog tipa - vremenski redosled takvih događaja u različitim inercijalnim sistemima nije isti.

¹Ako bismo posmatrali trodimenzionalni deo prostora Minkovskog (ct, x, y) onda bi linije koje odgovaraju kretanju svetlosti zaista odgovarale konusu $x^2 + y^2 = c^2 t^2$, a u slučaju celog prostora Minkovskog (ct, x, y, z) radilo bi se o hiper-konusu.



Slika 16.1: Sivo osenčena oblast u prostoru Minkovskog, ograničena pravim linijama $ct = \pm x$ (koje odgovaraju kretanju svetlosti duž x -ose) naziva se *svetlosni konus*. Kriva linija naznačena unutar te oblasti odgovara kretanju tela koje se kreće duž x -ose brzinom $v < c$. Tačke (događaji) unutar svetlosnog konusa razdvojeni su intervalima vremenskog tipa ($\Delta s^2 > 0$). Unutar svetlosnog konusa vremenski redosled događaja ostaje očuvan. Deo konusa u oblasti $t > 0$ naziva se apsolutna budućnost: svi događaji iz te oblasti dešavaju se posle trenutka u kome se dešava nulti događaj $(ct, x) = (0, 0)$ (u svakom inercijalnom sistemu). Slično, oblast konusa $t < 0$ je apsolutna prošlost za nulti događaj.

16.1.2 Razni oblici pisanja Lorencovih transformacija

metrika \leftrightarrow kvadrat relativističkog intervala, metrika je invarijantna u odnosu na Lorencove transformacije, tj. transformacije koordinata: $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$

Lorencove transformacije u matričnom obliku mogu da se predstavljaju kao

$$\begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (16.2)$$

Koriste se oznake: $(x^0, x^1, x^2, x^3) \leftrightarrow x^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, pa se onda vidi da Lorencove transformacije mogu da se napišu i u obliku

$$x'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu,$$

gde je iskorišćena tzv. Ajnštajnova sumaciona konvencija:

$$\sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} x^\nu,$$

tj. sumiranje po ponovljenom indeksu, koji se nalazi jednom na donjem mestu, a drugi put na gornjem, se podrazumeva. Indeksi se uz koordinate pišu gore - to su „gornji” indeksi, a u parcijalnim izvodima, indeks uz koordinatu po kojoj se vrši diferenciranje smatra se „donjim” indeksom.

16.2 Tenzori u prostoru Minkovskog

Tenzori - u opštem slučaju: skup veličina koji se pri transformaciji koordinata transformišu na određeni način. U slučaju prostora Minkovskog, transformacije koordinata su Lorencove transformacije, a same tenzore zovemo četvoro-tenzori (4-tenzori) ili kvadri-tenzori.

16.2.1 Definicije

- skalar (invarijanta, tenzor nultog ranga) Φ

$$\Phi'(x'^0, x'^1, x'^2, x'^3) = \Phi(x^0, x^1, x^2, x^3)$$

Primer: ds^2 je tenzor nultog ranga

- kontravarijantni 4-vektor (tenzor prvog ranga) A^μ (x)

$A'(x')$

$$A'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu$$

A^0 - vremenska komponenta 4-vektora, A^i , $i = 1, 2, 3$ - prostorne komponente 4-vektora

Primer 1: $x'^\mu = x'^\mu(x^0, x^1, x^2, x^3) \Rightarrow dx'^\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} dx^\nu$ (ovo važi za bilo kakve transformacije, ne samo za Lorencove)

Primer 2: uređena četvorka (x^0, x^1, x^2, x^3) je kontravarijantni 4-vektor - zvaćemo ga 4-vektor položaja X^μ

- kovarijantni 4-vektor A_μ

$$A'_\mu = \sum_{\nu=0}^3 \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu \equiv \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\nu$$

Iz definicije kontravarijantnog 4-vektora i Lorencovih transformacija sledi da zakon transformacije kontravarijantnog 4-vektora u matičnom obliku ima oblik

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}, \quad (16.3)$$

dok za svaki kovarijantni 4-vektor važi

$$\begin{pmatrix} A'_0 \\ A'_1 \\ A'_2 \\ A'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \quad (16.4)$$

Matrica u transformacionom zakonu za kovarijantni 4-vektor odgovara inverznoj Lorencovoj transformaciji:

$$\begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \\ x'^2 \\ x'^3 \end{pmatrix},$$

dok se kontravarijantni 4-vektori transformišu upravo po matrici koja odgovara Lorencovoj transformaciji (16.2).

