Prvi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 10. mart 2015.

1. (50 poena) Polje brzine zadato je sa

$$v_1 = \omega(x_1 + x_2) + \delta, \quad v_2 = \omega(x_2 - x_1) + \delta, \quad v_3 = 0,$$

gde su ω i δ zadate konstante.

a) Naći položaj čestice koja se u početnom trenutku nalazila u tački (X_1, X_2, X_3).

b) U početnom trenutku uočimo dijagonalu kvadrata $0 \leq x_1 \leq \delta/\omega$, $0 \leq x_2 \leq \delta/\omega$, $x_3 = 0$ koja prolazi kroz koordinatni početak. Odrediti dužinu ove linije u trenutku $t = 2\pi/\omega$.

c) Naći polje gustine ako se zna da ono zavisi samo od vremena. Odrediti protok ovog fluida kroz kvadrat $x_1 = 0$, $0 \leq x_2 \leq \delta/\omega$, $0 \leq x_3 \leq \delta/\omega$.

d) Izračunati polje ubrzanja.

2. (20 poena) Ako su $\vec{A}(\vec{r}, t)$ i $\vec{B}(\vec{r}, t)$ vektorska polja i $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ supstancijalni izvod, pokazati da važi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{B}.$$

3. (30 poena) Blauzijusov tok je dvodimenzinalno stacionarno proticanje fluida opisano funkcijom toka $\psi(x, y) = f(\eta)\sqrt{aV_\infty x}$, gde su a i V_∞ konstante, dok su $\eta = y\sqrt{V_\infty/(ax)}$ parametar i $f(\eta)$ neka funkcija koja zavisi samo od parametra η. Odrediti polje brzine $\vec{v} = v_x\vec{e}_x + v_y\vec{e}_y$. Komponente brzine treba izraziti preko konstanti definisanih u zadatku, funkcije f i njenih izvoda.

Rešenja

1. Za dato polje brzine važi

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \omega(x_1 + x_2) + \delta, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \omega(x_2 - x_1) + \delta, \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = 0. \tag{1}$$

a) Iz poslednje jednačine u (1) se lako vidi da je

$$\boxed{x_3 = X_3,}$$

dok se iz prve dobija

$$x_2 = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} - x_1 - \frac{\delta}{\omega},$$

tako da se dobija da je diferencijalna jednačina po nepoznatoj funkciji $x_1(t)$:

$$\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2} - 2\omega\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + 2\omega^2 = 0.$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine možemo potražiti u obliku $x_1 = \mathrm{e}^{\lambda t}$ gde je λ konstanta. Uvrštavajući pretpostavljeno rešenje u diferencijalnu jednačinu, dobijamo

$$(\lambda^2 - 2\omega\lambda + 2\omega^2)\mathrm{e}^{\lambda t} = 0 \Rightarrow (\lambda^2 - 2\omega\lambda + 2\omega^2) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \omega \pm \mathrm{i}\omega,$$

pa je opšte rešenje

$$x_1 = A\mathrm{e}^{(\omega+\mathrm{i}\omega)t} + B\mathrm{e}^{(\omega-\mathrm{i}\omega)t} = \mathrm{e}^{\omega t}(A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}).$$

Konstante A i B određujemo iz početnog uslova. Znamo da je $x_1(t=0)=X_1$, a na osnovu prve jednačine u (1) dobijamo da je

$$\left.\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\omega(X_1+X_2)+\delta,$$

tako da važi

$$X_1=A+B, \qquad X_1+X_2+\frac{\delta}{\omega}=A+B+\mathrm{i}(A-B).$$

Rešenje ovog sistema je

$$A=\frac{1}{2}\left(X_1-\mathrm{i}\left(X_2+\frac{\delta}{\omega}\right)\right), \qquad B=\frac{1}{2}\left(X_1+\mathrm{i}\left(X_2+\frac{\delta}{\omega}\right)\right).$$

Stoga je

$$\boxed{x_1=\mathrm{e}^{\omega t}\left[X_1\cos\omega t+\left(X_2+\frac{\delta}{\omega}\right)\sin\omega t\right].}$$

Pošto je x_2 određeno rešenjem za x_1 dobijamo i da je:

$$\boxed{x_2=\mathrm{e}^{\omega t}\left[-X_1\sin\omega t+\left(X_2+\frac{\delta}{\omega}\right)\cos\omega t\right]-\frac{\delta}{\omega}.}$$

b) Jednačina dijagonale u početnom trenutku $t=0$ je $(\lambda,\lambda,0)$. U proizvoljnom trenutku delići koji su činili dijagonalu čine krivu:

$$x_1=\mathrm{e}^{\omega t}\left[\lambda\cos\omega t+\left(\lambda+\frac{\delta}{\omega}\right)\sin\omega t\right], \qquad x_2=\mathrm{e}^{\omega t}\left[-\lambda\sin\omega t+\left(\lambda+\frac{\delta}{\omega}\right)\cos\omega t\right]-\frac{\delta}{\omega}.$$

U trenutku $t=2\pi/\omega$ ova kriva ima parametarsku jednačinu

$$x_1=\lambda\mathrm{e}^{2\pi}, \qquad x_2=\mathrm{e}^{2\pi}\left(\lambda+\frac{\delta}{\omega}\right)-\frac{\delta}{\omega}.$$

Dužina ove krive je

$$\boxed{s=\int\mathrm{d}s=\int\sqrt{\mathrm{d}x_1^2+\mathrm{d}x_2^2}=\int_0^{\delta/\omega}\mathrm{e}^{2\pi}\sqrt{2}\mathrm{d}\lambda=\mathrm{e}^{2\pi}\sqrt{2}\frac{\delta}{\omega}.}$$

c) Polazeći od jednčine kontinuiteta i uzimajući da ρ ne zavisi od koordinata, imamo

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-2\omega\rho.$$

Rešavanjem ove jednačine dobijamo:

$$\boxed{\rho=C\mathrm{e}^{-2\omega t},}$$

gde je C neka konstanta.

Protok je $Q=\int\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$. Za površ iz zadatka je $\mathrm{d}S=\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\vec{e}_1$ tako da je protok

$$\boxed{Q=\rho\int_0^{\delta/\omega}\int_0^{\delta/\omega}(\omega x_2+\delta)\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3=\frac{3\rho\delta^3}{2\omega^2}.}$$

d) Polje ubrzanja je

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \left(v_1\frac{\partial}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)(v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2),$$

iz čega se dobija

$$\boxed{\vec{a} = 2\omega(\omega x_2 + \delta)\vec{e}_1 - 2\omega^2 x_1\vec{e}_2.}$$

2. Pokažimo da je leva strana jednaka desnoj strani.

$$\begin{aligned}
\mathrm{LS} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{A}\cdot\vec{B}) \\
&= \frac{\partial(\vec{A}\cdot\vec{B})}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)(\vec{A}\cdot\vec{B}) \\
&= \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + ((\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A})\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot((\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}) \\
&= \left(\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{A}\right)\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{B}\right) \\
&= \frac{\mathrm{d}\vec{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{B} + \vec{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \\
&= \mathrm{DS}
\end{aligned}$$

3. Komponente brzine se izražavaju preko funkcije toka na sledeći način:

$$v_x = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v_y = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Tako je

$$v_x = \frac{\partial f}{\partial y}\sqrt{aV_\infty x}.$$

Pošto je

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}f}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial y} = f'\sqrt{\frac{V_\infty}{ax}},$$

dobijamo da je

$$\boxed{v_x = f'V_\infty.}$$

Na sličan način računamo i drugu komponentu polja brzine.

$$v_y = -\frac{\partial f}{\partial x}\sqrt{aV_\infty x} - f\frac{\sqrt{aV_\infty}}{2\sqrt{x}}.$$

Ovde treba obratiti pažnju na

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f}{d\eta}\frac{\partial\eta}{\partial} = -\frac{1}{2}f'y\sqrt{\frac{V_\infty}{ax^3}},$$

pa se konačno dobija

$$\boxed{v_y = \frac{1}{2}\left(f'V_\infty\frac{y}{x} - f\sqrt{\frac{aV_\infty}{x}}\right).}$$

Drugi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 24. mart 2015.

1. (35 poena) Polje brzine u nekoj sredini u Dekartovim koordinatama ima oblik $v_1 = 0$, $v_2 = A(x_1x_2 - x_3^2)e^{-Bt}$, $v_3 = A(x_2^2 - x_1x_3)e^{-Bt}$, gde su A i B zadate konstante.

(a) Naći matricu $\mathcal{S}$ koja odgovara tenzoru brzine deformacije.

(b) Kolikom ugaonom brzinom rotira mala supstancijalna zapremina koja se u trenutku $t = 0$ nalazi u tački $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 3)$?

(c) Supstancijalna duž dužine Δs se u trenutku $t = 0$ nalazi u tački $(x_1, x_2, x_3) = (1, 0, 3)$ i orijentisana je duž ose x_3. Kolika je dužina projekcije ove duži na osu x_3 u trenutku Δt? Koliki ugao ova supstancijalna duž zaklapa sa osom x_3 u trenutku Δt? Smatrati da je Δt veoma kratak vremenski interval, a Δs veoma mala dužina.

(d) Izračunati cirkulaciju brzine po konturi koja ima oblik kvadrata $x_1 = 0$, $0 \le x_2 \le 1$, $0 \le x_3 \le 1$.

(e) Izračunati fluks vektora vrtložnosti kroz kvadrat $x_1 = 0$, $0 \le x_2 \le 1$, $0 \le x_3 \le 1$.

2. (10 poena) Za polje brzine $\vec{v} = W[(x_3 - x_2)\vec{e}_1 + (x_1 - x_3)\vec{e}_2 + (x_2 - x_1)\vec{e}_3]$, gde je W konstanta, naći vrtložnu liniju koja prolazi kroz koordinatni početak.

3. (20 poena) Tenzor napona u tački P je zadat matricom

$$\mathcal{P} = \sigma \begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

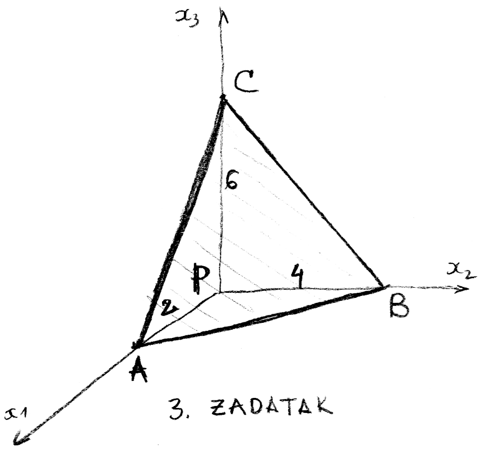
gde je σ zadata konstanta koja ima dimenzije pritiska. Izračunati (a) vektor napona koji deluje na ravan koja prolazi kroz tačku P, a paralelna je ravni ABC, prikazanoj na slici, kao i (b) njegovu tangencijalnu i normalnu komponentu. Duži koje ravan ABC odseca na koordinatnim osama su jednake $AP = 2$, $PB = 4$ i $PC = 6$ u odgovarajućim jedinicama.

4. (35 poena) Oluk, u obliku polucilindra, čiji je poprečni presek prikazan na slici, poluprečnika R i visine H, ispunjen je do vrha vodom.

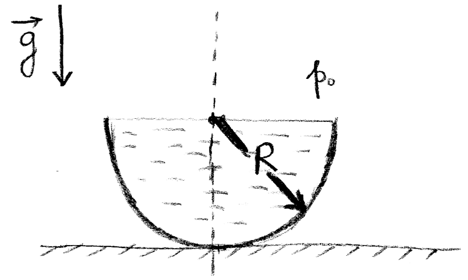
(a) Eksplicitnim računom pokazati da je ukupna površinska sila koja deluje na oluk jednaka težini vode u njemu.

(b) Izračunati ukupni moment površinskih sila, u odnosu na najnižu tačku oluka, koje deluju na polovinu oluka koja se nalazi sa jedne strane vertikalne ravni, koja sadrži njegovu najnižu liniju.

Uzeti da je $R = 10cm$ i $H = 1m$ i smatrati da atmosferski pritisak u okolini oluka ima konstantnu vrednost.



3. ZADATAK



4. ZADATAK

Rešenje ovog domaćeg zadatka treba predati najkasnije u **utorak, 7. aprila, u 9.15**. Prilikom izrade domaćih zadataka dozvoljeno je koristiti literaturu i tražiti pomoć, ali konačna rešenja koja predajete treba da budu napisana **samostalno i svojeručno.** Identična (kopirana) rešenja neće biti bodovana.

PREPORUKE ZA REŠAVANJE ZADATAKA: Ukratko, ali jasno i punim rečenicama, navedite osnovne principe i jednačine na koje se pozivate pri rešavanju zadataka. Jasno definišite sve oznake koje koristite, naročito one koje nisu uobičajene. Gde god slika ili dijagram mogu da pomognu u rešavanju nacrtajte ih. Pišite čitko, a glavne rezultate uokvirite.

① (a) 7 поена

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_i} = 0 \quad , i=1,2,3$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = Ae^{-Bt}x_2 \,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = Ae^{-Bt}x_1 \,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = -2Ae^{-Bt}x_3$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_1} = -Ae^{-Bt}x_3 \,, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = 2Ae^{-Bt}x_2 \,, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = -Ae^{-Bt}x_1$$

$$\tilde{J} = Ae^{-Bt}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_2 & x_1 & -2x_3 \\ -x_3 & 2x_2 & -x_1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{J}^T = Ae^{-Bt}\begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_3 \\ 0 & x_1 & 2x_2 \\ 0 & -2x_3 & -x_1 \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \tilde{S} = \frac{1}{2}\left(\tilde{J} + \tilde{J}^T\right)$$

$$\boxed{\tilde{S} = \frac{1}{2}Ae^{-Bt}\begin{pmatrix} 0 & x_2 & -x_3 \\ x_2 & 2x_1 & 2(x_2-x_3) \\ -x_3 & 2(x_2-x_3) & -2x_1 \end{pmatrix}}$$

(б) 7 поена

$$\omega_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3}\right) = Ae^{-Bt}(x_2 + x_3)$$

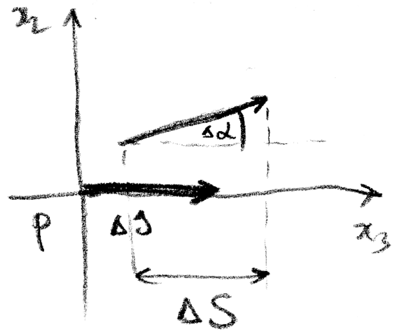
$$\omega_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1}\right) = \frac{1}{2}Ae^{-Bt}x_3$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right) = \frac{1}{2}Ae^{-Bt}x_2$$

$t=0$, $(x_1, x_2, x_3) = (1,0,3) \Rightarrow$

Угаона брзина делића је $\boxed{\vec{\omega} = 3A\vec{e}_1 + \frac{3}{2}A\vec{e}_2}$

① $\overset{7\ \text{поена}}{(c)}$



На предавањима показано: $\dfrac{\Delta S - \Delta s}{\Delta t\, \Delta s} = \dfrac{\partial v_3}{\partial x_3}$, $\dfrac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \dfrac{\partial v_2}{\partial x_3}$

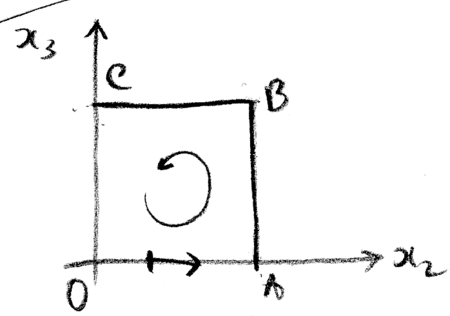
$$\Rightarrow \Delta S = \Delta s\left(1 + \Delta t \frac{\partial v_3}{\partial x_3}\right) = \Delta s\left(1 + \Delta t(-A)\right)$$

$$\boxed{\Delta S = \Delta s(1 - \Delta t \cdot A)}$$

$$\Delta\alpha = \Delta t(-2A\cdot 3)$$

$$\boxed{\Delta\alpha = -6A\Delta t}$$

$\overset{7\ \text{поена}}{(d)}$



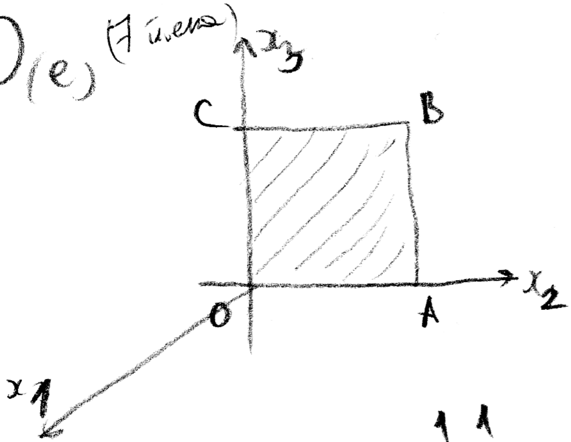
$$\Gamma = \int_{OABC} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \int_O^A \vec{v}\cdot\vec{e}_2\, dx_2 + \int_A^B \vec{v}\cdot\vec{e}_3\, dx_3 + \int_B^C \vec{v}\cdot\vec{e}_2\, dx_2 + \int_C^O \vec{v}\cdot\vec{e}_3\, dx_3 =$$

$$= \int_O^A v_2\, dx_2 + \int_A^B v_3\, dx_3 + \int_B^C v_2\, dx_2 + \int_C^O v_3\, dx_3 =$$

$$= \int_O^A 0\cdot dx_2 + \underbrace{\int_A^B A(\underset{1}{x_2^2} - x_1\underset{0}{x_3})e^{-Bt}\, dx_3}_{\to} + \underbrace{\int_B^C A(\overset{0}{x_1}x_2 - \underset{1}{x_3^2})e^{-Bt}\, dx_2}_{} +$$

$$+ \int_C^O A(\underset{0}{x_2^2} - \underset{0}{x_1}\underset{0}{x_3})e^{-Bt}\, dx_3 = Ae^{-Bt}\ Ae^{-Bt}\underbrace{\int_B^C dx_2}_{=-1} \Rightarrow \boxed{2Ae^{-Bt} = \Gamma}$$

① (e) (7 поена)



$$d\vec{S} = dx_2\,dx_3\,\vec{e}_1$$

$$\vec{\omega} = Ae^{-Bt}(x_2+x_3)\vec{e}_1 + \cdots$$

$$\vec{\omega}\cdot d\vec{S} = Ae^{-Bt}(x_2+x_3)\,dx_2\,dx_3$$

$$\iint\limits_{OABC} \vec{\omega}\cdot d\vec{S} = \int_0^1\!\!\int_0^1 dx_2\,dx_3\,Ae^{-Bt}(x_2+x_3) =$$

$$= Ae^{-Bt}\Big[\underbrace{\int_0^1\!\!\int_0^1 dx_2\,dx_3\cdot x_2}_{=\underbrace{\int_0^1 dx_3}_{1}\underbrace{\int_0^1 x_2\,dx_2}_{1/2}} + \underbrace{\int_0^1\!\!\int_0^1 dx_2\,dx_3\,x_3}_{=1/2}\Big]$$

$$\boxed{\iint\limits_{OABC} \vec{\omega}\cdot d\vec{S} = Ae^{-Bt}}$$

Наравно, треба да буде задовољено

$$\oint\limits_{C} \vec{v}\cdot d\vec{l} = \iint\limits_{S_C} \operatorname{rot}\vec{v}\cdot d\vec{S} = 2\iint\limits_{S_C} \vec{\omega}\cdot d\vec{S},$$

пут и ресте, како се виде претходни резултати од (d) и (e)

(2)

$$\vec v = W\left[(x_3-x_2)\vec e_1 + (x_1-x_3)\vec e_2 + (x_2-x_1)\vec e_3\right]$$

$$\vec\omega = \frac12 \operatorname{rot}\vec v = \frac12 W \begin{vmatrix} \vec e_1 & \vec e_2 & \vec e_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ x_3-x_2 & x_1-x_3 & x_2-x_1 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac12 W\left(2\vec e_1 + 2\vec e_2 + 2\vec e_3\right) = W\left(\vec e_1 + \vec e_2 + \vec e_3\right)$$

Вртложна линија: $d\vec r = \lambda\vec\omega \Rightarrow$

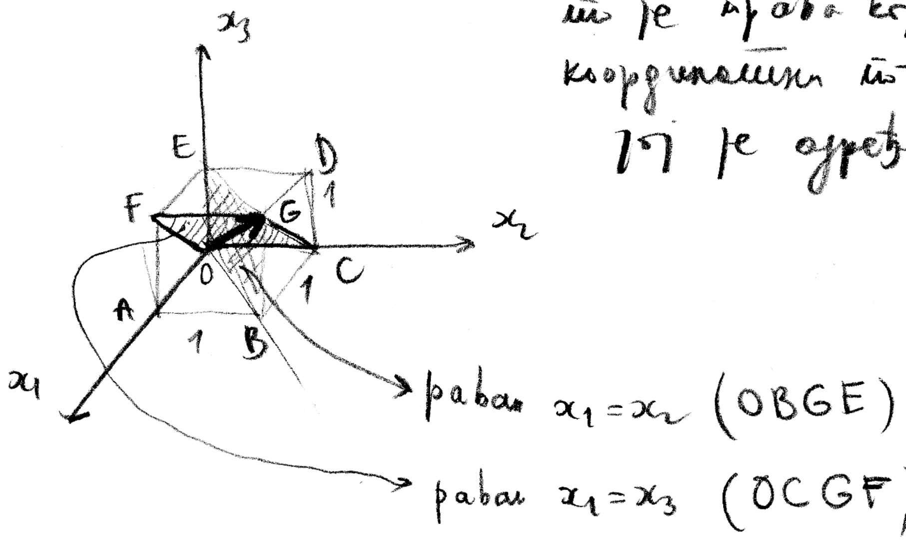
$$\Rightarrow \frac{dx_1}{\omega_1} = \frac{dx_2}{\omega_2} = \frac{dx_3}{\omega_3} \Rightarrow$$

$$\frac{dx_1}{W} = \frac{dx_2}{W} = \frac{dx_3}{W} \Rightarrow dx_1 = dx_2,\ dx_1 = dx_3 \Rightarrow$$

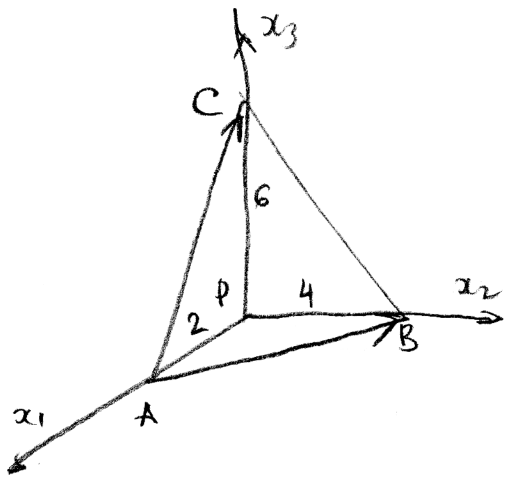
$$\Rightarrow x_1 = x_2 + K_1,\quad x_1 = x_3 + K_2$$

Линија пролази кроз координатни почетак $\Rightarrow K_1 = K_2 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ вртложна линија је пресек равни $\boxed{x_1 = x_2 \text{ и } x_1 = x_3}$, а то је права која пролази кроз координатни почетак, а правац јој је одређен вектором $(\vec e_1 + \vec e_2 + \vec e_3)$



3



$$\vec{n} = \frac{\vec{AB} \times \vec{AC}}{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}$$

$$\vec{AB} = 4\vec{e}_2 - 2\vec{e}_1$$

$$\vec{AC} = -2\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3$$

$$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24\vec{e}_1 + 12\vec{e}_2 + 8\vec{e}_3 = 4(6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)$$

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = 4\sqrt{36+9+4} = 4 \cdot 7$$

(10 поена)

(a) Орт нормале на раван ABC је

$$\vec{n} = \frac{1}{7}(6\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3),$$

па је

$$\boxed{\vec{P}_{\vec{n}} = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 27 \\ -19 \\ 7 \end{pmatrix} = \vec{P}_{\vec{n}}}$$

(10 поена)

(б) $$\vec{P}_{\vec{n}} = \underbrace{\vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}})}_{\text{нормална компонента}} + \underbrace{(\vec{P}_{\vec{n}})_\tau}_{\text{тангенцијална компонента}}$$

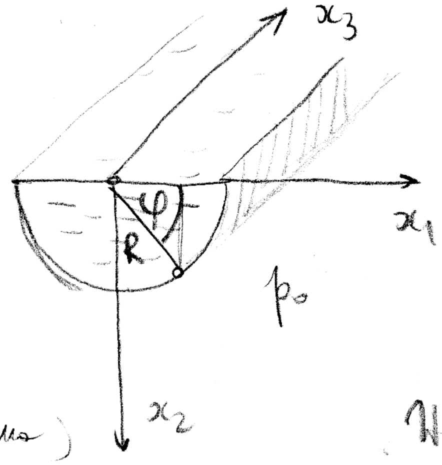
$$\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}} = \frac{6}{7}\frac{1}{7}(6, 3, 2)\begin{pmatrix} 27 \\ -19 \\ 7 \end{pmatrix} = \boxed{6\,\frac{17}{7} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}})}$$

$$(\vec{P}_{\vec{n}})_\tau = \vec{P}_{\vec{n}} - \vec{n}(\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) = \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 27 \\ -19 \\ 7 \end{pmatrix} - 6\,\frac{17}{7} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{6}{7}\begin{pmatrix} 27 - \frac{17 \cdot 6}{7} \\ -19 - 17 \cdot \frac{3}{7} \\ 7 - \frac{17 \cdot 2}{7} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{6}{7}\begin{pmatrix} \frac{87}{7} \\ -\frac{184}{7} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix} = (\vec{P}_{\vec{n}})_\tau}$$

④

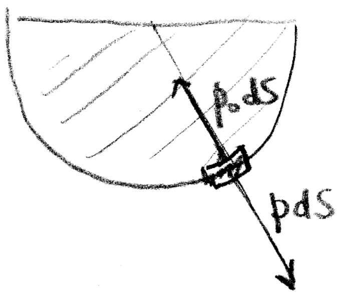
$\vec{g}\downarrow$



Притисак у води у олуку је:

$$p = p_0 + \rho g x_2 .$$

(а) (2 поена)



На елемент површине олука са унутрашње стране ($\vec{dS} = -\vec{e}_r dS$, $dS = R\,d\varphi\, dz$ ($z = x_3$)) делује површинска сила $-p(\varphi)\,d\vec{S} = \vec{e}_r(p_0 + \rho g R \sin\varphi)\,dS$,

а са спољашње: $(-p_0)\vec{e}_r dS$, тако да је укупна површинска сила која делује на елемент површине олука једнака $d\vec{F}^{пов} = \vec{e}_r \rho g R^2 \sin\varphi\, d\varphi\, dz$. (1)

Пошто је $\vec{e}_r = \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2$, укупна компонента $F_1^{пов}$ ове силе је

$$F_1^{пов.} = \iint_S dF_1^{пов} = \int_0^H dz \int_0^\pi d\varphi\, \rho g R^2 \sin\varphi \cos\varphi =$$

$$= \rho g R^2 \int_0^H dz \underbrace{\int_0^\pi \sin\varphi \cos\varphi\, d\varphi}_{=0} = 0, \quad а$$

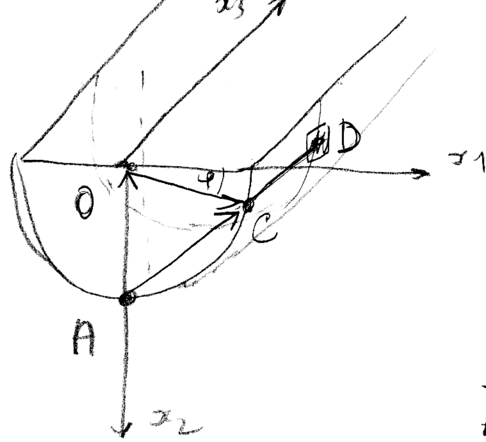
$$F_2^{пов.} = \iint_S dF_2^{пов} = \rho g R^2 \underbrace{\int_0^H dz}_{H} \underbrace{\int_0^\pi d\varphi \underbrace{\sin^2\varphi}_{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}}}_{=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\pi R^2 H \rho g$$

Тежина воде у олуку је $m\vec{g} = \rho V \vec{g} = \rho\left(\frac{1}{2}R^2\pi \cdot H\right)\vec{g} = \rho g \frac{1}{2} R^2 \pi H \vec{e}_2$,

па је заиста укупна површинска сила једнака тежини воде у олуку.

4 б)

(15 поена)



Моменти површинске силе која делује на dS у тачки D у односу на тачку A је

$$d\vec{M}^{повр} = \vec{AD} \times d\vec{F}^{повр}$$

$$\vec{AD} = \vec{AC} + \vec{CD}$$

$$\vec{CD} = x_3 \vec{e}_3 = z\vec{e}_z$$

$$\vec{AC} = \vec{AO} + \vec{OC} = -R\vec{e}_2 + R\vec{e}_r$$

Под (а) је показано да је $d\vec{F}^{повр.} = \vec{e}_r \rho g R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, dz$

$$\Rightarrow \; d\vec{M}^{повр.} = \left(-R\vec{e}_2 + R\vec{e}_r + z\vec{e}_z\right) \times \vec{e}_r \rho g R^2 \sin\varphi \, d\varphi \, dz =$$

$$= \rho R^2 g \sin\varphi \, d\varphi \, dz \left(-R \underbrace{\vec{e}_2 \times \vec{e}_r}_{\parallel} + z \underbrace{\vec{e}_z \times \vec{e}_r}_{\vec{e}_\varphi}\right)$$

$$\vec{e}_2 \times (\cos\varphi \, \vec{e}_1 + \sin\varphi \, \vec{e}_2) = -\cos\varphi \, \vec{e}_3 = -\cos\varphi \, \vec{e}_z$$

$$\Rightarrow \; d\vec{M}^{повр} = \rho R^2 g \sin\varphi \, d\varphi \, dz \left(R\cos\varphi \, \vec{e}_z + z\vec{e}_\varphi\right)$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi \, \vec{e}_1 + \cos\varphi \, \vec{e}_2$$

$$\Rightarrow \; d\vec{M}^{повр} = dM_1 \vec{e}_1 + dM_2 \vec{e}_2 + dM_3 \vec{e}_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; dM_3 = \rho R^2 g \sin\varphi \, d\varphi \, dz \cdot R\cos\varphi = \rho g R^3 dz \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \; M_3 = \rho g R^3 \int_0^H dz \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\varphi \underbrace{\cos\varphi \, d\varphi}_{d\sin\varphi}}_{\frac{1}{2}\sin^2\varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}}} = \boxed{\frac{1}{2}\rho g R^3 H = M_3 = 5\,Nm}$$

Treći domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 9. april 2015.

1. (25 poena) Tenzor napona unutar cilindra $x_2^2 + x_3^2 = R^2$, $0 \leq x_1 \leq L$ predstavljen je matricom

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} Ax_2 + Bx_3 & Cx_3 & -Cx_2 \\ Cx_3 & 0 & 0 \\ -Cx_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

gde su A, B i C zadate konstante. Ako je poznato da su svi delići cilindra u ravnoteži, kao i da je gustina sredine ρ, naći masenu gustinu zapreminske sile $\vec{f}$. Izračunati vektor napona koji deluje na deliće na površini omotača cilindra.

2. (15 poena) Polje brzine u Navije-Stoksovom fluidu ima oblik $\vec{v} = C[(x_1 + x_2)\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2]$, gde je C zadata konstanta. Naći tenzor viskoznosti, ako su poznati koeficijenti viskoznosti η i ξ. Izračunati relativnu brzinu promene gustine delića $\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}$.

3. (60 poena) Stoksov fluid nalazi se u oblasti između dva koaksijalna cilindra, poluprečnika a i b ($a < b$). Zajednička osa cilindara sa horizontalom zaklapa ugao α, a ceo sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju. Unutrašnji cilindar se kreće konstantnom brzinom U duž zajedničke ose, naviše. Pretpostavljajući da brzina u fluidu ima oblik $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$, gde je r rastojanje od zajedničke z-ose, kao i da je $\frac{\partial p}{\partial z} = K$ poznata konstantna veličina, naći: (a) $v(r)$; (b) silu viskoznosti kojom fluid deluje na jedinicu dužine unutrašnjeg cilindra; (c) silu viskoznosti kojom fluid deluje na jedinicu dužine spoljašnjeg cilindra. Gustina fluida je ρ, a dinamički koeficijent viskoznosti η.

Rešenje ovog domaćeg zadatka treba predati najkasnije u **utorak, 21. aprila, u 9.15**. Prilikom izrade domaćih zadataka dozvoljeno je koristiti literaturu i tražiti pomoć, ali konačna rešenja koja predajete treba da budu napisana **samostalno i svojeručno.** Identična (kopirana) rešenja neće biti bodovana.

Preporuke za rešavanje zadataka: Ukratko, ali jasno i punim rečenicama, navedite osnovne principe i jednačine na koje se pozivate pri rešavanju zadataka. Jasno definišite sve oznake koje koristite, naročito one koje nisu uobičajene. Gde god slika ili dijagram mogu da pomognu u rešavanju nacrtajte ih. Pišite čitko, a glavne rezultate uokvirite.

2015 FK3

(I)

(1) Основна ј-на динамике:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\tilde{P}$$

равнотежа: $\frac{d\vec{v}}{dt} = 0 \Rightarrow 0 = \vec{f} + \frac{1}{\rho}\operatorname{div}\tilde{P} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \vec{f} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\tilde{P}$$

$$\operatorname{div}\tilde{P} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{3} \vec{e}_i \operatorname{div}(\tilde{P}\vec{e}_i)$$

$$\tilde{P}\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} Ax_2 + Bx_3 & Cx_3 & -Cx_2 \\ Cx_3 & 0 & 0 \\ -Cx_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ax_2 + Bx_3 \\ Cx_3 \\ -Cx_2 \end{pmatrix}$$

$$\operatorname{div}(\tilde{P}\vec{e}_1) = \frac{\partial}{\partial x_1}(Ax_2 + Bx_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(Cx_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(-Cx_2) = 0$$

$$\tilde{P}\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} Cx_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}(\tilde{P}\vec{e}_2) = 0$$

$$\tilde{P}\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} -Cx_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{div}(\tilde{P}\vec{e}_3) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\operatorname{div}\tilde{P} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{f} = 0}$$

Површина омотача: $F(x_1, x_2, x_3) = x_2^2 + x_3^2 - R^2 = 0$

Орт нормале: $\vec{n} = \frac{\operatorname{grad} F}{|\operatorname{grad} F|} = \frac{2x_2\vec{e}_2 + 2x_3\vec{e}_3}{\sqrt{4(x_2^2 + x_3^2)}} = \frac{1}{R}(x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3)$

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} Ax_2 + Bx_3 & Cx_3 & -Cx_2 \\ Cx_3 & 0 & 0 \\ -Cx_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\Bigg|_{F=0} = \frac{1}{R}\begin{pmatrix} Cx_2x_3 - Cx_2x_3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{P}_{\vec{n}} = 0}$$

2015 Фк, ДЗ 3

II

2. Тензор вискозности: $\tilde{P}' = 2\eta \tilde{K}_1 + \xi \tilde{K}_2$

$$\tilde{K}_2 = \frac{1}{3}(\operatorname{div}\vec{v})\tilde{J}\ , \quad \tilde{K}_1 = \tilde{S} - \tilde{K}_2\ , \quad S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = C \Rightarrow \boxed{K_2 = \frac{C}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = C, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = C, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = C, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$T_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \Rightarrow T = \begin{pmatrix} C & C & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T^T = T$$

$$\tilde{S} = \frac{1}{2}(T + T^T) = T = \begin{pmatrix} C & C & 0 \\ C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_1 = S - K_2 = \boxed{\begin{pmatrix} \frac{2}{3}C & C & 0 \\ C & -\frac{C}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{C}{3} \end{pmatrix} = K_1}$$

$$P' = 2\eta K_1 + \xi K_2 = 2\eta \frac{C}{3}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \xi \frac{C}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \boxed{\frac{C}{3}\begin{pmatrix} 4\eta + \xi & 6\eta & 0 \\ 6\eta & \xi - 2\eta & 0 \\ 0 & 0 & \xi - 2\eta \end{pmatrix} = P'}$$

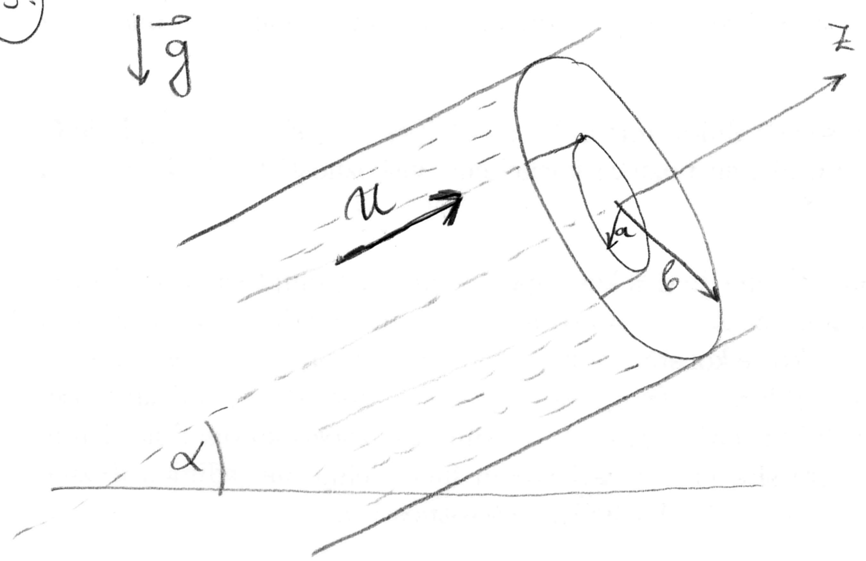
2015 ФК133

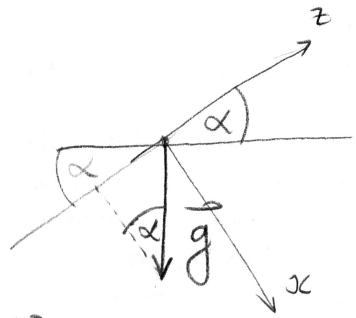
Ⅲ

Једначина континуитета:

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\,\mathrm{div}\,\vec{v}=0 \Rightarrow \boxed{\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}=-\mathrm{div}\,\vec{v}=-C}$$

3.





$$\vec{g}=g(\cos\alpha\,\vec{e}_x-\sin\alpha\,\vec{e}_z) \quad (1)$$

Стоксова ј-на: $$\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{g}-\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p+\nu\,\Delta\vec{v} \quad (2)$$

$$\vec{v}=v(r)\vec{e}_z \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt}=\cancelto{0}{\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=v\frac{\partial}{\partial z}\left[v\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]=0 \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow 0=g(\cos\alpha\,\vec{e}_x-\sin\alpha\,\vec{e}_z)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right)-\nu\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} \quad (4)$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{v}=\begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(r) \end{vmatrix}=-\vec{e}_\varphi\frac{\partial v(r)}{\partial r}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v}=\begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -r\frac{dv}{dr} & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{r}\vec{e}_z\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \quad (5)$$

$(4),(5) \Rightarrow$

$$0=g(\cos\alpha\,\vec{e}_x-\sin\alpha\,\vec{e}_z)-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\vec{e}_x+\frac{\partial p}{\partial y}\vec{e}_y+\frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right)+\frac{\eta}{\rho r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{e}_z \quad (6)$$

$(6)\cdot\vec{e_z} \Rightarrow$

$$\Rightarrow 0 = -g\sin\alpha - \frac{1}{\rho}\underbrace{\frac{\partial p}{\partial z}}_{K} + \frac{\eta}{\rho r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \qquad (7)$$

$$g\sin\alpha + \frac{K}{\rho} = C = \text{const} \qquad (8)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\rho C}{\eta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \Rightarrow \frac{\rho C}{\eta} r\,dr = d\left(r\frac{dv}{dr}\right) \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\text{интегрираме}} \frac{\rho C}{2\eta}r^2 + A = r\frac{dv}{dr} \Rightarrow \frac{A}{r} + \frac{\rho C}{2\eta} r = \frac{dv}{dr} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad dv = A\frac{dr}{r} + \frac{\rho C}{2\eta} r\,dr \xrightarrow{\int}$$

$$\Rightarrow \boxed{v = A\ln r + \frac{\rho C}{4\eta}r^2 + B} \qquad (9)$$

Гранични условия: $v(a) = u$, $\quad v(b) = 0$

$$(9) \Rightarrow \left.\begin{aligned} u &= A\ln a + \frac{\rho C}{4\eta}a^2 + B \\ 0 &= A\ln b + \frac{\rho C}{4\eta}b^2 + B \end{aligned}\right\} (-) \Rightarrow u = A\ln\frac{a}{b} + \frac{\rho C}{4\eta}(a^2 - b^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A = \frac{u + \frac{\rho C}{4\eta}(b^2 - a^2)}{\ln\frac{a}{b}} \Rightarrow B = -\frac{\rho C}{4\eta}b^2 - \ln b\,\frac{u + \frac{\rho C}{4\eta}(b^2 - a^2)}{\ln\frac{a}{b}}$$

(c) $\boxed{V}$

$$\hat{p}' = 2\eta\tilde{S} \qquad d\vec{F}^{buce} = \hat{p}' d\vec{S}, \quad d\vec{S} = -\vec{e}_r\, b\, d\varphi\, dz$$

$$\vec{F}^{buce} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz\, 2\eta\tilde{S}(-\vec{e}_r)\, b =$$

$$= -2\eta b \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi\, \tilde{S}(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$$

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_z \Rightarrow \frac{\partial v_1}{\partial x_i} = \frac{\partial v_2}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,3$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v(r)}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v}{\partial x_1} = \frac{dv}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{dv}{dr}\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$r = (x^2+y^2)^{1/2} \Rightarrow \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-1/2}\, 2x = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} = \frac{r\cos\varphi}{r} = \cos\varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi$$

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{dv}{dr}\cos\varphi & \frac{dv}{dr}\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{2}(J + J^T) = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{S}\vec{e}_r = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\vec{e}_z$$

VI

$$\bar{F}^{\text{вuck.}}_{r=b} = -2\eta b \int_0^1 dz \int_0^{2\pi} d\varphi \tilde{S}\vec{e}_r = -2\eta b \int_0^1 dz \int_0^{\pi} d\varphi \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\Big|_{r=b} \vec{e}_z =$$

$$= -\eta b \cdot \frac{dv}{dr}\Big|_{r=b} \cdot 2\pi \vec{e}_z =$$

$$\overset{(9)}{=} -2\pi\eta b\vec{e}_z\left(\frac{A}{b} + \frac{\rho C}{2\eta} b\right) = -\left(2\pi\eta A + \pi\rho C b^2\right)\vec{e}_z$$

(b) $$\bar{F}^{\text{luck.}}_{r=a} = a\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 dz\, 2\eta \tilde{S}\Big|_{r=a}\vec{e}_r = 2\pi a\, 2\eta \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\Big|_{r=a}\vec{e}_z =$$

$$= 2\pi\eta a\left(\frac{A}{a} + \frac{\rho C}{2\eta} a\right)\vec{e}_z = \pi\left(2\eta A + \rho C a^2\right)\vec{e}_z$$

Drugi kolokvijum iz Fizike kontinuuma, 8. jun 2015.

Stoksov fluid, dinamičkog koeficijenta viskoznosti η, stacionarno i laminarno protiče kroz prostor između dva veoma dugačka koaksijalna cilindra poluprečnika R i $2R$. Fluid se kreće u pravcu zajedničke ose cilindara, usled toga što se u tom pravcu konstantnom brzinom u kreće unutrašnji cilindar, a osim toga postoji i komponenta gradijenta pritiska u tom pravcu, koja je konstantna i iznosi K. Spoljašnji cilindar miruje. Pretpostaviti da zapreminske sile mogu da se zanemare, kao i da intenzitet brzine fluida zavisi samo od rastojanja od ose.

1. (50 poena) Odrediti profil brzine u fluidu.
2. (40 poena) Izračunati silu kojom fluid deluje na spoljašnji cilindar.
3. (10 poena) Ispitati da li je za neku vrednost u, pri fiksiranom K, moguće bezvrtložno strujanje fluida i, ako jeste, odrediti to u.

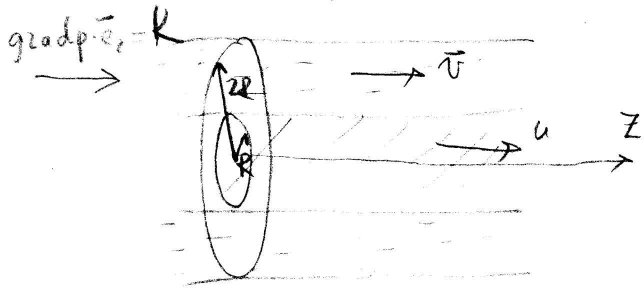
Korisne formule

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v}\,, \quad \Delta\vec{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{v}$$

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\varphi & v_z \end{vmatrix}\,, \quad \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

Napomene: Izrada zadatka traje 90 minuta. Nije dozvoljena upotreba nikakve literature ni elektronskih pomagala. Rešenja bez obrazloženja i jasno definisanih oznaka NEĆE BITI PREGLEDANA.

(1)



$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$$

Стоксова једначина: $$\underbrace{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}_{0} + \underbrace{(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}}_{0} = \underbrace{\vec{f}}_{0} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v} \quad (1)$$

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \left[v(r)\frac{\partial}{\partial z}\right]v(r)\vec{e}_z = 0$$

$$\Delta\vec{v} = -\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} \qquad \mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(r) \end{vmatrix} = -\vec{e}_\varphi\frac{dv}{dr}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -r\frac{dv}{dr} & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{e}_z = -\Delta\vec{v}$$

$$\Rightarrow \quad \Delta\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{e}_z$$

$$(1)\cdot\vec{e}_z \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \Rightarrow \frac{K}{\eta}\int r\,dr = \int d\left(r\frac{dv}{dr}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\eta}Kr^2 + C_1 = r\frac{dv}{dr} \Rightarrow dv = \frac{K}{2\eta}r\,dr + \frac{C_1}{r}dr \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v(r) = \frac{K}{4\eta}r^2 + C_1\ln r + C_2} \qquad (2)$$

Гранични услови: $$\left.\begin{aligned} v(r=R) = u &\Rightarrow u = \frac{K}{4\eta}R^2 + C_1\ln R + C_2 \\ v(r=2R) = 0 &\Rightarrow 0 = \frac{K}{4\eta}4R^2 + C_1\ln 2R + C_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{C_1 = -\left(u + \frac{3K}{4\eta}R^2\right)/\ln 2}$$

$$\boxed{C_2 = -\frac{K}{\eta}R^2 + \frac{\ln 2R}{\ln 2}\left(u + \frac{3K}{4\eta}R^2\right)}$$

2. $d\vec{S} = -\vec{e}_r\, 2R\, d\varphi\, dz = -\vec{e}_r\, dS$

ϕk kol II, 8. VI 2015.

$\tilde{P} = -p\tilde{I} + 2\eta\tilde{S}$, $dF^{\text{ukupno}} = \tilde{P}\, d\vec{S}$

$$\tilde{S} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x} & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{dv}{dr}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{dv}{dr}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{dv}{dr}\cos\varphi \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{dv}{dr}\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{dv}{dr}\sin\varphi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tilde{S} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{P}\, d\vec{S} = \left(+p\vec{e}_r - 2\eta\tilde{S}\vec{e}_r\right) 2R\, d\varphi\, dz$$

$$p\vec{e}_r = p(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$$

$$\tilde{S}\vec{e}_r = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dr}\vec{e}_z$$

$$F_x = 2R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1} dz\, \big(p(2R)\cos\varphi\big) = 0$$

$$F_y = 2R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1} dz\, p(2R)\sin\varphi = 0$$

$$F_z = -2R\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{1} dz\, \frac{2\eta}{2}\frac{dv}{dr}\Big|_{r=2R} = -4\pi R\eta \frac{dv}{dr}\Big|_{r=2R} =$$

$$= -4\pi R\eta\left(\frac{K}{2\eta}2R + \frac{C_1}{2R}\right) =$$

$$= \boxed{-4\pi K R^2 + \frac{2\pi\eta}{\ln 2}\left(u + \frac{3K}{4\eta}R^2\right) = F_z}$$

3

безвртложно струјање : $rot \vec{v} = 0$, $\forall r$

$$\Longrightarrow \frac{dv}{dr} = 0$$

$$\frac{dv}{dr} = \frac{k}{2\eta} r + \frac{C_1}{r} = 0 \Rightarrow C_1 = -\frac{k}{2\eta} r^2$$

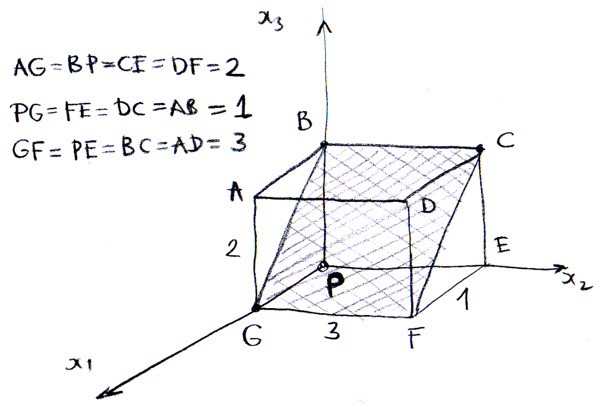
Овај услов не може бити задовољен за свако $R \leq r \leq 2R$, па струјање не може да буде безвртложно, јер не постоји вредност и за коју је могуће безвртложно струјање.

Drugi kolokvijum iz Fizike kontinuuma, 7. maj 2015.

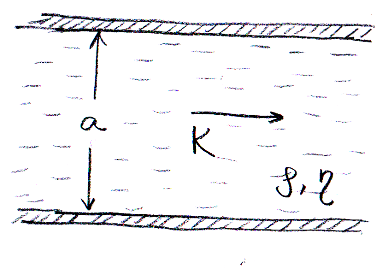
1. (50 poena) Tenzor napona u tački P u Dekartovim koordinatama reprezentovan je matricom

$$\mathcal{P} = \sigma \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

gde je σ zadata konstanta. Izračunati vektor napona koji u tački P deluje na površinu paralelnu ravni $GFCB$, prikazanu na slici. Koliki je intenzitet tangencijalne komponente tog vektora napona?



ZADATAK 1.



ZADATAK 2.

2. (50 poena) Stoksov fluid, dinamičkog koeficijenta viskoznosti η, stacionarno protiče kroz prostor između dve nepokretne beskonačno velike ravne paralelne ploče, usled postojanja konstantnog gradijenta pritiska intenziteta K u pravcu paralelnom pločama. Rastojanje između ploča iznosi a. Smatrajući da zapreminske sile mogu da se zanemare, kao i da je strujanje laminarno, tako da može da se pretpostavi da se delići kreću u pravcu gradijenta pritiska, pri čemu im brzina zavisi samo od rastojanja od ploča, naći profil brzine u fluidu. Odrediti tenzor viskoznosti neposredno uz jednu od ploča.

Napomene: Izrada zadatka traje 90 minuta. Nije dozvoljena upotreba nikakve literature ni elektronskih pomagala. Rešenja bez obrazloženja i jasno definisanih oznaka NEĆE BITI PREGLEDANA.

1

$$\Phi = \sigma \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Једначина равни GFCB: $\frac{x_1}{1} + \frac{x_3}{2} = 1$

Орт нормале: $\vec{n} = \dfrac{\vec{e}_1 + \frac{1}{2}\vec{e}_3}{\sqrt{1+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\vec{e}_1 + \vec{e}_3\right)$

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{n}\cdot\vec{P}_{\vec{n}} = \frac{\sigma}{5}(6+3) = \frac{9}{5}\sigma$$

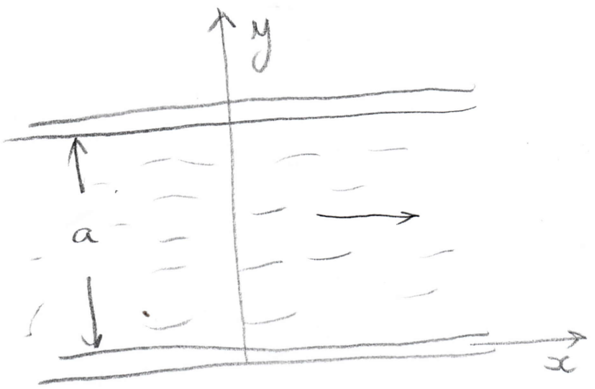
$$\left(\vec{P}_{\vec{n}}\right)_\tau = \vec{P}_{\vec{n}} - \vec{n}\left(\vec{n}\cdot\vec{P}_{\vec{n}}\right) = \frac{\sigma}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{9}{5}\sigma\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sigma}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 3 - \frac{18}{5} \\ 2 \\ 3 - \frac{9}{5} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\sigma}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ 2 \\ \frac{6}{5} \end{pmatrix}$$

$$\left|\left(\vec{P}_{\vec{n}}\right)_\tau\right| = \frac{\sigma}{\sqrt{5}}\sqrt{\left(\frac{3}{5}\right)^2 + 4 + \left(\frac{6}{5}\right)^2} = \frac{\sigma}{5\sqrt{5}}\sqrt{9+100+36} = \frac{\sigma}{5\sqrt{5}}\sqrt{145} =$$

$$= \frac{\sigma}{5\sqrt{5}}\sqrt{5\cdot 29} = \frac{\sigma}{5}\sqrt{29}$$

(2)



$$\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$$

Стоксова једначина $\quad \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \underbrace{\vec{f}}_{=0} - \dfrac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \dfrac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = 0$$

Пројекција Стоксове ј-не на x-осу:

$$0 = -\frac{1}{\rho}K + \frac{\eta}{\rho}\Delta v \Rightarrow \frac{K}{\eta} = \Delta v = \frac{d^2 v}{dy^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dy} = \frac{K}{\eta}y + C_1 \Rightarrow v = \frac{1}{2}\frac{K}{\eta}y^2 + C_1 y + C_2 \qquad (1)$$

Гранични услови: $\quad v(0) = 0, \quad v(a) = 0 \xRightarrow{(1)}$

$$\Rightarrow 0 = \frac{K}{2\eta}\cdot 0 + C_1\cdot 0 + C_2 \Rightarrow \boxed{C_2 = 0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{K}{2\eta}a^2 + C_1 a \Rightarrow \boxed{C_1 = -\frac{K}{2\eta}a} \xRightarrow{(1)}$$

$$\Rightarrow v(y) = \frac{K}{2\eta}y^2 - \frac{K}{2\eta}ay = \boxed{\frac{K}{2\eta}y(y-a) = v(y)}$$

Тензор брзине деформације $\quad S = \frac{1}{2}(J + J^T), \quad J_{ij} = \dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}$

$$x = x_1, \quad y = y_1, \quad \vec{v} = v_1(x_2)\vec{e}_1 = v(x_2)\vec{e}_1$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \frac{dv(x_2)}{dx_2}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_i} = \frac{\partial v_3}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \frac{dv(x_2)}{dx_2} & 0 \\ \frac{dv}{dx_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{dv}{dx_2} = \frac{d}{dx_2}\left[\frac{K}{2\eta}x_2(x_2 - a)\right] = \frac{K}{2\eta}(2x_2 - a)$$

$$\boxed{x_2 = 0: \quad \frac{dv}{dx_2} = -\frac{Ka}{2\eta}}$$

$$x_2 = 0: \quad \frac{dv}{dx_2} = \frac{Ka}{2\eta}$$

$$\boxed{P' = 2\eta S = -\frac{Ka}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Peti domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 7. maj 2015.

1. (35 poena) Kompleksni potencijal koji opisuje dva linijska vrtloga u sistemu u kojem su centri vrtloga nepokretni je

$$W(z) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma z}{4\pi d} - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(z-d) + \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(z+d).$$

a) Naći strujnu funkciju.

b) Odrediti polje brzine koje odgovara ovom proticanju.

2. (30 poena) Supstancijalna kontura $C(t)$ definisana je sa

$$\vec{r} = (R\cos s + R\alpha t\sin s, R\sin s, 0), \quad s \in [0, 2\pi).$$

a) Naći polje brzine $\vec{v}$ i odrediti tačke koje se nikad ne pomeraju. Skicirati kako se menja oblik konture u vremenu.

b) Izračunati

$$\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

Da li je zadovoljena Kelvinova teorema?

3. (35 poena) Zadat je tok u fluidu u kome su sve zapreminske sile potencijalne:

$$x = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t}\left[X\cos\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right) - Y\sin\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right)\right],$$

$$y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t}\left[Y\cos\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right) + X\sin\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right)\right],$$

$$z = Z\mathrm{e}^{\alpha t}.$$

Ovde su (x, y, z) Ojlerove i (X, Y, Z) Lagranževe promenljive.

a) Naći polje brzine $\vec{v}$ i vrtožnosti $\vec{\omega}$.

b) Proveriti da li je fluid nestišljiv i da li je zadovoljena Helmholcova jednačina.