16.2.2 Veza između kontra- i kovarijantnih 4-vektora

Iz transformacionih relacija za komponente kontravarijantnog 4-vektora A^μ , množenjem relacija za prostorne komponente sa (-1), slede relacije

$$\begin{aligned} A^0 &= \gamma A^0 + \beta\gamma(-A^1) + 0(-A^2) + 0(-A^3), \\ -A^1 &= \beta\gamma A^0 + \gamma(-A^1) + 0(-A^2) + 0(-A^3), \\ -A^2 &= 0(A^0) + 0(-A^1) + 1(-A^2) + 0(-A^3), \\ -A^3 &= 0(A^0) + 0(-A^1) + 0(-A^2) + 1(-A^3), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{pmatrix} A'^0 \\ -A'^1 \\ -A'^2 \\ -A'^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^0 \\ -A^1 \\ -A^2 \\ -A^3 \end{pmatrix},$$

odakle se poređenjem sa (16.4) vidi da se uređena četvorka $(A^0, -A^1, -A^2, -A^3)$ transformiše kao kovarijantni 4-vektor. Znači, svakom kontravarijantnom 4-vektoru odgovara kovarijantni 4-vektor, čija je vremenska komponenta jednaka vremenskoj komponenti kontravarijantnog 4-vektora: $A^0 = A_0$, a prostorne komponente jednake su negativnim vrednostima odgovarajućih prostornih komponenta kontravarijantnog 4-vektora: $A^i = -A_i$, $i = 1, 2, 3$.

16.2.3 Skalarni proizvod 4-vektora

- definicija: $(A, B) = A^\mu B_\mu = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3$

$$\Rightarrow (A, B) = A^0 B^0 - (A^1 B^1 + A^2 B^2 + A^3 B^3)$$

- Oznake: $(A^0, A^1, A^2, A^3) = (A^0, \vec{A})$

$$(A, B) = A^0 B^0 - \vec{A} \cdot \vec{B}, \quad \vec{A} \cdot \vec{B} = \sum_{i=1}^3 A^i B^i$$

- „skalar(ni)”?

$$\begin{aligned} (A', B') &= A'^0 B'^0 - A'^1 B'^1 - A'^2 B'^2 - A'^3 B'^3 \\ &= (\gamma A^0 - \beta\gamma A^1)(\gamma B^0 - \beta\gamma B^1) - (-\beta\gamma A^0 + \gamma A^1)(-\beta\gamma B^0 + \gamma B^1) - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= A^0 B^0 \gamma^2 (1 - \beta^2) - A^1 B^1 \gamma^2 (1 - \beta^2) - A^2 B^2 - A^3 B^3 \\ &= A^0 B^0 - A^1 B^1 - A^2 B^2 - A^3 B^3 = (A, B) \end{aligned}$$

- jeste skalar(ni), ali nije pozitivno definitan!

Primer: kvadrat relativističkog intervala je skalarni proizvod: $ds^2 = (dX, dX)$, ali on može biti i negativan (za intervale prostornog tipa)

16.2.4 4-tenzori višeg ranga

- dva puta kontravarijantan tenzor drugog ranga $B^{\mu\nu}$

$$B'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} B^{\alpha\sigma}$$

- dva puta kovarijantan $B_{\mu\nu}$

$$B'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B_{\alpha\sigma}$$

- 4-tenzor drugog ranga, jednom kontra- i jednom kovarijantan $B^\mu{}_\nu$

$$B'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B^\alpha{}_\sigma$$

16.3 Osnovne tenzorske veličine u specijalnoj teoriji relativnosti

- 4-vektor položaja $X = x^\mu = (ct, \vec{r})$
- $(dX, dX) = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = ds^2$
- 4-vektor brzine čestice

$$V^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}$$

τ – sopstveno vreme čestice, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – brzina čestice, USPUTNI inercijalni sistem

$$d\tau = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Rightarrow V^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right), \quad (V, V) = c^2$$

- Ajnštajnov princip korespondencije

$$v \ll c \Rightarrow \vec{V} \rightarrow \vec{v}$$

- 4-vektor impulsa $P = mV$, m – sopstvena masa čestice (masa mirovanja)
- $(P, P) = m^2 c^2$
- 4-vektor ubrzanja čestice

$$A = \frac{dV}{d\tau}$$

- ortogonalnost 4-vektora brzine i ubrzanja čestice: $(V, A) = 0$, pošto je

$$\begin{aligned} (V, A) &= V^0 A_0 + V^1 A_1 + V^2 A_2 + V^3 A_3 = V^0 \frac{dV_0}{d\tau} + V^1 \frac{dV_1}{d\tau} + V^2 \frac{dV_2}{d\tau} + V^3 \frac{dV_3}{d\tau} \\ &= \frac{1}{2} \frac{d(V^0)^2}{d\tau} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \sum_{i=1}^3 (V^i)^2 = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left((V^0)^2 - \vec{V}^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} (V, V) = 0 \end{aligned} \quad (16.5)$$

16.4 Rimanovi prostori

- prostor Minkovskog specijalan slučaj
- tačka: (x^1, x^2, \dots, x^n)
- metrička forma: $ds^2 = \sum_{\mu, \nu=1}^n g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

U „našem” slučaju:

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tzv. pseudoeuklidska metrika

- transformacija koordinata: $(x^1, x^2, \dots, x^n) \mapsto (x'^1, x'^2, \dots, x'^n)$
- tenzori: ds^2 - skalar, dx^μ - kontravarijanti vektor, $g_{\mu\nu}$ - metrički tenzor (u opštem slučaju f-ja koordinata)
- definicije analogne, npr:

$$A'^\mu = \sum_{\nu=1}^n \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \equiv \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu, \quad B'^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} B^\alpha{}_\sigma$$

- „spuštanje” indeksa: $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$
- više o Rimanovim prostorima u [12]

Glava 17

Dinamika čestice u specijalnoj teoriji relativnosti

17.1 Kovarijantna formulacija zakona

Primer:

$$A_{\sigma}^{\mu\nu} = B_{\sigma}^{\mu\nu} \Rightarrow A'_{\sigma}{}^{\mu\nu} = B'_{\sigma}{}^{\mu\nu}$$

Ako je izražena kao jednakost tenzora istog ranga i vrste, jednačina ima isti oblik u svim inercijalnim sistemima - kovarijantna je. Da bi zakon imao isti oblik u svim inercijalnim sistemima treba da bude izražen u tenzorskom obliku!

17.1.1 Osnovni zakon dinamike u kovarijantnoj formi

Zahtevi:

- da bude izražen u tenzorskom obliku
- da „liči“ na nerelativistički zakon $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{f}$
- da važi Ajnštajnov princip korespondencije, tj. da se u limesu malih brzina dobija nerelativistički zakon dinamike

Pretpostavka:

$$\frac{dP^{\mu}}{d\tau} = F^{\mu}, \quad P^{\mu} = mV^{\mu}, \quad d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (17.1)$$

Šta je 4-vektor sile F^{μ} ?

Prostorni deo 4-vektora sile : Eksperimentalno potvrđeno i prihvaćeno da je

$$\frac{d}{dt} \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{f}, \quad (17.2)$$

gde je \vec{f} „običan” 3-vektor sile. Zamenom izraza za prostorni deo 4-vektora impulsa $P^i = \gamma m V^i$ u prostorni deo pretpostavljenog kovarijantno zakona dinamike (17.1), uz $dt = \gamma d\tau$, za prostorne komponente 4-vektora sile dobijaju se izrazi

$$F^i = \frac{dP^i}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mv_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{f_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma f_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (17.3)$$

Vremenski deo 4-vektora sile : Vremenski deo F^0 4-vektora sile može da se odredi korišćenjem ortogonalnosti 4-vektora brzine i ubrzanja (16.5) na sledeći način:

$$(V, A) = 0 \Rightarrow (V, F) = 0 \Rightarrow F^0 = \frac{\vec{V} \cdot \vec{F}}{V_0} = \frac{\gamma}{c} \vec{v} \cdot \vec{f} \quad (17.4)$$

17.1.2 Relativistički impuls \vec{p} čestice

Veličina

$$\vec{p} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (17.5)$$

naziva se relativistički impuls čestice.