Rešenje

1. Kompleksni potencijal $W(z)$ povezan je sa potencijalom brzine Φ i strujnom funkcijom ψ na sledeći način

$$W = \Phi + \mathrm{i}\psi,$$

pa je $\psi = \operatorname{Im} W$.

a) Da bismo odredili imaginarni deo od W, posmatraćemo svaki sabirak posebno.

$$\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{i}\Gamma z}{4\pi d} &= -\frac{\mathrm{i}\Gamma(x_1+\mathrm{i}x_2)}{4\pi d} = \frac{\Gamma(-\mathrm{i}x_1+x_2)}{4\pi d} \overset{\mathrm{Im}}{\to} -\frac{\Gamma x_1}{4\pi d},\\
-\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(z-d) &= -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(x_1+\mathrm{i}x_2-d) = -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x_1-d)^2+x_2^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x_2}{x_1-d}}\right)\\
&\overset{\mathrm{Im}}{\to} -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1-d)^2+x_2^2} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\ln\left((x_1-d)^2+x_2^2\right),\\
\frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(z+d) &= \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln(x_1+\mathrm{i}x_2+d) = \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\ln\left(\sqrt{(x_1+d)^2+x_2^2}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x_2}{x_1+d}}\right)\\
&\overset{\mathrm{Im}}{\to} \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\sqrt{(x_1+d)^2+x_2^2} = \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\left((x_1+d)^2+x_2^2\right).
\end{aligned}$$

Stoga je strujna funkcija

$$\begin{aligned}\psi &= \operatorname{Im} W = -\frac{\Gamma x_1}{4\pi d} - \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\left((x_1-d)^2+x_2^2\right) + \frac{\Gamma}{4\pi}\ln\left((x_1+d)^2+x_2^2\right)\\ &= \frac{\Gamma}{4\pi}\left(\ln\frac{(x_1+d)^2+x_2^2}{(x_1-d)^2+x_2^2} - \frac{x_1}{d}\right).\end{aligned}$$

b) Polje brzine možemo da odredimo ili iz kompleksnog potencijala, ili pomoću strujne funkcije. Iz kompleksnog potencijala imamo da je

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} = v_1 - \mathrm{i}v_2.$$

Pošto je

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z} &= -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{4\pi d} - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z-d} + \frac{\mathrm{i}\Gamma}{2\pi}\frac{1}{z+d}\\ &= -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{4\pi d} - \frac{\mathrm{i}\Gamma}{\pi}\frac{d}{z^2-d^2}\\ &= -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{4\pi d} - \frac{\mathrm{i}\Gamma d}{\pi}\frac{1}{x_1^2-x_2^2+2\mathrm{i}x_1x_2-d^2}\\ &= -\frac{\mathrm{i}\Gamma}{4\pi d} - \frac{\mathrm{i}\Gamma d}{\pi}\frac{x_1^2-x_2^2-d^2-2\mathrm{i}x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2-d^2)^2}\\ &= \frac{\Gamma}{\pi}\left[\frac{-2dx_1x_2}{(x_1^2+x_2^2-d^2)^2} + \mathrm{i}\left(-\frac{1}{4d} - \frac{d(x_1^2+x_2^2-d^2)}{(x_1^2+x_2^2-d^2)^2}\right)\right],\end{aligned}$$

iz čega vidimo da je:

$$v_1 = \frac{-2\Gamma d x_1 x_2}{\pi(x_1^2+x_2^2-d^2)^2}, \qquad v_2 = \frac{\Gamma}{\pi}\left(\frac{1}{4d} + \frac{d(x_1^2+x_2^2-d^2)}{(x_1^2+x_2^2-d^2)^2}\right).$$

2. U početnom trenutku $t=0$, supstancijalna kontura je $C(0)$

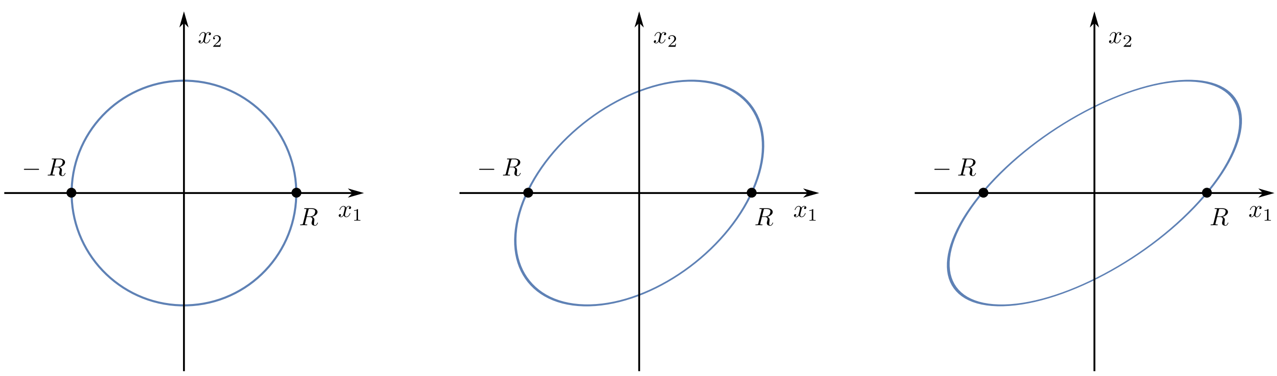
$$\vec{r} = (R\cos s, R\sin s, 0), \quad s \in [0, 2\pi),$$

a to je jednačina kruga.

a) Polje brzine lako određujemo

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = (R\alpha\sin s, 0, 0).$$

Tačke koje se ne pomeraju imaju brzinu 0. To su tačke za koje je $R\alpha\sin s = 0$ iz čega vidimo da je $s=0$ ili $s=\pi$. To su dve tačk na našoj konturi $(R,0,0)$ i $(-R,0,0)$. Na osnovu polja brzine, vidimo da se ovde pomeraju samo tačke u pravcu x ose, tako da imamo smicanje u tom pravcu. Kontura u nekoliko različitih trenutaka izgleda ovako



b) Da bismo izračunali $\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ treba da nađemo $\mathrm{d}\vec{l}$

$$\mathrm{d}\vec{l} = (-R\sin s\mathrm{d}s + R\alpha t\cos s\mathrm{d}s, R\cos s\mathrm{d}s, 0),$$

tako da je

$$\Gamma \;=\; \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi} R\alpha \sin s(-R\sin s + R\alpha t\cos s)\mathrm{d}s = -R^2\pi\alpha.$$

Kao što vidimo, Γ ne zavisi eksplicitno od vremena, tako da i ovaj primer pkazuje da je zadovoljena Kelvinova teorema.

3. Polje brzine je:

$$\begin{aligned}
v_x &= \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t}\left[X\cos\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right) - Y\sin\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right)\right] \\
&\quad + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t}\left[-X\Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right) - Y\Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right)\right] \\
&= -\frac{\alpha}{2}x - \Omega y\mathrm{e}^{\alpha t}, \\
v_y &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\
&= -\frac{\alpha}{2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t}\left[Y\cos\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right) + X\sin\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right)\right] \\
&\quad + \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\alpha t}\left[Y\Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\sin\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right) + X\Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\cos\left(\frac{\Omega}{\alpha}(\mathrm{e}^{\alpha t}-1)\right)\right] \\
&= -\frac{\alpha}{2}y + \Omega x\mathrm{e}^{\alpha t}, \\
v_z &= \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \\
&= \alpha Z\mathrm{e}^{\alpha t} \\
&= \alpha z.
\end{aligned}$$

a) Polje brzine je

$$\vec{v} = (-\frac{\alpha}{2}x - \Omega y\mathrm{e}^{\alpha t}, -\frac{\alpha}{2}y + \Omega x\mathrm{e}^{\alpha t}, \alpha z),$$

dok je vrtožnost

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = \Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\vec{e}_z.$$

b) Lako se vidi da je $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$ što znači da je fluid nestišljiv. Helmoholcova jednačina za nestišljiv fluid, u kome su sve zapreminske sile potencijalne glasi (videti formulu (7.5) u skriptama)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v}.$$

Vidimo da je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} = \alpha\Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\vec{e}_z,$$

dok je desna strana

$$(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} = \Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\frac{\partial}{\partial z}\vec{v} = \Omega\mathrm{e}^{\alpha t}\alpha\vec{e}_z,$$

tako da su leva i desna strana jednake, odnosno, Helmholzova jednačina je zadovoljena.

Šesti domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 26. maj 2015.

1. (10 poena) U slučaju Kuetovog strujanja unutrašnji cilindar miruje, a spoljašnji rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω. Poluprečnik osnove unutrašnjeg cilindra jednak je R, a spoljašnjeg $R(1+\alpha)$. Pretpostavljajući da je moment površinskih sila koji deluje na jedinicu dužine unutrašnjeg cilindra oblika $K(\alpha)\eta^a\Omega^b R^c$, gde je $K(\alpha)$ bezdimenziona funkcija bezdimenzionog parametra α, a η dinamički koeficijent viskoznosti, odrediti stepene a, b i c.

2. (20 poena) Usled raznih procesa koji se dešavaju u Zemljinoj unutrašnjosti, srednja vrednost intenziteta vektora $\vec{q}$ gustine toplote na površini Zemlje iznosi: $q_k \approx 0.06W\,m^{-2}$ iznad kontinenata, odnosno $q_v \approx 0.1W\,m^{-2}$ iznad vodenih površina. Smatrajući da $\vec{q}$ ima radijalan pravac i uzimajući u obzir da je srednji poluprečnik Zemlje $R = 6371\,km$, kao i da kontinenti prekrivaju $f \approx 29\%$ Zemljine površine, izračunati ukupnu količinu toplote koju u jedinici vremena Zemlja izrači na ovaj način. Uporediti dobijenu vrednost sa procenjenom svetskom potrošnjom energije u jedinici vremena, koja iznosi $13 \times 10^{12}\,W$.

3. (70 poena) Stoksov fluid stacionarno struji u oblasti između dva koaksijalna cilindra, poluprečnika a i b ($a < b$). Unutrašnji cilindar rotira ugaonom brzinom ω, a spoljašnji se kreće u pravcu zajedničke ose konstantnom brzinom U. Gustina fluida je ρ, koeficijent viskoznosti η, a zapreminske sile se mogu zanemariti. Pretpostavljajući da je brzina fluida oblika $\vec{v} = v_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + v_z(r)\vec{e}_z$, gde su (r, φ, z) cilindrične koordinate izabrane tako da se z osa poklapa sa osom cilindara, da pritisak zavisi samo od rastojanja od ose: $p = p(r)$, da važi Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa \mathrm{grad} T$, pri čemu temperatura zavisi samo od r, kao i da je gustina unutrašnje energije linearna funkcija temperature: $u = cT$, gde su κ i c konstante, formirati diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava temperatura. Ako je temperatura na unutrašnjem cilindru jednaka T_a, a na spoljašnjem T_b, naći $T(r)$.

Rešenje

1. Ako sa L, M i T redom označimo jedinice za dužinu, masu i vreme, onda su jedinice za moment sile po jedinici dužine LMT^{-2}, za dinamički koeficijent viskoznosti $ML^{-1}T^{-1}$, a za ugaonu brzinu T^{-1}. Zamenom u pretpostavljeni izraz za moment površinskih sila i poređenjem stepena uz istu osnovnu jedinicu dobijamo jednačine: $1 = c - a$, $1 = a$ i $-2 = -a - b$, odakle direktno sledi $a = b = 1$ i $c = 2$, pa je moment površinskih sila oblika $K(\alpha)\eta\Omega R^2$.

2. Uskladu sa definicijom vektora $\vec{q}$, ukupna količina toplote koja u jedinici vremena prođe kroz Zemljinu površinu jednaka je

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} qR^2 \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = 4\pi R^2 (f q_k + (1-f) q_v) \approx 45 \times 10^{12} W\,,$$

što je više od tri puta veće od svetske potrošnje.

3. Zamenom pretpostavljenog oblika brzine u Stoksovu jednačinu i njenim projektovanjem na $\vec{e}_\varphi$ i $\vec{e}_z$ dobijaju se redom jednačine:

$$\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}(r v_\varphi)\right) = 0\,, \quad \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}\,r}\right) = 0\,, \tag{1}$$

iz kojih slede izrazi za v_φ i v_z:

$$v_\varphi = K_1 r + \frac{K_2}{r}\,, \quad v_z = C_1 \ln r + C_2\,. \tag{2}$$

Integracione konstante određuju se iz graničnih uslova:

$$r = a: \qquad v_\varphi = a\omega\,, \quad v_z = 0\,, \tag{3}$$

odnosno

$$r = b: \qquad v_\varphi = 0\,, \quad v_z = U\,, \tag{4}$$

tako da se konačno dobija

$$v_\varphi = \frac{a^2}{a^2 - b^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)\omega r\,, \quad v_z = U\,\frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}}\,. \tag{5}$$

U izrazima za elemente tenzora $\tilde{\mathcal{S}}$ brzine deformacije javljaju se parcijalni izvodi Dekartovih komponenta brzine:

$$v_1 = \vec{v}\cdot\vec{e}_1 = -\sin\varphi\, v_\varphi(r)\,, \quad v_2 = \vec{v}\cdot\vec{e}_2 = \cos\varphi\, v_\varphi(r)\,, \quad v_3 = v_z(r)\,, \tag{6}$$

pa, imajući u vidu da je

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos\varphi\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin\varphi}{r}\,, \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin\varphi\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos\varphi}{r}\,, \tag{7}$$

nalazimo

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \cos\varphi\,\frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} \tag{8}$$

i, slično,

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = \sin\varphi\,\frac{\partial v_1}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \cos\varphi\,\frac{\partial v_2}{\partial r} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \varphi}\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \sin\varphi\,\frac{\partial v_2}{\partial r} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{\partial v_2}{\partial \varphi}\,, \tag{9}$$

odnosno

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \cos\varphi\,\frac{\partial v_3}{\partial r}\,, \quad \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \sin\varphi\,\frac{\partial v_3}{\partial r}\,, \tag{10}$$

a lako se vidi da je

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0\,. \tag{11}$$

Eksplicitnom zamenom izraza za izvode $\frac{\partial v_i}{\partial r}$ i $\frac{\partial v_i}{\partial \varphi}$ u nađene izraze, a zatim u elemente $S_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$, dobija se matrica tenzora brzine deformacije

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} K_2\frac{\sin 2\varphi}{r^2} & -K_2\frac{\cos 2\varphi}{r^2} & \frac{1}{2}\cos\varphi\, v_z' \\ -K_2\frac{\cos 2\varphi}{r^2} & -K_2\frac{\sin 2\varphi}{r^2} & \frac{1}{2}\sin\varphi\, v_z' \\ \frac{1}{2}\cos\varphi\, v_z' & \frac{1}{2}\sin\varphi\, v_z' & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{12}$$

gde je $K_2 = \omega a^2 b^2/(b^2 - a^2)$.

Iz opšte jednačine koju zadovoljava gustina unutrašnje energije, uz pretpostavke date u formulaciji zadatka, sledi da temperatura zadovoljava jednačinu

$$\Delta T = -\frac{2\eta}{\kappa}\mathrm{Tr}\mathcal{S}^2 ,$$

odnosno

$$\Delta T = -\frac{2\eta}{\kappa}\left(\frac{2K_2^2}{r^4} + \frac{1}{2}\frac{U^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\frac{1}{r^2}\right) ,$$

a kada se zameni i izraz za laplasijan u cilindričnim koordinatama dobija se eksplicitan oblik diferencijalne jednačine koju zadovoljava temperatura:

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{2\eta}{\kappa}\left(\frac{2K_2^2}{r^4} + \frac{1}{2}\frac{U^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\frac{1}{r^2}\right) .$$

Rešavanjem ove jednačine prvo sledi

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) = -\frac{2\eta}{\kappa}\left(\frac{2K_2^2}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{U^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\frac{1}{r}\right) ,$$

a zatim

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{2\eta}{\kappa}\left(\frac{-K_2^2}{r^3} + \frac{1}{2}\frac{U^2}{\ln^2\frac{b}{a}}\frac{\ln r}{r}\right) + \frac{K_3}{r}$$

i konačno

$$T(r) = \frac{\eta}{\kappa}\left(\frac{-K_2^2}{r^2} - \frac{U^2}{2\ln^2\frac{b}{a}}\ln^2 r\right) + K_3\ln r + K_4 .$$

Zamenom graničnih uslova $T(a) = T_a$ i $T(b) = T_b$ u dobijeni izraz za $T(r)$ dobijaju se vrednosti integracionih konstanata K_3 i K_4:

$$K_3 = \frac{T_b - T_a + \frac{\eta}{\kappa}\left[-\omega^2\frac{a^2b^2}{b^2-a^2} + \frac{1}{2}U^2\frac{\ln(ab)}{\ln\frac{b}{a}}\right]}{\ln\frac{b}{a}} , \quad K_4 = T_a - K_3\ln a + \frac{\eta}{\kappa}\left(\frac{K_2^2}{a^2} + \frac{U^2}{2}\frac{\ln^2 a}{\ln^2\frac{b}{a}}\right) .$$

Prvi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 13. mart 2014.

1. (25 poena) Polje brzine opisano je Ojlerovim metodom u Dekartovim koordinatama:

$$\vec{v} = \vec{r} \times \vec{e}_x + \cos(at)\vec{e}_y + \sin(at)\vec{e}_z.$$

Ovde je a konstanta različita od ± 1 ($a = \text{const} \neq \pm 1$).

a) Naći jednačine strujnih linija.

b) Odrediti jednačinu trajektorije čestice koja se u početnom trenutku $t = 0$ nalazila u tački (X, Y, Z).

c) Razmotrite specijalan slučaj $a = 0$. Prokomentarišite da li u tom slučaju postoji razlika između strujnih linija i trajektorija čestica. Zašto? Da li ta razlika postoji kada je $a \neq 0$? Obrazložite.

2. (25 poena) Odredite konstante a, b i c tako da brzina

$$\vec{v} = \frac{1}{r(x+r)}\left[(x+ar)\vec{e}_x + (y+br)\vec{e}_y + (z+cr)\vec{e}_z\right],$$

zadovoljava jednačinu kontinuiteta.

3. (25 poena) Polje brzine u dvodimenzionalnom, nestišljivom fluidu je dato sa:

$$v_x = 4xy, \quad v_y = \alpha(x^2 - y^2).$$

a) Odredite parametar α.

b) Naći polje ubrzanja.

c) Odredite strujnu funkciju za ovo kretanje $\psi(x, y)$.

d) Izračunati vektor vrtložnosti.

4. (25 poena) Polje brzine linijskog izvora u cilindričnim koordinatama je

$$\vec{v} = \frac{m}{2\pi r}\vec{e}_r.$$

Odredite:

a) vektor brzine u Dekatrovim koordinatama.

b) tenzor brzine deformacije.

c) zapreminski protok kroz valjak visine H i poluprečnika R čija se osa poklapa za z-osom.

Rešenja

1. Dato polje brzine ima komponente $v_x = 0$, $v_y = z + \cos at$ i $v_z = -y + \sin at$.

a) Jednačine strujnih linija su

$$\frac{\mathrm{d}x}{0} = \frac{\mathrm{d}y}{z + \cos at} = \frac{\mathrm{d}z}{-y + \sin at}.$$

Iz prve jednačine zaključujemo da je $x = C_1$, što predstavlja jednačinu ravni. U toj ravni, strujna linija je određena uslovom $(-y + \sin at)\mathrm{d}y = (z + \cos at)\mathrm{d}z$, iz čega se integracijom dobija

$$\boxed{y^2 + z^2 - 2y\sin at + 2z\cos at = C_2.}$$

Ovde je C_2 neodređena konstanta. Ova jednačina predstavlja vremenski promenljive kružne linije.

b) Jednačine kretanja su:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z + \cos at, \quad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = -y + \sin at.$$

Iz prve odmah dobijamo da je $x = X$, dok preostale dve čine sistem. Ako drugu jednačinu diferencirmao po vremenu i potom iskoristimo treću jednačinu, dobijamo

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = (1-a)\sin at.$$

Rešenje ove jednačine je zbir rešenja homogene jednačine i partikalnog rešenja $y = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{p}$. Pošto je homogena jednačina $\frac{\mathrm{d}^2y_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t^2} + y_\mathrm{h} = 0$, njeno rešenje je $y_\mathrm{h} = D_1 \sin t + D_2 \cos t$. Partikularno rešenje tražimo u obliku $y_\mathrm{p} = E \sin at$. Kada se ubaci ovo pretpostavljeno rešenje, dobijamo da je konstanta $E = \frac{1}{1+a}$. Dakle, dobili smo da je

$$y = D_1 \sin t + D_2 \cos t + \frac{1}{1+a}\sin at.$$

Iz jednačine $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z + \cos at$ sledi da je

$$z = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - \cos at = D_1 \cos t - D_2 \sin t - \frac{1}{1+a}\cos at.$$

Konstante D_1 i D_2 određujemo iz početnih uslova $y(t=0) = Y$ i $z(t=0) = Z$, tako da je konačno

$$\boxed{\begin{aligned} x &= X, \\ y &= \left(Z + \frac{1}{1+a}\right)\sin t + Y\cos t + \frac{1}{1+a}\sin at, \\ z &= \left(Z + \frac{1}{1+a}\right)\cos t - Y\sin t - \frac{1}{1+a}\cos at. \end{aligned}}$$

c) U specijalanom slučaju $a = 0$ nemamo vremenske zavisnosti u jednačinama kretanja. Strujne linije su tad stacionarne kružnice u Oyz-ravni i poklapaju se sa trajektorijama čestica $y^2 + (z-1)^2 = \mathrm{const}$. Dakle, u tom slučaju ne postoji razlika između strujnih linija i trajektorija čestica, jer je kretanje stacionarno. Kada je $a \neq 0$ kreanje je nestacionarno i kao što smo videli, trajektorije i strujne linije se ne poklapaju.

2. Uslov nestišljivosti fluida je $\operatorname{div}\vec{v} = 0$, odnosno

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

Pošto je $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ lako se nalazi da je

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r},$$

pa je onda

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{x+ar}{r(x+r)}\right] = \frac{1+\frac{ax}{r}}{r(x+r)} + (x+ar)\left[-\frac{x}{r^3(x+r)} - \frac{1}{r^2(x+r)}\right],$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{y+br}{r(x+r)}\right] = \frac{1+\frac{by}{r}}{r(x+r)} + (y+br)\left[-\frac{y}{r^3(x+r)} - \frac{y}{r^2(x+r)^2}\right],$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{z+cr}{r(x+r)}\right] = \frac{1+\frac{cz}{r}}{r(x+r)} + (z+cr)\left[-\frac{z}{r^3(x+r)} - \frac{z}{r^2(x+r)^2}\right].$$

Nakon malo sređivanja dobijamo da je

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{(r-x)(1-a)-by-cz}{r(x+r)^2},$$

i da bi ovaj poslednji izraz bio jednak 0, neophodno je i dovoljno da bude

$$\boxed{a=1, \quad b=0, \quad c=0.}$$

3. Pošto je fluid nestišljiv imamo da je $\operatorname{div}\vec{v}=0$.

a) Parametar α određujemo iz uslova nestišljivosti:

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 4y - 2\alpha y = 0,$$

pa je

$$\boxed{\alpha = 2.}$$

Polje brzine je

$$v_x = 4xy, \quad v_y = 2(x^2-y^2).$$

b) Polje ubrzanja određujemo iz

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v},$$

što nakon kraćeg računa daje:

$$\boxed{\vec{a} = 8x(x^2+y^2)\vec{e}_x + 8y(x^2+y^2)\vec{e}_y.}$$

c) Strujna funkciju $\psi(x,y)$ zadovoljava

$$v_x = -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v_y = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

pa je u našem slučaju

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = -4xy, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = 2(x^2-y^2),$$

iz čega se dobija

$$\boxed{\psi = -2xy^2 + \frac{2}{3}x^3.}$$

d) Vektor vrtložnosti je

$$\boxed{\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{e}_z(4x-4x) = 0.}$$

4. Polje brzine linijskog izvora u cilindričnim koordinatama je

$$\vec{v} = \frac{m}{2\pi r}\vec{e}_r.$$

a) U Dekatrovim koordinatama, ovo polje brzine ima oblik

$$\vec{v} = \frac{m}{2\pi r}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{m}{2\pi}\frac{x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2}{x_1^2 + x_2^2}$$

pa je

$$\boxed{v_1 = \frac{m}{2\pi}\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_2 = \frac{m}{2\pi}\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}.}$$

b) Nenulti izvodi komponenti brzina po koordinatama su

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{m}{2\pi}\frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{m}{2\pi}\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -\frac{m}{2\pi}\frac{2x_1x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{m}{2\pi}\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}.$$

Tenzor brzine deformacije ima komponente, $\mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i})$ pa je

$$\boxed{\mathcal{S} = \frac{m}{2\pi}\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2)^2}\begin{pmatrix} x_2^2 - x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ -2x_1x_2 & x_1^2 - x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.}$$

c) Zapreminski protok kroz valjak visine H i poluprečnika R čija se osa poklapa za z-osom jednak je integralu

$$F = \int_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^H \frac{m}{2\pi R}\vec{e}_r R\mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z\vec{e}_r,$$

tako da je konačno

$$\boxed{F = mH.}$$

Prvi kolokvijum iz FIZIKE KONTINUUMA
3. april 2014.

Polje brzine koje opisuje strujanje fluida dato je u Dekartovim koordinatama:

$$v_1 = -4ux_2(x_1^2 + x_2^2) + \beta \frac{x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}},$$

$$v_2 = 4ux_1(x_1^2 + x_2^2) + \beta \frac{x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}},$$

$$v_3 = 0.$$

Ovde su u i β poznate konstante.

1) Naći strujnu funkciju $\psi(x_1, x_2)$. (15 b)

2) Napisati kako strujna funkcija izgleda u polarnim koordinatama $\psi(r, \varphi)$. (5 b)

3) Na osnovu dela zadatka pod 2) naći polje brzine u polarnim koordinatama. (10 b)

4) Pokazati da je fluid nestišljiv. (10 b)

U ovom delu zadatka polje brzine je jednostavnije, jer je $\beta = 0$.

5) Naći tenzor brzine deformacije. (20 b)

6) Odrediti polje ubrzanja $\vec{a}$. (15 b)

7) Odrediti vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$. (10 b)

8) Naći cirkulaciju brzine po kružnoj konturi $x_1^2 + x_2^2 = 4a^2$. (15 b)

Korisne formule:

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z.$$

Rešenja:

1) $\psi(x_1, x_2) = u(x_1^2 + x_2^2)^2 + \beta \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$.

2) $\psi(r, \varphi) = ur^4 + \beta \cos\varphi$.

3) $v_r = \beta \frac{\sin\varphi}{r}, \quad v_\varphi = 4ur^3$.

4) Lako se vidi da je $\mathrm{div}\,\vec{v} = 0$.

5) $\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -8ux_1x_2 & 4u(x_1^2 - x_2^2) & 0 \\ 4u(x_1^2 - x_2^2) & 8ux_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

6) $\vec{a} = -16u^2(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$.

7) $\vec{\omega} = 8u(x_1^2 + x_2^2)\vec{e}_3$.

8) $\Gamma = 128\pi u a^4$.

Drugi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 10. april 2014.

1. (25 poena) Stabilnost hidrocentrale zavise od oblika brane. Ispitaćemo dve vrste brane: "pravougaonu" i "trougaonu". Presek pravougaone brane je pravougaonik, a presek trougaone je trougao (logično, zar ne). Obe brane su izgrađene od iste količine materijala i imaju jednake visine (što znači da je osnova trougaone brane dva puta veća). Do rušenja brane dolazi kad moment hidrostatičke sile u odnosu na tačku osnove T postane veći od neke kritične vrednosti. Ovde ćemo ispitatati koja brana ce da izdrži viši nivo vode. U tu svrhu, izračunajte odnos momenta hidrostatičke sile u odnosu na tačku T za trougaonu i pravougaonu branu kad je nivo popunjenosti akumulacionih jezera $0.5h$ i $0.9h$ koristeći veličine koje su definisane na slici 1.

2. (25 poena) Tenzor napona u nekoj sredini reprezentovan je matricom

$$\hat{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 & -x_2x_3 \\ 0 & -x_1x_2 & x_1x_3 \\ -x_2x_3 & x_1x_3 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Pokazati da su delići ovog fluida u ravnoteži ako nema zapreminskih sila.

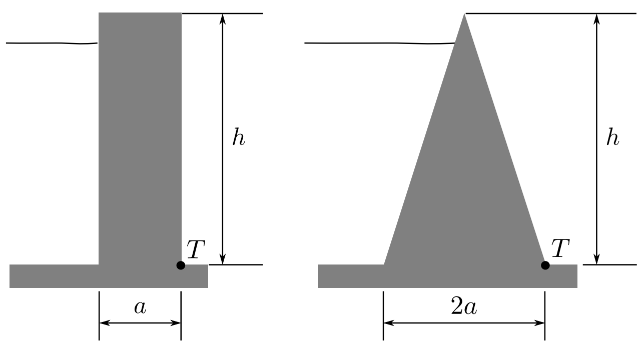
b) Izračunati moment površinskih sila koji deluje na poluloptu s centrom u koordinatnom početku, poluprečnika $r = 2$ koja se nalazi iznad ravni $x_3 = 0$.

3. (50 poena) Businesk je 1868. razmotrio proticanje Navije-Stoksovog fluida kroz trougaoni presek koje ćemo i mi posmatrati u ovom zadatku. Pretpostavimo da fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η stacionarno i laminarno protiče van polja zapreminskih sila, usled postojanja konstantnog gradijentna pritiska u pravcu x-ose ($\partial p/\partial x = -P$). Cev je beskonačna trougaona prizma, čiji je presek trougao prikazan na slici 2. Zbog graničnih uslova pretpostavićemo da je brzina oblika $\vec{v} = K(y-h)(y-az)(y-bz)\vec{e}_x$.

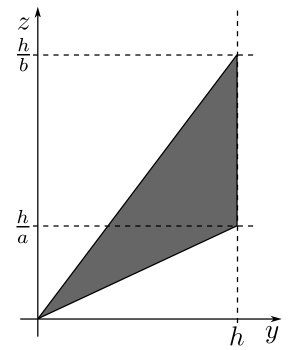
a) Direktnom zamenom pretpostavljenog oblika brzine u Navije-Stoksovu jednačinu naći konstante K, a i b.

b) Odrediti masu fluida koji u jedinici vremena protekne kroz trougao cevi koji se nalazi u ravni $x = 0$.

c) Izračunati silu viskoznosti kojom fluid deluje na jedinicu dužine cevi.



Slika 1



Slika 2

Rešenje

1. Označimo da H visinu nivoa vode u veštačkom jezeru. Koordinatni početak stavljamo u tačku T, vertikalna osa y je usmerena nagore, z-osa je normalna na ravan crteža, a x-osa je normalna sa ostalim osama i sve zajedno čine desni triedar. Hidrostatički pritisak zavisi od dubine vode $(H-y)$, tako da je $p(y) = p_0 + \rho g(H-y)$. Razmotrimo najpre "pravougaonu" branu. Jednačina graniñe površi brane i vode je $x = -a$, pa je ort normale na graničnu površ $\vec{n}_p = \vec{e}_x$. Elementarna površ brane je $\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, tako da je sila kojom voda deluje na tu infinitezimalnu površinu jednaka $\mathrm{d}\vec{F}_p = p(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_x$, dok je moment sile u odnosu na tačku T

$$\mathrm{d}\vec{M}_p = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}_p = (-a\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \times \vec{e}_x p(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Da bismo našli ukupan moment impulsa u odnosu na tačku T, potrebno je da prointegralimo po y od 0 do H (to je visina vode u jezeru) i po z od $-L/2$ do $L/2$, gde je L širina brane (obe brane imaju istu širinu i videćemo da se u traženom odnosu momenata impulsa ova dimenzija krati).

$$\vec{M}_p = \int_0^H \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} yp(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_z \Rightarrow M_p = \frac{H^2}{6}\left(3p_0 + \rho g H\right) L.$$

Kod trougaone brane koordinatni početak smeštamo u tačku T, a koordinatne ose su usmerene kao u prvom slučaju. Jednačina granične površi u ovom slučaju je $y = \frac{h}{a}x + 2h$ ili u implicitnoj formi $y - \frac{h}{a}x - 2h = 0$. Ort normale je

$$\vec{n}_t = \frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|} = \frac{h\vec{e}_x - a\vec{e}_y}{\sqrt{h^2 + a^2}}.$$

Element površine "trougaone" brane je $\mathrm{d}l\mathrm{d}z$, gde je $l = y\frac{\sqrt{H^2+a^2}}{H}$ dužina od podnožja brane do visine y, pa je $\mathrm{d}l = \frac{\sqrt{H^2+a^2}}{H}\mathrm{d}y$. Stoga je

$$\mathrm{d}\vec{F}_t = p(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\frac{h\vec{e}_x - a\vec{e}_y}{\sqrt{h^2 + a^2}}\frac{\sqrt{H^2 + a^2}}{H}\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Položaj tačke na graničnoj površi je

$$\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = \left(\frac{a}{h}y - 2a\right) e_x + y\vec{e}_y,$$

iz čega sledi da je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{M}_t &= \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}_t = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{a}{h}y - 2a & y & 0 \\ h & -a & 0 \end{vmatrix} p(y)\frac{\sqrt{H^2 + a^2}}{H\sqrt{h^2 + a^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= (p_0 + \rho g(h - y))\left(2a^2 - \frac{2a^2}{h}y - yh\right)\frac{\sqrt{H^2 + a^2}}{H\sqrt{h^2 + a^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Intergacija po y i z ima iste granice kao kod pravougaone brane, tako da je konačno

$$M_t = \frac{\sqrt{H^2 + a^2}}{\sqrt{h^2 + a^2}}\frac{L}{6h}\left(6a^2h(2p_0 + \rho g H) - H(2a^2 + h^2)(3p_0 + \rho g H)\right).$$

Sad se lako nalaze traženi odnos za zadate nivoe vode u jezeru:

$$\frac{M_t}{M_p} = \sqrt{\frac{H^2 + a^2}{h^2 + a^2}}\frac{6a^2h\frac{2p_0+\rho g H}{3p_0+\rho g H} - H(2a^2 + h^2)}{H^2h}.$$

Pošto su brane visoke nekoliko desetina metara, onda je $p_0 \ll \rho g H$, pa se prethodni izraz dodatno pojednostavljuje

$$\frac{M_t}{M_p} = \sqrt{\frac{H^2 + a^2}{h^2 + a^2}}\frac{6a^2h - H(2a^2 + h^2)}{H^2h}.$$

Primetimo da postoji nivo vode u jezeru kada je gornji izraz 0 (jer je $M_t = 0$). Tada je $H = \frac{6a^2h}{2a^2+h^2}$. Kada je popunjenost jezera $H = 0.5h$ imamo da je

$$\left.\frac{M_t}{M_p}\right|_{0.5h} = \sqrt{\frac{0.25h^2 + a^2}{h^2 + a^2}}\frac{6a^2 - 0.5(2a^2 + h^2)}{0.25h^2}.$$

Ako je visok nivo vode u jezeru $H = 0.9h$ onda je

$$\left.\frac{M_t}{M_p}\right|_{0.9h} = \sqrt{\frac{0.81h^2 + a^2}{h^2 + a^2}\frac{6a^2 - 0.9(2a^2 + h^2)}{0.81h^2}}.$$

2. Ako su delići u ravnoteži onda je njihovo ubrzanje jednako nuli, pa iz osnovne jednačine dinamike za kontinualnu sredinu dobijamo da je $0 = \vec{f} + \frac{1}{\rho}\nabla\hat{\mathcal{P}}$.

a) Pošto nema zapreminskih sila $\vec{f} = 0$, delići će biti u ravnoteži ako je $\nabla\hat{\mathcal{P}} = 0$. Pošto je po definiciji divergencije tenzora

$$\operatorname{div}\hat{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^{3}\operatorname{div}(\hat{\mathcal{P}}\vec{e}_i)\vec{e}_i = \operatorname{div}\begin{pmatrix} x_1x_2 \\ 0 \\ -x_2x_3 \end{pmatrix}\vec{e}_1 + \operatorname{div}\begin{pmatrix} 0 \\ -x_1x_2 \\ x_1x_3 \end{pmatrix}\vec{e}_2 + \operatorname{div}\begin{pmatrix} -x_2x_3 \\ x_1x_3 \\ 0 \end{pmatrix}\vec{e}_3 = 0,$$

zaključujemo da su delići zaista u ravnoteži.

b) Moment sile na poluloptu ćemo izračunati kao moment sile na kupolu (gornju polovinu lopte) i osnovu (koja je kružnog oblika). Element površine kupole je $\mathrm{d}S = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$, dok je ort normale $\vec{e}_r$. Površinska sila na delić kupole je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{F}_k &= (\hat{\mathcal{P}}\vec{e}_r)R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \begin{pmatrix} x_1x_2 & 0 & -x_2x_3 \\ 0 & -x_1x_2 & x_1x_3 \\ -x_2x_3 & x_1x_3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix}R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \begin{pmatrix} x_2(x_1^2 - x_3^2) \\ -x_1(x_2^2 - x_3^2) \\ 0 \end{pmatrix}R\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi,
\end{aligned}$$

pri čemu smo zamenili $\sin\theta\cos\varphi = x_1/R$, $\sin\theta\sin\varphi = x_2/R$ i $\cos\theta = x_3/R$ i izmnožili matricu s vekorom. Moment impulsa na uočeni delić jednak je

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\vec{M}_k &= \vec{r}\times\mathrm{d}\vec{F}_k \\
&= \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ x_1/R & x_2/R & x_3/R \\ x_2(x_1^2 - x_3^2) & -x_1(x_2^2 - x_3^2) & 0 \end{vmatrix}R\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \begin{pmatrix} x_1x_3(x_2^2 - x_3^2) \\ x_2x_3(x_1^2 - x_3^2) \\ x_2^2x_3^2 - x_1^2(2x_2^2 - x_3^2) \end{pmatrix}\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi(\sin^2\theta\sin^2\varphi - \cos^2\theta) \\ \cos\theta\sin\varphi(\sin^2\theta\cos^2\varphi - \cos^2\theta) \\ \cos^2\theta - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \end{pmatrix}R^4\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.
\end{aligned}$$

Kada integralimo, dobijamo

$$\vec{M}_k = \int_0^{\pi/2}\int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi(\sin^2\theta\sin^2\varphi - \cos^2\theta) \\ \cos\theta\sin\varphi(\sin^2\theta\cos^2\varphi - \cos^2\theta) \\ \cos^2\theta - 2\cos^2\varphi\sin^2\varphi \end{pmatrix}R^4\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = 0.$$

Lako se vidi da su svi integrali po φ jednaki 0.