O masi

- m masa mirovanja
- relativistička masa $m_r = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ - IZBEGAVATI!
- mera inercije tela koje se nerelativistički kreće:

$$\frac{d}{dt}(\gamma m \vec{v}) = \vec{f} \Rightarrow m \frac{d\gamma}{dt} \vec{v} + \gamma m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} \Rightarrow \text{za } t = 0, \vec{v} = 0 : m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f}$$

17.1.3 Relativistička kinetička energija

Pošto smo našli vremensku komponentu 4-vektora sile iz vremenske komponente zakona (17.1) sledi

$$\frac{dP^0}{d\tau} = F^0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \vec{v} \cdot \vec{f}.$$

Dobijena jednačina podseća na nerelativističku teoremu kinetičke energije (2.1) za jednu česticu

$$dT = \vec{f} \cdot d\vec{r} \Rightarrow \frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f},$$

međutim izraz γmc^2 , iako ima dimenzije energije ne može da se proglasi za kinetičku energiju, pošto je za $\vec{v} = 0$ jednak mc^2 . U slučaju nerelativističkih brzina, kada je $v \ll c$ važi aproksimativni razvoj

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx mc^2 + \frac{1}{2}mv^2,$$

pa se zato relativistička kinetička energija definiše kao

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2. \quad (17.6)$$

Ova formula svakodnevno se potvrđuje u eksperimentima u akceleratorima, a 1964. je Bertozzi napravio demonstracioni ogled za njenu potvrdu. U tom eksperimentu elektroni se ubrzavaju u elektrostatičkom polju, a kinetička energija im se određuje nezavisnom kalorimetrijskom metodom. Iz vremena preleta kroz oblast van polja procenjuje se brzina elektrona, pa se poređenjem dobijenih vrednosti dolazi do zaključka da je $T \sim (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

17.1.4 Energija mirovanja

Šta je smisao člana mc^2 ?

- Ajnštajново tumačenje - ENERGIJA MIROVANJA $E_0 = mc^2$
- Ukupna relativistička energija izolovane čestice jednaka je

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = E_0 + T$$

- ekvivalencija mase i energije
- pretvaranje mase u energiju i obrnuto!
- primer: apsolutno neelastični sudar klasično i relativistički (Primer 9.1 iz [12])

17.1.5 4-vektor impulsa - energija i impuls ujedinjeni

- $(P, P) = m^2 c^2, P^\mu = (E/c, \vec{p}) \Rightarrow$

$$\frac{E^2}{c^2} - p^2 = m^2 c^2 \Rightarrow E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$$

- $E = T + mc^2 \Rightarrow$

$$p = \frac{1}{c} \sqrt{E^2 - m^2 c^4} = \frac{1}{c} \sqrt{T(T + 2mc^2)}$$

- $\vec{p} = \vec{v}E/c^2$
- transformacija energije i impulsa

$$\begin{pmatrix} E'/c \\ p'_x \\ p'_y \\ p'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E/c \\ p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{u}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Foton

- kvant svetlosti, kvant elektromagnetog zračenja
- talasno-čestični dualizam
- postulirana energija $E = h\nu$, $h = 6.62 \times 10^{-34} Js$ - Plankova konstanta, ν - frekvenca zračenja
- čestica koja se kreće brzinom svetlosti

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - c^2/c^2}} = \frac{mc^2}{0} \quad ?? \Rightarrow m = 0$$

- impuls?

$$E = h\nu, \quad \vec{v} = c\vec{n} \Rightarrow \quad \vec{p} = \frac{E}{c^2}\vec{v} = \vec{n}\frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}\vec{n}$$

- 4-vektor impulsa fotona

$$P_f^\mu = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}\vec{n} \right)$$