Element površine osnove polulopte denisane u zadatku jednak je $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$, gde je r rastojanje od koordinatnog početka u ravni Ox_1x_2, a ort normale na tu površinu je $\vec{n} = \vec{e}_3$, tako da je površinska sila na delić osnove polulopte jednaka:

$$\mathrm{d}\vec{F}_o = -(\hat{\mathcal{P}}\vec{e}_3)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = x_3\begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = 0$$

jer je $x_3 = 0$. Zbog toga je i moment sile na osnovu nula, tako da je i ukupni moment na poluloptu 0.

3. Pretpostavljeni oblik brzine je oblika $\vec{v} = v(y,z)\vec{e}_x$. Pošto nemamo zapreminskih sila, a gradijent pritiska deluje u pravcu x-ose ($\partial p/\partial x = -P$), Navije-Stoksova (NS) jednačina u pravcu x-ose se svodi na

$$0 = P + \eta\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right).$$

dok se duž ostala dva pravca svodi na identitet $0 = 0$.

a) Zamenom pretpostavljenog oblika rešenja $v = K(y-h)(y-az)(y-bz)$ u NS jednačinu dobijamo

$$-P = \eta K((6+2ab)y - 2(a+b)z - 2h(1+ab)). \tag{1}$$

Označimo desnu stranu ove jednakosti sa $f(y,z)$. Da bi ona bila jednaka levoj strani (koja je konstanta), parcijalni izvodi $\frac{\partial f}{\partial y}$ i $\frac{\partial f}{\partial z}$ treba da budu jednaki 0. Iz toga sledi da je

$$6 + 2ab = 0 \wedge a + b = 0 \Rightarrow b = -a \wedge a^2 = 3 \Rightarrow a = \pm\sqrt{3}, b = \mp\sqrt{3}.$$

Drugi rezon je da koeficijenti uz y i z treba da budu jednaki 0, jer je desna strana jednaka levoj, a to znači da je konstantna. Iz toga se dobijaju isti uslovi i isto rešenje. Dva rešenja koja smo dobili su ekvivalentna, jer u pretpostavljenom obliku brzine možemo da zamenimo a i b, tako da ćemo izabrati npr. da je $a = \sqrt{3}$ i $b = -\sqrt{3}$. Kad taj uslov ubacimo u (1), dobijamo da je

$$K = -\frac{P}{4\eta h}.$$

Konačno možemo da napišemo da je Businskovo polje brzine:

$$v = -\frac{P}{4\eta h}(y-h)(y^2 - 3z^2)$$

b) Masa fluida koji u jedinici vremena protekne kroz trougao cevi koji se nalazi u ravni $x = 0$ jednaka je

$$Q = \rho\int \vec{v}\mathrm{d}\vec{S} = \rho\int v\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Presek cevi kroz koju prolazi fluid je jednakostraničan trougao stranice $h\frac{2\sqrt{3}}{3}$. Da bismo integralili po tom trouglu, potrebno ga je bliže definisati. Naš trougao je skup tačaka takvih da je $T = \{(y,z)| -\frac{y}{\sqrt{3}} < z < \frac{y}{\sqrt{3}}, 0 < y < h\}$. Ovde smo fiksirali y i videli u kojim granicama se kreće z kada smo na trouglu, a potom smo videli u kojim granicama ide parametar y. Protok je:

$$Q = -\frac{P\rho}{4\eta h}\int_0^h \mathrm{d}y\int_{-y/\sqrt{3}}^{y/\sqrt{3}}(y-h)(y^2-3z^2)\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{3}}{180}\frac{P\rho h^4}{\eta}.$$

c) Da bismo našli silu viskoznosti potrebno ja da najpre odredimo tenzor viskoznosti, koji u ovom slučaju ima oblik $\hat{\mathcal{P}}' = 2\eta\hat{\mathcal{S}}$. Za dato polje brzine imamo da su nenulti članovi samo:

$$\mathcal{S}_{12} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{K}{2}(3(y^2 - z^2) - 2hy), \quad \mathcal{S}_{13} = \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial z} = -3Kz(y-h).$$

Na graničnoj ravni $y = h$ tenzor viskoznosti je

$$\hat{\mathcal{P}}'\Big|_{y=h} = \eta K\begin{pmatrix} 0 & h^2-3z^2 & 0 \\ h^2-3z^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sila viskoznosti na delić granične površine je

$$\mathrm{d}\vec{F}_v = \hat{\mathcal{P}}'\vec{e}_y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,$$

a na jedinicu granične površine onda deluje sila

$$\vec{F}_v\Big|_{y=h} = \eta K\vec{e}_x\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{-h/\sqrt{3}}^{h/\sqrt{3}}\mathrm{d}z(h^2-3z^2) = \frac{4\eta Kh^3\sqrt{3}}{9}\vec{e}_x.$$

Na svaku od ostalih graničnih površina deluje ista sila. To se može videti iz simetrije (proticanje je laminarno, a slojevi su jednakostranični trouglovi, tako da je viskozna sila na svaku od stranica jednaka), a može se pokazati i eksplicitnim računom. Zato je ukupna viskozna sila tri puta veća od ove koja deluje na jednu graničnu površ, tako da konačno imamo

$$\vec{F}_v = \frac{4\eta Kh^3\sqrt{3}}{3}\vec{e}_x = -\frac{Ph^2\sqrt{3}}{3}\vec{e}_x.$$

PRVI KOLOKVIJUM IZ FIZIKE KONTINUUMA – DRUGI POKUŠAJ , 21. MAJ 2013.

Polje brzine u fluidu u cilindričnim koordinatama (r, φ, z) ima oblik

$$\vec{v} = Kr^{-2}\vec{e}_\varphi \,,$$

gde je K data konstanta.

1. (10 poena) Pokazati da je fluid nestišljiv.
2. (15 poena) Izraziti $\vec{v}$ u Dekartovim koordinatama.
3. (15 poena) Odrediti tenzor brzine deformacije.
4. (15 poena) Odrediti strujnu funkciju u Dekartovim i cilindričnim koordinatama.
5. (15 poena) Naći vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ u Dekartovim koordinatama i odrediti vrtložnu liniju koja prolazi kroz tačku $(x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 0)$.
6. (15 poena) Naći relativnu promenu dužine supstancijalne duži $\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\mathrm{d}s$ u jedinici vremena.
7. (15 poena) Naći polje ubrzanja $\vec{a}$ u Dekartovim koordinatama.

Korisne formule u cilindričnim koordinatama

Za $\vec{v} = v_r(r,\varphi,z)\vec{e}_r + v_\varphi(r,\varphi,z)\vec{e}_\varphi + v_z(r,\varphi,z)\vec{e}_z$ i $f(r,\varphi,z)$:

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix}, \quad \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z\,, \quad \mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Element linije: $\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\varphi\,\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\vec{e}_z$

NAPOMENE: Izrada zadatka traje 90 minuta. Nije dozvoljena upotreba nikakve literature. Rešenja bez obrazloženja i jasno definisanih oznaka NEĆE BITI PREGLEDANA.

Решење:

(2) $v_1 = -\dfrac{Kx_2}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}, \quad v_2 = \dfrac{Kx_1}{(x_1^2+x_2^2)^{3/2}}$

(3)
$$S = \frac{K}{(x_1^2+x_2^2)^{5/2}} \begin{pmatrix} 3x_1x_2 & \frac{3}{2}(x_2^2-x_1^2) & 0 \\ \frac{3}{2}(x_2^2-x_1^2) & -3x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(4)
$$\psi = \frac{K}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} = \frac{K}{r}$$

(5)
$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\vec{v} = -\frac{K}{2} r^{-3}\vec{e}_z = -\frac{K}{2}(x_1^2+x_2^2)^{-3/2}\vec{e}_3$$

Вртложне линије: Права паралелна Ox_3 оси, која садржи задату тачку

(6) супстанцијална дуж $d\vec{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{e}_1+\vec{e}_2)\,ds = \vec{n}\,ds$

релативна промена дужине у јед. времену: $\vec{n}(S\vec{n}) =$

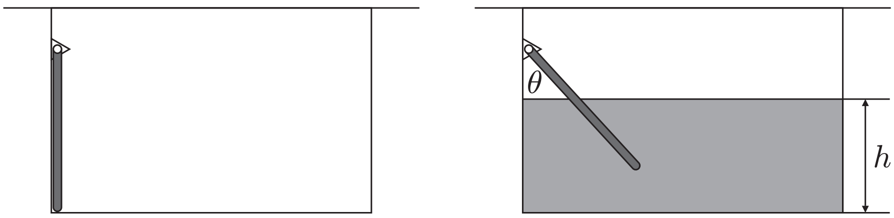
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \;\; 1 \;\; 0)\, S \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1 \;\; 1 \;\; 0)\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & -S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} =$$

$$= S_{12} = \frac{3}{2}K\frac{x_2^2-x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^{5/2}}$$

(7)
$$\vec{a} = \cancel{\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}}^{\,0} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \dots = -\frac{K^2}{(x_1^2+x_2^2)^3}(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)$$

Drugi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 16. april 2013.

1. (20 poena) Na jednom zidu bazena čija je dubina $3\,\mathrm{m}$, na rastojanju $2,5\,\mathrm{m}$ od dna bazena, nalazi se šarka o koju je okačen štap linijske dužine $\lambda = 3,3\,\mathrm{kg/m}$ i debljine $50\,\mathrm{cm}^2$. Šarka ograničava kretanje štapa tako da on može da se kreće samo u ravni koja je normalna na zid na kome se nalazi šarka. U početku je bazen prazan. Tada štap visi duž vertikale i dodiruje dno bazena. Potom se u bazen sipa ulje gustine $\rho = 900\,\mathrm{kg/m}^3$. Kako se menja ugao između štapa i zida u funkciji od visine ulja u bazenu $\theta(h)$?



2. (30 poena) Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η stacionarno protiče između dve beskonačne ploče od kojih donja ploča miruje, a gornja se kreće konstanom brzinom V u svojoj ravni. Rastojanje između ploča je $2a$. Zapreminske sile zanemarite, ali pretpostavite da postoji konstantan gradijent pritiska koji je paralelan sa vektorom brzine gornje ploče i njegov intenzitet je jednak K. Odredite profil brzine unutar fluida i nađite pod kojim uslovima maksimalna brzina fluida nije neposredno uz pokretnu ploču.

3. (50 poena) Stoksov fluid stacionarno struji u oblasti između dva koaksijalna cilindra, poluprečnika a i b gde je $(a < b)$. Spoljašnji cilindar rotira ugaonom brzinom ω, a unutrašnji se kreće u pravcu zajedničke z-ose konstantnom brzinom V. Gustina fluida je ρ, koecijent viskoznosti η, a zapreminske sile se mogu zanemariti.

a) Pretpostavljajući da je brzina fluida oblika $\vec{v} = v_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + v_z(r)\vec{e}_z$, gde su (r, φ, z) cilindrične koordinate izabrane tako da se z-osa poklapa sa osom cilindara, kao i da pritisak zavisi samo od rastojanja od ose: $p = p(r)$, rešiti Stoksovu jednačinu, tj. naći v_φ i v_z.

b) Izračunati silu viskoznosti kojom fluid deluje na jedinicu dužine spoljašnjeg cilindra.

c) Izračunati moment viskoznih sila (u odnosu na neku tačku na osi cilindara) koji deluje na jediničnu dužinu unutrašnjeg cilindra.

Rešenje

1. Ugao između štapa i vertikalnog zida bazena može da se dobije na osnovu razmatranja momenata sile koji deluju na štap. Pošto na štap kada je uronjen u tečnost deluju tri sile (interakcija sa šarkom, sila teže i sila potiska), ako momente računamo u odnosu na šarku, imamo da je kretanja štapa određeno delovanjem dva momenta: sile teže i potiska. Obe ove sile deluju u vertikalnom pravcu u suprotnim smerovima, pa su im i momenti suprotni. Kada su ti momenti jednaki po inetnzitetu, štap miruje.

Krak sile teže je na polovini štapa $l/2$, pa je

$$M_g = mg\frac{l}{2}\sin\theta = \lambda l g\frac{l}{2}\sin\theta,$$

gde je θ ugao između štapa i vertikale.

Ako sa x označimo deo štapa koji nije uronjen u tečnost, kada je h dubina tečnosti, imamo da je $x = \frac{l-h}{\cos\theta}$. Krak sile potiska je na rastojanju $\frac{l+x}{2}$ od šarke pa je moment potiska

$$M_\mathrm{p} = \rho g(l-x)S\frac{l+x}{2}\sin\theta.$$

Uslov ravnoteže se svodi na $M_g = M_\mathrm{p}$, odnosno

$$\lambda \frac{l^2}{2} g \sin\theta = \rho g S \frac{l^2 - x^2}{2} \sin\theta.$$

Ako je $\theta \neq 0$ gornja jednakost se svodi na

$$x = l\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\rho S}},$$

odnosno, veza ugla i visine je

$$\cos\theta = \frac{1 - \frac{l}{h}}{\sqrt{1 - \frac{\lambda}{\rho S}}}.$$

Ova avisnost zaži za $h \in (0, l)$. Kada je $h = l$ imamo da je $\theta = \pi/2$. Kako se ulje dosipa u bazen, šta se više ne pomera. Dakle, imamo da je tražena zavisnost:

$$\theta(h) = \begin{cases} 0, & h = 0 \\ \arccos \frac{1-\frac{l}{h}}{\sqrt{1-\frac{\lambda}{\rho S}}}, & h \in (0, l) \\ \frac{\pi}{2}, & h > l \end{cases}$$

2. Navije-Stoksova (NS) jednačina glasi

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\nu}{\rho}\Delta\vec{v}.$$

Ako x-osu postavimo tako da je ona paralelna sa ravnima koje ograničavaju fluid, nalazi se u ravni koja je jednako udaljena od graničnih ravni i ima smer brzine gornje ploče, dok je y-osa normalna na granične ravni, onda na osnovu simetrije problema možeo pretpostaviti da je polje brzine oblika $\vec{v} = v(y)\vec{e}_x$. U tom slučaju x komponenta NS jednačine se svodi na:

$$0 = -\frac{K}{\rho} + \frac{\nu}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2},$$

iz čega se posle dve integracije dobija

$$v = \frac{K}{2\nu}y^2 + Ay + B.$$

Konstante A i B nalazimo na osnovu garaničnih uslova

$$\text{za } y = -a : v(-a) = 0 \quad \text{i za } y = a : v(a) = V,$$

tako da dobijamo

$$v = \frac{V}{2} - \frac{K}{\nu}a^2 + \frac{V}{2a}y + \frac{K}{2\nu}y^2.$$

Uslov da na gornjoj ploči nije maksimalna brzina znači da je $\left.\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}\right|_{y=a} < 0$, iz čega sledi traženi uslov

$$K < -\frac{V^2}{2a^2}.$$

3. Kretanje fluida opisano je NS jednačinom

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p + \frac{\nu}{\rho}\Delta\vec{v}.$$

a) Polazeći od pretpostavljenog oblika brzine fluida $\vec{v} = v_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + v_z(r)\vec{e}_z$, projekcije NS jednačine na $\vec{e}_\varphi$ i $\vec{e}_z$

$$\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rv_\varphi)\right) = 0, \quad \frac{\nu}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) = 0,$$

iz čega se dobija:

$$v_\varphi = K_1 r + \frac{K_2}{r}, \quad v_z = C_1 \ln r + C_2.$$

Konstante određujemo na osnovu graničnih uslova:

$$\text{za } r = a: \quad v_\varphi = 0 \text{ i } v_z = V;$$

$$\text{za } r = b: \quad v_\varphi = b\omega \text{ i } v_z = 0,$$

iz čega se dobija:

$$\vec{v} = \frac{b^2}{b^2 - a^2}\omega r\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\vec{e}_\varphi + V\frac{\ln\frac{r}{b}}{\ln\frac{a}{b}}\vec{e}_z.$$

b) Silu viskoznosti odredićemo na osnovu tenzora viskoznosti koji je jednak $\tilde{\mathcal{P}}' = 2\eta\tilde{\mathcal{S}}$ gde je $S_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Da bismo odredili tenzor viskoznosti, potrebno je da nađemo komponente brzine u Dekartovim koordinatama:

$$v_1 = \vec{v}\cdot\vec{e}_1 = -\sin\varphi v_\varphi, \quad v_2 = \vec{v}\cdot\vec{e}_2 = \cos\varphi v_\varphi, \quad v_3 = v_z.$$

Tako je npr.

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \cos\varphi\frac{\partial v_1}{\partial x_1} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{\partial v_1}{\partial \varphi}.$$

Pošto je

$$\frac{\partial v_1}{\partial r} = -\sin\varphi\left(K_1 - \frac{K_2}{r^2}\right),$$

i

$$\frac{\partial v_1}{\partial \varphi} = -\cos\varphi\left(K_1 r + \frac{K_2}{r}\right),$$

pa imamo da je

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -2\sin\varphi\cos\varphi\frac{K_2}{r^2}.$$

Na sličan način se nalaze i ostali članovi, pa je konačno

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} K_2\frac{\sin 2\varphi}{r^2} & -K_2\frac{\cos 2\varphi}{r^2} & \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\cos\varphi \\ -K_2\frac{\cos 2\varphi}{r^2} & K_2\frac{\sin 2\varphi}{r^2} & \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\cos\varphi & \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Pošto je ort normale na spoljašnji cilindar $\vec{n} = \vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$, imamo da je vektor viskoznog napona:

$$\vec{P}'_{\vec{e}_r}\Big|_{r=b} = 2\eta\begin{pmatrix} K_2\frac{\sin 2\varphi}{r^2} & -K_2\frac{\cos 2\varphi}{r^2} & \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\cos\varphi \\ -K_2\frac{\cos 2\varphi}{r^2} & K_2\frac{\sin 2\varphi}{r^2} & \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\cos\varphi & \frac{1}{2}\frac{C_1}{r}\sin\varphi & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{r=b}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = 2\eta\begin{pmatrix} -\frac{K_2}{b^2}\sin\varphi \\ \frac{K_2}{b^2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\frac{C_1}{b} \end{pmatrix}$$

Sila viskoznosti se dobija integracijom prethodnog izraza

$$\vec{F}' = \int_0^{2\pi}\int_0^1 b\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{P}'_{\vec{e}_r} = 2\pi\eta C_1\vec{e}_z = \frac{2\pi\eta V}{\ln\frac{b}{a}}\vec{e}_z.$$

c) Moment viskozne sile na delić spoljašnjeg cilindra jednak je

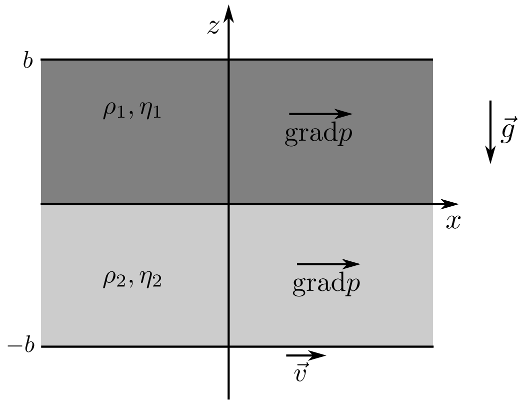
$$\mathrm{d}\vec{M}' = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F}' = (b\vec{e}_r + z\vec{e}_z) \times \left. \vec{P}'_{\vec{e}_r} \right|_{r=b} b\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z.$$

Nakon integracije se dobija:

$$\vec{M}' = 4\pi\eta \frac{a^2b^2}{b^2 - a^2}\vec{e}_z.$$

Drugi kolokvijum iz FIZIKE KONTINUUMA, 21. maj 2013.