Doplerov efekat

Promena frekvence talasa usled relativnog kretanja izvora i prijemnika

Foton elektromagnetnog zračenja, izvor miruje u sistemu S, foton se kreće u ravni xy , pod uglom θ u odnosu na x osu (slika 17.1)

$$P_f^\mu = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}\vec{n} \right), \quad \vec{n} = \cos\theta\vec{e}_x + \sin\theta\vec{e}_y \Rightarrow$$

$$P'_f = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{h\nu}{c} \\ \frac{h\nu}{c}\cos\theta \\ \frac{h\nu}{c}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma\frac{h\nu}{c}(1 - \beta\cos\theta) \\ \gamma\frac{h\nu}{c}(\cos\theta - \beta) \\ \frac{h\nu}{c}\sin\theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

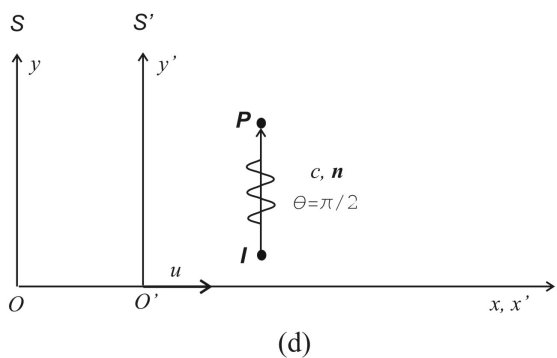
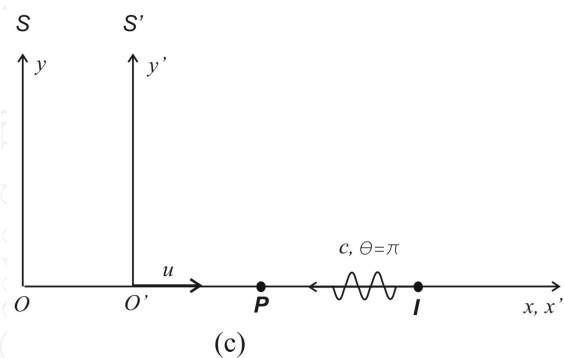
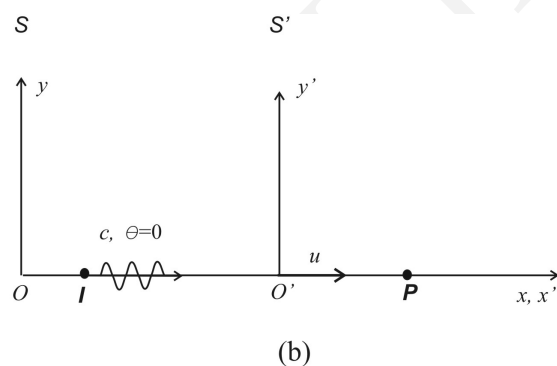
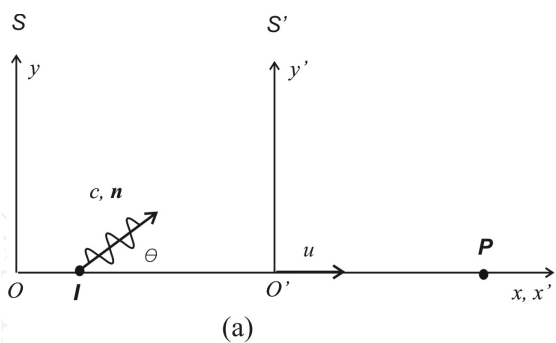
$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{u}{c}\cos\theta}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Crveni i plavi pomak, transverzalni Doplerov efekat

- $\theta = 0$ prijemnik se udaljava od izvora

$$\nu' = \nu \frac{1 - \frac{u}{c}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{u}{c}}{1 + \frac{u}{c}}} < \nu \quad \Rightarrow \quad \lambda' > \lambda$$

– Habl 1920, spektralne linije vodonika sa udaljenih zvezda



Slika 17.1: (a) Doplerov efekat: izvor I elektromagnetnog zračenja miruje u sistemu S , a prijemnik P miruje u sistemu S' . Izvor emituje signal u pravcu čiji ort \vec{n} zaklapa ugao θ sa x -osom. (b) Prijemnik se udaljava od izvora ($\theta = 0$) - *crveni pomak*. (c) Prijemnik se približava izvoru ($\theta = \pi$) - *plavi pomak*. (d) Izvor naspram prijemnika ($\theta = \pi/2$) - *transverzalni Doplerov efekat*.