Dva sloja različitih Stoksovih tečnosti, u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, stacionarno protiču između dve beskonačne horizontalne ploče, od kojih gornja miruje, a donja se kreće konstantnom brzinom $\vec{v} = v_0\vec{e}_x$ u svojoj ravni. Pretpostavljajući da se slojevi tečnosti ne mešaju, da je granična ravan između njih paralelna pločama, kao i da postoji konstantan gradijent pritiska u pravcu strujanja fluida $\mathrm{grad}p = K\vec{e}_x$, naći profil brzine.



Uzeti da su gustine i koeficijenti viskoznosti tečnosti: ρ_1 i η_1 za gornji sloj, ρ_2 i η_2 za donji sloj, kao i da su debljine slojeva jednake i iznose $b = \mathrm{const}$.

Rešenje

Na osnovu simetrije sistema možemo da zaključimo da je polje brzine oblika $\vec{v} = v(z)\vec{e}_x$, pa se Stoksova jednačina u oblastima $i = 1, 2$ svodi na

$$-\frac{K}{\nu_i} = -\frac{\mathrm{d}^2 v^{(i)}}{\mathrm{d}z^2},$$

odakle se dobija brzina u prvoj i drugoj oblasti

$$v^{(1)} = -\frac{K}{2\eta_1}z^2 + A_1 z + B_1, \quad v^{(2)} = -\frac{K}{2\eta_2}z^2 + A_2 z + B_2,$$

Četiri nepoznate konstante određujemo iz četiri granična uslova:

$$v^{(2)}(-a) = v_0, \quad v^{(2)}(0) = v^{(1)}(0), \quad v^{(1)}(a) = 0, \quad \tilde{\mathcal{P}}^{(2)}\Big|_{z=0}\vec{e}_z = -\,\tilde{\mathcal{P}}^{(1)}\Big|_{z=0}(-\vec{e}_z),$$

koji se svode na četiri jednačine, čijim se rešavanjem dobijaju vrednosti konstanti:

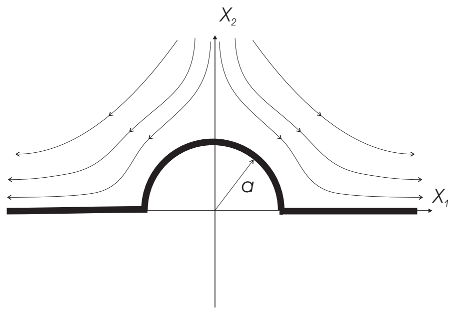
$$A_1 = \frac{Kb}{2\eta_1} - \frac{v_0}{b\left(1 - \frac{\eta_1}{\eta_2}\right)}, \quad A_1 = \frac{Kb}{2\eta_2} + \frac{v_0}{b\left(1 - \frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}, \quad B_1 = B_2 = \frac{v_0}{1 - \frac{\eta_1}{\eta_2}},$$

pa je konačno

$$v = \begin{cases} -\frac{K}{2\eta_2}z^2 + \left(\frac{Kb}{2\eta_2} + \frac{v_0}{b\left(1-\frac{\eta_2}{\eta_1}\right)}\right)z + \frac{v_0}{1-\frac{\eta_1}{\eta_2}}, & z \in (-b, 0) \\ -\frac{K}{2\eta_1}z^2 + \left(\frac{Kb}{2\eta_1} - \frac{v_0}{b\left(1-\frac{\eta_1}{\eta_2}\right)}\right)z + \frac{v_0}{1-\frac{\eta_1}{\eta_2}}, & z \in (0, b) \end{cases}$$

Treći domaći zadatak iz Fizike kontinuuma, 23. maj 2013.

1. (50 poena) Dvodimenzionalni mlaz nestišljivog idealnog fluida stacionarno iz beskonačnosti struji prema čvrstom nepokretnom zidu $x_2 = 0$, na kome je napravljena 'polucilindrična' izbočina poluprečnika a (vidi sliku).



(a) Smatrajući da je ovakvo kretanje potencijalno, pri čemu je potencijal oblika $\Phi = F(r)\cos 2\varphi$, rešavanjem Laplasove jednačine naći Φ. Ovde su r i φ polarne koordinate, a poznato je da je na jako velikim rastojanjima od zida potencijal oblika $A(x_1^2 - x_2^2)$, gde je A zadata konstanta.
(b) Naći kompleksni potencijal $W(z) = \Phi + i\psi$, gde je ψ strujna funkcija ($\vec{v} = \mathrm{rot}(\psi\vec{e}_3)$).
(c) Zanemarujući zapreminske sile i uzimajući da je pritisak u tački $(x_1 = 0, x_2 = a, x_3 = 0)$ jednak p_0, izračunati silu koja deluje na deo polucilindra između ravni $x_3 = 0$ i $x_3 = L$.
2. (30 poena) Na predavanjima je u lekciji *Difuzija vrtloga* pokazano da polje brzine koje u početnom trenutku ($t = 0$) u Stoksovom fluidu ima oblik

$$\vec{v}(\vec{r}, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_\varphi\,,$$

gde su r i φ polarne koordinate, u proizvoljnom trenutku t ima oblik:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}\left(1 - \mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\right)\vec{e}_\varphi\,,$$

gde je ν kinematički koeficijent viskoznosti fluida.
(a) Eksplicitnim računom pokazati da vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ zadovoljava uopštenu Helmholcovu jednačinu

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{f} + \nu\Delta\vec{\omega}\,.$$

Uzeti da je jedina zapreminska sila koja deluje na fluid gravitaciona sila.
(b) Pokazati da pritisak $p(r, z, t)$ može da se predstavi u obliku

$$p(r, z, t) = \frac{\rho\Gamma^2}{32\pi^2\nu t}F\left(\frac{r^2}{4\nu t}\right) + G(z)\,,$$

gde je ρ gustina fluida, a funkcija F ima oblik

$$F(\eta) = \int \frac{\mathrm{d}\eta}{\eta^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\eta}\right)^2\,.$$

Kakav oblik ima funkcija $G(z)$?
3. (20 poena) U idealnom fluidu uspostavljeno je polje brzine, koje u sfernim koordinatama (r, θ, φ) ima oblik

$$\vec{v} = \frac{F}{4\pi r^2}\vec{e}_r\,,$$

gde je F zadata konstanta. Pretpostavljajući da je temperatura funkcija samo rastojanja od koordinatnog početka, $T = T(r)$, da važi Furijeov zakon provođenja toplote $\vec{q} = -\kappa\,\mathrm{grad}T$, kao i da je gustina unutrašnje energije linearna funkcija temperature, $u = cT$, sastaviti diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava $T(r)$. Smatrati da su koeficijenti κ i c, kao i gustina fluida ρ, zadati.

Rešenja

1. (a) Zamenom pretpostavljenog oblika potencijala u Laplasovu jednačinu dobija se jednačina

$$\cos 2\varphi\left(\frac{1}{r}(F' + rF'') - \frac{4}{r^2}F\right) = 0\,, \tag{1}$$

koja, nakon deljenja sa $\cos 2\varphi$ i množenja sa r^2 dobija oblik jednačine

$$r^2F'' + rF' - 4F = 0\,, \tag{2}$$

čije rešenje se traži u obliku $F(r) = Cr^n$. Pošto je $F' = Cnr^{n-1}$ i $F'' = Cn(n-1)r^{n-2}$, iz poslednje jednačine sledi

$$Cr^n(n^2 - 4) = 0\,, \tag{3}$$

što je zadovoljeno za svako r jedino ako je izraz u zagradi jednak nuli, tj. ako je $n = \pm 2$. To znači da je

$$F(r) = C_1r^2 + C_2r^{-2}\,, \tag{4}$$

gde konstante C_1 i C_2 određujemo iz graničnog uslova na površini izbočine $r = a$, gde je normalna komponenta brzine jednaka nuli, i iz uslova u beskonačnosti, gde je $\Phi = A(x_1^2 - x_2^2) = Ar^2(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = Ar^2\cos 2\varphi$. Pošto je

$$\Phi = (C_1r^2 + C_2r^{-2})\cos 2\varphi\,, \tag{5}$$

i

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\Phi = 2(C_1r - C_2r^{-3})\cos 2\varphi\,\vec{e}_r - 2(C_1r + C_2r^{-3})\sin 2\varphi\,\vec{e}_\varphi\,, \tag{6}$$

za $r = a$ se dobija da je normalna komponenta brzine $v_r(r = a, \varphi) = 2(C_1a - C_2a^{-3})\cos 2\varphi = 0$, odakle je $C_1 = C_2/a^4$, a za $r \to \infty$ je $\Phi \sim C_1r^2\cos 2\varphi = Ar^2\cos 2\varphi$, pa je $C_1 = A$. To, konačno, znači da je potencijal jednak

$$\Phi = Ar^2\left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\,, \tag{7}$$

a brzina

$$\vec{v} = 2Ar\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi\vec{e}_r - 2Ar\left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi\vec{e}_\varphi\,. \tag{8}$$

(b) Strujnu funkciju nalazimo koristeći relacije

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,, \quad v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\,, \tag{9}$$

odnosno

$$2Ar\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,, \quad 2Ar\left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\,. \tag{10}$$

Iz pretposlednje jednačine sledi

$$\psi = 2Ar^2\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)\int\cos 2\varphi\,\mathrm{d}\varphi + f(r) = Ar^2\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi + f(r)\,, \tag{11}$$

a zamenom dobijenog izraza u drugu relaciju u (10) se dobija $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 0$, tj. $f =$const, pa je strujna funkcija jednaka

$$\psi = Ar^2\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi + \mathrm{const}\,. \tag{12}$$

Zamenom dobijenih Φ i ψ u izraz za kompleksni potencijal dobijamo:

$$W(z) = Ar^2\left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)\cos 2\varphi + iAr^2\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)\sin 2\varphi + \mathrm{const} = A\left(r^2\mathrm{e}^{2i\varphi} + \frac{a^4}{r^2}\mathrm{e}^{-2i\varphi}\right) + \mathrm{const}\,, \tag{13}$$

odnosno

$$W(z) = A\left(z^2 + \frac{a^4}{z^2}\right) + \text{const}\,. \tag{14}$$

(c) Strujanje je stacionarno, zapreminske sile se zanemaruju, a gustina fluida konstantna, pa važi Bernulijev integral, tj:

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + p = \text{const} = p_0\,, \tag{15}$$

gde smo konstantu odredili na osnovu vrednosti pritiska i brzine u tački $x_1 = 0$, $x_2 = a$, pa je

$$\begin{aligned} p &= p_0 - 2\rho A^2 r^2 \left(\left(1 - \frac{a^4}{r^4}\right)^2 \cos^2 2\varphi + \left(1 + \frac{a^4}{r^4}\right)^2 \sin^2 2\varphi\right) \\ &= p_0 - 2\rho A^2 r^2 \left(1 + \frac{a^8}{r^8} - 2\frac{a^4}{r^4}\cos 4\varphi\right)\,. \end{aligned} \tag{16}$$

Na površini polucilindra pritisak je onda jednak

$$p\,(r = a, \varphi) = p_0 - 4\rho A^2 a^2 (1 - \cos 4\varphi)\,, \tag{17}$$

a tražena sila je

$$\vec{F} = -\int_S p\,\mathrm{d}\vec{S} = -La\int_0^\pi p\,(r = a, \varphi)\,(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2)\,\mathrm{d}\varphi = \left(-2Lap_0 + 4\rho A^2 a^3 L\frac{32}{15}\right)\vec{e}_2\,. \tag{18}$$

2. (a) Iz datog izraza za brzinu direktnim računom se nalazi vektor vrtložnosti

$$\vec{\omega} = \frac{\Gamma}{2\pi}\frac{1}{4\nu t}\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\vec{e}_z\,, \tag{19}$$

a zatim i

$$\Delta\vec{\omega} = -\text{rot}\,\text{rot}\vec{\omega} = -\frac{\Gamma}{8\pi\nu^2 t^2}\left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\vec{e}_z\,. \tag{20}$$

Takođe je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{\omega} = \frac{\partial\vec{\omega}}{\partial t} = -\frac{\Gamma}{8\pi\nu t^2}\left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\vec{e}_z\,, \quad \text{rot}\vec{g} = 0\,, \quad (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} = 0\,, \tag{21}$$

pa se zamenom svih nađenih izraza u uopštenu Helmholcovu jednačinu zaista dobija identitet.
(b) Zamenom datog izraza za brzinu u Stoksovu jednačinu i njenim projektovanjem na pravac $\vec{e}_r$ dobija se jednačina

$$\frac{v^2}{r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\,, \tag{22}$$

odakle je

$$p = \rho\int\frac{v^2}{r}\,\mathrm{d}r + G(z)\,. \tag{23}$$

Uvođenjem smene $\eta = r^2/(4\nu t)$ u integral u poslednjoj jednačini direktno se dobijaju izrazi dati u postavci zadatka.

Projektovanjem Stoksove jednačine na z-osu dobija se jednačina

$$-\rho g = \frac{\partial G}{\partial z}\,, \tag{24}$$

odakle je

$$G(z) = -\rho g z\,.$$

3. Ubacivanjem $\vec{v}$ u izraz za divergenciju u sfernim koordinatama lako se proverava da je $\text{div}\vec{v} = 0$, pa se diferencijalna jednačina koju zadovoljava gustina unutrašnje energije, pošto je fluid idealan, svodi na

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\text{div}\vec{q}. \tag{25}$$

Takođe, iz Furijeovog zakona sledi da je $\mathrm{div}\vec{q} = -\kappa\Delta T$, a iz izraza za gustinu unutrašnje energije i pretpostavke da temperatura zavisi samo od r se dobija

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = c\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = c\vec{v}\cdot\mathrm{grad}T = \frac{cF}{4\pi r^2}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,, \tag{26}$$

dok iz opšteg izraza za laplasijan skalarne funkcije u sfernim koordinatama sledi

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right)\,. \tag{27}$$

Zamenom svih nađenih izraza u jednačinu (25) dobija se diferencijalna jednačina koju zadovoljava temperatura:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right) - \frac{\rho cF}{4\pi\kappa}\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = 0\,. \tag{28}$$

Prvi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 8. mart 2012.

1. (20 poena) Fluid stacionarno protiče u dvodimenzionalnoj oblasti, beskonačnoj traci širine π: $-\infty < x_1 < \infty$ i $-\pi/2 < x_2 < \pi/2$. Polje brzine fluida je

$$v_1 = 1 + x_1 \sin x_2, \qquad v_2 = \cos x_2, \qquad v_3 = 0.$$

a) Naći jednačine strujnih linija.

b) Odrediti tačke stagnacija (mesta gde je brzina fluida $\vec{v} = 0$).

c) Napisati jednačine strujnih linija u blizini tačaka stagnacije i na osnovu toga odrediti pod kojim uglom strujne linije teže ka granicama $y = \pm\pi/2$ u tačkama stagnacije.

2. (25 poena) U jednom zadatku, asistent je napisao da nestišljivi fluid ima brzinu koja je zadata u polarnim koordinatama. Dao je jednu komponentu brzine

$$v_r = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\varphi,$$

a drugu je zaboravio da zada. Ipak, studenti su na osnovu informacije da na x-osi nema brzine u pravcu y-ose uspeli da odrede funkciju toka i tenzor brzine deformacije. Koje rezultate su dobili?

3. (20 poena) Polje brzine u fluidu je $v_1 = \alpha x_1$ i $v_2 = -\alpha x_2$, gde je α konstanta. U početnom trenutku deo fluida na kružnici $x_1^2 + x_2^2 = a^2$ je obojen.

a) Naći jednačinu obojenog dela fluida u proizvoljnom trenutku vremena.

b) Kolika je površina površi koja je obuhvaćena bojom i kako se ona menja u vremenu?

c) Odrediti i cirkulaciju brzine po kružnici koja je u početnom trenutku bila obojena (ova kružnica se ne menja vremenom).

4. (25 poena) Polje brzine i polje gustine unutar fluida u nekom trenutku su zadati sa:

$$\vec{v} = 2x_1^2 x_3 \vec{e}_1 + 4x_1^2 x_2^2 \vec{e}_2 - x_3^2 \vec{e}_3, \qquad \rho = \begin{cases} \rho_0, & x_1 < 0 \\ (1+\sqrt{x_1})\rho_0, & 0 < x_1 < \frac{1}{4} \\ \frac{3}{2}\rho_0, & x_1 > \frac{1}{4} \end{cases}.$$

Odrediti kako se u tom trenutku menja masa fluida unutar kocke stranice 1 čije se stranice poklapaju sa osama koordinatnog sistema i uzimaju vrednosti od 0 do 1.

5. (10 poena) U kanalu teče fluid brzinom

$$v_1 = Ax_2(1 - x_2), \qquad v_2 = 0, \qquad v_3 = 0,$$

gde je $x_2 \in (0,1)$. Odrediti vektor vrtložnosti. Na osnovu dobijenog vektora vrtložnosti odgovorite kako će da se vrti travka koja se postavi na površinu fluida duž pravca određenog ortom $\vec{e}_1$ na sredini kanala ($x_2 = 1/2$) ili na nekom od krajeva $x_2 = 0$ i $x_2 = a$.

Rešenje

1. Polje brzine je zadato sa $\vec{v} = (1 + x_1 \sin x_2, \cos x_2, v_3 = 0)$ za $-\frac{\pi}{2} < x_2 < \frac{\pi}{2}$

a) Jednačine strujnih linija se dobijaju iz

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{1 + x_1 \sin x_2} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\cos x_2} = \frac{\mathrm{d}x_3}{0}.$$

Iz poslednje jednačina sledi da je $x_3 = \text{const}$. Ostatak produžene jednakosti može da se napiže u obliku

$$\cos x_2 \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_2} - x_1 \sin x_2 = 1 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_2}(x_1 \cos x_2) \Rightarrow x_1 \cos x_2 = x_2 + C,$$

gde je C konstanta.

b) U tačkama stagnacije brzina je nula $\vec{v} = (0, 0, 0)$. To može da bude kada je $\cos x_2 = 0$ što daje da je $x_2 = \pm\pi/2$. Druga komponenta postaje nula za $1 + x_1 \sin x_2 = 0 \Rightarrow 1 \pm x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \mp 1$. Dakle, imamo samo dve tačke stagnacije $(1, -\pi/2, 0)$ i $(-1, \pi/2, 0)$

c) Razmotrimo tačku stagnacije $(1, -\pi/2, 0)$. Strujna linija kroz tu tačku je

$$x_1 \cos x_2 = x_2 + \frac{\pi}{2}.$$

Ako uvedemo pomeranja od tačke stagnacije kao $x_1 = 1 + \xi_1$ i $x_2 = -\frac{\pi}{2} + \xi_2$, dobijamo da je

$$\xi_1 = \frac{\xi_2}{\sin \xi_2} - 1.$$

Razvojem u red sinusne funkcije dobija se $\sin \xi_2 = \xi_2 - \frac{1}{6}\xi_2^3$, pa je

$$\xi_1 = \frac{\xi_2^2}{6 - \xi_2^2}.$$

Ugao pod kojim strujna linija ulazi u tačku stagnacije dobija se ako izračunamo izvod

$$\left.\frac{\mathrm{d}\xi_1}{\mathrm{d}\xi_2}\right|_{\xi_2=0} = \left.\frac{12\xi_1}{(6 - \xi_2^2)^2}\right|_{\xi_2=0} = 0 \Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}\xi_2}{\mathrm{d}\xi_1}\right|_{\xi_1=0} = \infty.$$

Dakle, ugao pod kojim strujna funkcija teži ka tački stagnacije je $\pi/2$. Isti rezultat se dobija i za drugu tačku stagnacije.