- crveni pomak, spektar pomeren prema crvenom delu

$\lambda[nm]$ na Zemlji	410.2	434.0	486.1	656.3
$\lambda[nm]$ sa zvezde	411.54	435.5	487.75	658.47

- zaključak: vasiona se širi, relativna brzina posmatrane zvezde $u \approx 10^6 m/s$

- $\theta = \pi$ prijemnik se približava izvoru $\Rightarrow \nu' = \nu \sqrt{\frac{1+\frac{u}{c}}{1-\frac{u}{c}}} > \nu$
- Transverzalni Doplerov efekat

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \nu = \nu' \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

17.1.6 Sudari čestica - Komptonov efekat

- 1923, Compton - rasejavanje X zračenja na grafitnoj meti (str. 152 u [12])
- merenje intenziteta rasejanog zračenja u različitim pravcima, u funkciji talasne dužine \Rightarrow dva maksimuma:
 - na talasnoj dužini upadnog zračenja λ i
 - na $\lambda^* > \lambda$, pri čemu $\lambda^* - \lambda$ zavisi samo od ugla rasejanja
- objašnjenje: prvi maksimum može da se objasni tretirajući X zračenje kao EM talas, koji pobuđuje oscilovanje vezanih elektrona u meti sa istom frekvencom, ali otkud drugi?
- korpuskularno - foton upadnog zračenja sudara se sa slobodnim elektronom koji miruje \Rightarrow iz sudara izlazi elektron koji se kreće i foton nove energije, tj. drukčije frekvence, kojoj odgovara λ^*

$$\lambda^* - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta), \quad \frac{h}{m_e c} = 2.43 \times 10^{-12} m$$

- ovo je bila i potvrda STR, ali i dokaz da X zračenje ima korpuskularnu prirodu (do tada se to znalo samo za vidljivo i ultraljubičasto, iz foto-efekta)

17.2 Analitički formalizam u specijalnoj teoriji relativnosti

Lagranžijan?

Jedna čestica u polju sile $\vec{f} = -\text{grad}U(x_1, x_2, x_3, t)$:

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - v^2/c^2} - U \Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m \dot{x}_i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) + \frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{dp_i}{dt} - f_i = 0$$

Znači, L je lagranžijan (može se formulisati Hamiltonov princip), ali $L \neq T - U!!!$

Ovo još uvek nije kovarijantna formulacija analitičkog formalizma!

Bibliografija

- [1] Mušicki Đ. *Uvod u teorijsku fiziku I (Teorijska mehanika)*, Naučna knjiga, Beograd, 1980
- [2] Milić B. *Kurs klasične teorijske fizike, prvi deo, Njutnova mehanika*, Studentski trg, Beograd 1997
- [3] Milošević I. *Vektorski prostori i elementi vektorske analize*, Fizički fakultet, Beograd; <http://bmw.ff.bg.ac.yu/Katedre/QMF/pdf/i1-6.pdf>
- [4] Kibble T. W. and Berkshire F. H. *Classical mechanics*, Addison Wesley Longman Limited 1996
- [5] Hand N. L. and Finch D. J. *Analytical mechanics*, Cambridge University Press 1998
- [6] Goldstein H., Poole C. and Safko J. *Classical Mechanics*, Addison Wesley, New York, 2000
- [7] Landau L. D. and Lifshitz E. M. *Mechanics, 3rd ed.: Course of Theoretical Physics, Vol. 1*, Oxford: Pergamon Press, 1976
- [8] The Wolfram Demonstration Project, *Nutation of a Symmetric Top* <http://demonstrations.wolfram.com/NutationOfASymmetricTop/>
- [9] Živić I. *Statistička mehanika*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Kragujevcu, Kragujevac 2006
- [10] Herbut F. *Kvantna mehanika za istraživače*, Univerzitet u Beogradu, 1999; <http://bmw.ff.bg.ac.yu/Katedre/QMF/QMF.HTM>
- [11] Milić B. *Maksvelova elektrodinamika*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1996
- [12] Žigman V.J. *Specijalna teorija relativnosti - mehanika*, Studentski trg, Beograd, 1996