2. Pošto je fluid nestišljiv, važi da je $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, što znači da je

$$\frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0$$

pa je

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = -\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\varphi \Rightarrow v_\varphi = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\varphi + C.$$

Konstantu C studenti mogu da odrede na osnovu uslova da na x-osi nema brzine u pravcu y-ose, što prevedeno u cilindrične koordinate znači da je

$$v_\varphi(\varphi = 0) = 0 \Rightarrow C = 0.$$

Strujna funkcija se određuje iz

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = U\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\varphi, \qquad v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\varphi,$$

iz čega se dobija da je

$$\psi = U\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\varphi.$$

Ostatak zadatka možete videti u rešenju 5. zadatka, 1. domaćeg iz 2008. godine (fajl na disku `08FKdz1R.pdf`). Ovde ćemo samo navesti rešenje za matricu brzine deformacije:

$$\mathcal{S} = \frac{2Ua^2}{(x_1^2+x_2^2)^3}\begin{pmatrix} x_1^3-3x_1x_2^2 & 3x_1^2x_2-x_2^3 & 0 \\ 3x_1^2x_2-x_2^3 & -x_1^3+3x_1x_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Razmotrimo zadato polje brzine $\vec{v} = (\alpha x_1, -\alpha x_2, 0)$.

a) Da bismo dobili kako se menja obojeni krug potrebno je da rešimo jednačine kretanja

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \alpha x_1, \quad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -\alpha x_2, \quad \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = 0.$$

Iz poslednje jednačine se dobija da je kretanje dvodimenzionalno (u ravni $x_3 = \mathrm{const.}$) a u njoj se delići kreću po zakonu:

$$x_1 = x_{10}\mathrm{e}^{\alpha t}, \quad x_2 = x_{20}\mathrm{e}^{-\alpha t}.$$

U početnom trenutku, delići se nalaze na krugu, pa je $x_{10}^2 + x_{20}^2 = a^2$. Pošto je $x_{10} = x_1\mathrm{e}^{-\alpha t}$ i $x_{20} = x_2\mathrm{e}^{\alpha t}$ u kasnije trenutku, obojeni deliızadovoljavaju jednačinu

$$x_1^2\mathrm{e}^{-2\alpha t} + x_2^2\mathrm{e}^{2\alpha t} = a^2,$$

što je jednačina elipse

$$\frac{x_1^2}{a^2\mathrm{e}^{2\alpha t}} + \frac{x_2^2}{a^2\mathrm{e}^{-2\alpha t}} = 1,$$

sa poluosama $a\mathrm{e}^{\alpha t}$ i $a\mathrm{e}^{-\alpha t}$.

b) Površ oivičena obojenim delom je elipsa, čije su poluose određene u prethodnom delu zadatka. Površina dobijene elipse je

$$S = \pi a\mathrm{e}^{\alpha t}a\mathrm{e}^{-\alpha t} = \pi a^2,$$

što je jednako površini kruga koji je oivičavao površ u početnom trenutku. Ovo je posledica jednačine kontinuiteta, jer su unutar obojenog dela uvek isti delići pa je i njihova masa nepromenljiva.

c) Cirkulacija polja brzine je jednaka

$$\oint \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

i najlakše se može izračunati u polarnim koordinatama, gde je polje brzine:

$$\vec{v} = \alpha r\cos\varphi \vec{e}_x - \alpha r \sin\varphi \vec{e}_y.$$

Pošto je $\vec{l} = a\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$ dobijamo da je

$$\oint \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \alpha a^2\int_0^{2\pi}(\cos\varphi\vec{e}_x - \sin\varphi\vec{e}_y)\vec{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi = \alpha a^2\int_0^{2\pi}(-\sin\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi = 0.$$

4. Promena mase u jedinici vremena jednaka je protoku kroz granicu kocke. Stoga je

$$\begin{aligned} Q &= \iint_S \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \\ &= \iint_{x_1=0}\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{x_2=0}\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{x_3=0}\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \\ &\quad \iint_{x_1=1}\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{x_2=1}\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} + \iint_{x_3=1}\rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S}. \end{aligned}$$

Prva tri integrala su jednaka nuli, po v sto je podintegralna funkcija nula. Ostale integrale treba pažljivo izračunati, pri čemu treba voditi računa o tome da pri integraciji po x_1 menja funkcionalna zavisnost od ρ pa je integral od 0 do 1 potrebno videti kao dva integrala $\int_0^{1/4}$ i od $\int_{1/4}^1$. Kada se sve izračna, na kraju se dovija da je

$$\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = Q = \frac{457}{224}\rho_0.$$

5. Vektor vrtložnosi je

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ Ax_2(1-x_2) & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}A(1-2x_2)\vec{e}_3.$$

U sredini kanala, vektor vrtložnosti ima vrednost $\vec{\omega}(x_2 = 1/2) = 0$, što znači da nema rotacije travke. Ona će se kretati samo translaciono i nće menjati svoje usmerenje. Uz kraj $x_2 = 0$ vektor vrtložnosi je $\vec{\omega}(x_2 = 0) = -\frac{1}{2}A\vec{e}_3$ što znači da se fluid i travka vrte u smeru kazaljke na satu. Uz zid $x_2 = 1$ vektor vrtložnosi je $\vec{\omega}(x_2 = 1) = \frac{1}{2}A\vec{e}_3$ tako da travka rotira u pozitivnom matematičkom smeru, odnosno suprotno od kaz;u0o[;p;́./aljke na satu.

PRVI KOLOKVIJUM IZ FIZIKE KONTINUUMA
5. APRIL 2012.

Polje brzine pri strujanju fluida dato je u Dekartovim koordinatama:

$$v_1 = -\beta \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_2 = 2\alpha x_1 + \beta \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}, \quad v_3 = 0.$$

Ovde su α i β poznate konstante.

1. (12 poena) Pokazati da je fluid nestišljiv.
2. (14 poena) Naći strujnu funkciju $\psi(x_1, x_2)$.
3. (12 poena) Odrediti vektor vrtložnosi $\vec{\omega}$.
4. (8 poena) Napisati strujnu funkciju u cilindričnim koordinatama $\psi(r, \varphi)$.
5. (12 poena) Koristeći $\psi(r, \varphi)$ izraziti polje brzine u cilindričnim koordinatama $\vec{v}(r, \varphi)$.
6. (18 poena) Naći tenzor brzine deformacije.
7. (12 poena) Izračunati zapreminski protok kroz kvadrat koji leži u $x_1 = 1$ ravni i ima temena $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 1)$, $(1, 0)$. Ovaj kvadrat je deo kocke čije se jedno teme nalazi u koordinatnom početku.
8. (12 poena) Odrediti cirkulaciju brzine po stranicama kvadrata definisanog u prethodnom delu zadatka.

Rešenje

1. Da bismo proverili da li je fluid nestišljiv treba da vidimo da li je $\text{div}\vec{v} = 0$. Pošto je u Dekartovim koordinatama $\text{div}\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$, treba da odredimo parcijalne izvode

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \beta \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= -\beta \frac{2x_1 x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_3} &= 0, \end{aligned}$$

tako da je

$$\text{div}\vec{v} = 0.$$

2. Strujna funkcija $\psi(x_1, x_2)$ zadovoljava

$$v_1 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_2} \quad \text{i} \quad v_2 = \frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

Stoga imamo:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \beta \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = 2\alpha x_1 + \beta \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Iz prve jednačine dobijamo da je

$$\psi = \frac{\beta}{2} \ln(x_1^2 + x_2^2) + f(x_1),$$

gde je $f(x_1)$ nova funkcija samo od x_1 za koju na osnovu druge jednačine sledi da zadovoljava

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_1} = 2\alpha x_1,$$

tako da je $f(x_1) = \alpha x_1^2 + C$. Prema tome, tražena strujna funkcija je jednaka

$$\psi(x_1, x_2) = \alpha x_1^2 + \frac{\beta}{2}\ln(x_1^2 + x_2^2).$$

3. Vektor vrtložnosti nalazimo na osnovu polja brzine $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$ pa je

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ -\beta\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2} & 2\alpha x_1 + \beta\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} & 0 \end{vmatrix} = \alpha\vec{e}_3.$$

4. Pošto je veza između Dekartovih i cilindričnih koordinata $x_1 = r\cos\varphi$ i $x_2 = r\sin\varphi$ imamo da je

$$\psi(r, \varphi) = \alpha r^2\cos^2\varphi + \beta\ln r.$$

5. Komponente brzine u cilindričnim koordinatama su

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \quad \mathrm{i} \quad v_\varphi = \frac{\partial\psi}{\partial r},$$

iz čega neposredno sledi

$$v_r = 2\alpha r\sin\varphi\cos\varphi, \quad v_\varphi = 2\alpha r\cos^2\varphi + \frac{\beta}{r}.$$

6. Tenzor brzine deformacije ima matrične elemente $\mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$. Neke parcijalne izvode brzine po Dekartovim koordinatama smo već odredili, vidimo da pošto brzina ne zavisi od koordinate x_3, a i komponenta $v_3 = 0$, komponente $\mathcal{S}_{i3} = 0$ gde je $i = 1, 2, 3$. Stoga treba još naći samo

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= -\beta\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= 2\alpha - \beta\frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2}, \end{aligned}$$

tako da konačno imamo da je tenzor brzine deformacije:

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \beta\frac{2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & \alpha - \beta\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & 0 \\ \alpha - \beta\frac{x_1^2-x_2^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & -\beta\frac{2x_1x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Zapreminski protok je jednak:

$$\iint_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1\int_0^1 \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\frac{-\beta x_2}{1 + x_2^2} = -\frac{\beta}{2}\ln 2.$$

8. Tražena cirkulacija po stranicama kvadrata jednaka je:

$$\Gamma = \oint\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_0^1\left(2\alpha + \frac{\beta}{1 + x_2^2}\right)\mathrm{d}x_2 + 0 + \int_0^1\left(2\alpha + \frac{\beta}{1 + x_2^2}\right)(-\mathrm{d}x_2) + 0 = 0.$$

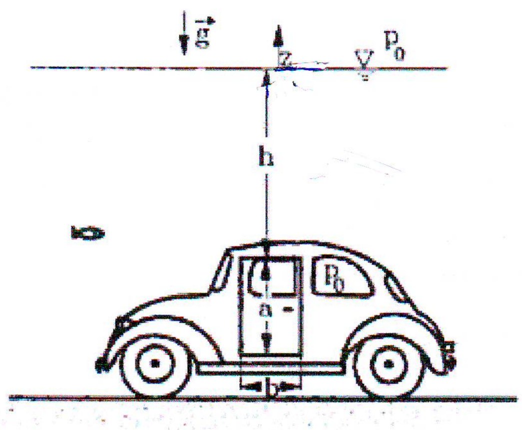
Drugi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 10. april 2012.

1. (20 poena) U nekoj sredini tenzor napona reprezentovan je matricom

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x_1^2 x_2 & (1-x_2^2)x_1 & 0 \\ (1-x_2^2)x_1 & \frac{1}{3}(x_2^3 - 3x_2) & 0 \\ 0 & 0 & 2x_3^2 \end{pmatrix},$$

u odgovarajućim jedinicama. **(a)** Kolika treba da bude masena gustina zapreminskih sila da bi delići ove sredine mirovali? **(b)** Kako treba da bude orijentisana elementarna površina koja sadrži tačku $(a, 0, 2\sqrt{a})$ da bi vektor napona u toj tački imao samo normalnu komponentu? Koje su moguće vrednosti vektora napona u tom slučaju?

2. (10 poena) Kola na slici su upravo potonula na dno kanala ispunjenog vodom, tako da može da se smatra da je pritisak u njima jednak atmosferskom p_0. Oblik vrata može da se aproksimira pravougaonikom, visine b i širine a. Debljina sloja vode iznad gornje ivice vrata je h. **(a)** Izračunati kolika sila F je potrebna za otvaranje vrata. Pretpostaviti da sila deluje normalno na površinu vrata, na rastojanju $3b/4$ od ose oko koje se vrata okreću pri otvaranju. **(b)** Do koje visine treba pustiti da se nivo vode u kolima popne da bi putnik koji može da razvije mišićnu silu F_M mogao da otvori vrata? Uzeti da je $h = 5$cm, $a = 95$cm, $b = 60$cm, gustina vode $\rho = 10^3$kg/m^3, $g = 9.81$m/s^2, F_M =500N.

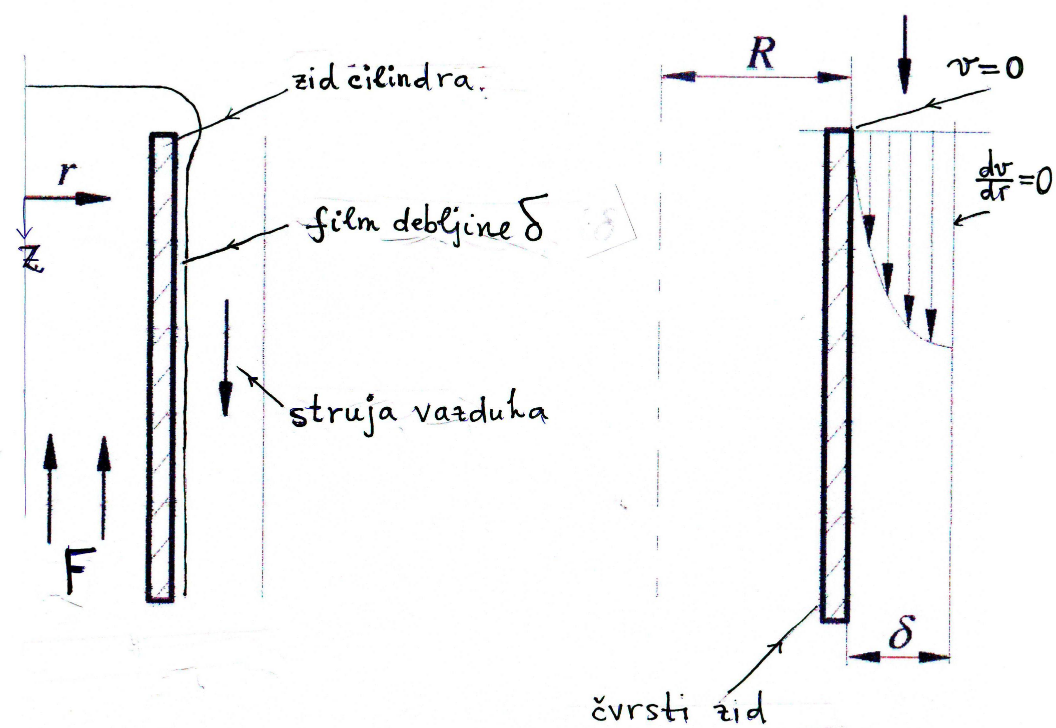


3. (25 poena) Uređaj za merenje viskoznosti sastoji se od dva koaksijalna cilindra, poluprečnika a =3.8cm i b =4cm i visine H =12cm. Spoljašnji cilindar je fiksiran, a unutrašnji može da rotira. **(a)** Izračunati koeficijent viskoznosti η Stoksove tečnosti, koja se nalazi između cilindara, ako je izmereno da je moment sile koji deluje na unutrašnji cilindar jednak $K = 0.046$Nm, pri rotaciji tog cilindra ugaonom brzinom ω=120 obrtaja u minuti. Zanemariti efekte krajeva i smatrati da je strujanje tečnosti u uređaju laminarno i stacionarno. Prilikom nalaženja izraza za viskoznu silu iskoristiti izraz za tenzor brzine deformacije u cilindričnim koordinatama

$$\mathcal{S} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial(v_\varphi/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{2}\left(r\frac{\partial(v_\varphi/r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix}$$

(b) Proceniti kolika greška se čini prilikom merenja η na ovakav način, ako se pretpostavi da se brzina delića unutar tečnosti linearno menja sa rastojanjem od ose viskozimetra.

4. (25 poena) U industriji se za spoljašnje pokrivanje cilindričnih cevi tankim filmovima koristi sledeća tehnika: kroz cev koja je postavljena vertikalno se pod pritiskom upumpava viskozna (Stoksova) tečnost, koja se preliva preko gornjeg kraja cevi i na taj način obrazuje tanak sloj koji se spušta niz cev po celoj njenoj spoljašnoj površini. Pod određenim uslovima postiže se da je kretanje u sloju koji se spušta niz cev stacionarno, laminarno i simetrično, tj. debljina sloja je svuda ista, a brzina unutar sloja ima oblik $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$, gde je r rastojanje od ose cevi, a z osa se poklapa sa osom cevi i orijentisana je vertikalno naniže, tako da je $\vec{g} = g\vec{e}_z$. **(a)** Smatrajući da na granici između spojašnjeg sloja fluida i atmosfere vektor napona ima samo normalnu komponentu, pokazati da granični uslov za brzinu ima oblik $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0$. **(b)** Ako je poluprečnik cevi R, debljina spoljašnjeg sloja fluida δ, a zapreminski protok kroz cev F, naći izraz za $v(r)$.



5. (20 poena) Napisati Navije-Stoksovu jednačinu u sfernim koordinatama. Pretpostaviti da je jedina zapreminska sila gravitacija i da se x_3-osa prvobitno izabranog Dekartovog koordinatnog sistema poklapa sa vertikalom, tako da je $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. Polja brzine i pritiska imaju najopštije oblike:

$$\vec{v} = \vec{v}(r,\theta,\varphi,t) = v_r(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_r + v_\theta(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_\theta + v_\varphi(r,\theta,\varphi,t)\vec{e}_\varphi\,, \quad p = p(r,\theta,\varphi,t)\,.$$

Rešenja

1.(a) Iz osnovne jednačine dinamike u slučaju kada delići miruju ($\mathrm{d}\vec{v}/\mathrm{d}t = 0$) sledi

$$\vec{f} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\tilde{\mathcal{P}} = -\frac{4}{\rho}x_3\vec{e}_3\,.$$

(b) Ako $\vec{P}_{\vec{n}}$ ima samo normalnu komponentu, onda on ima oblik $\vec{P}_{\vec{n}} = \lambda\vec{n}$, gde je λ neki skalar. Pošto je $\vec{P}_{\vec{n}} = \mathcal{P}\vec{n}$, prethodni uslov može da se napiše kao

$$\mathcal{P}\vec{n} = \lambda\vec{n}\,,$$

što znači da ort normale $\vec{n}$ na elementarnu površinu treba da bude ort svojstvenog pravca tenzora $\mathcal{P}$ u tački $(a, 0, 2\sqrt{a})$. Drugim rečima, treba rešavati svojstveni problem matrice

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8a \end{pmatrix},$$

kojom je reprezentovan tenzor napona u zadatoj tački. Svojstvene vrednosti λ nalaze se rešavanjem karakteristične jednačine

$$\begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ a & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 8a-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2(8a-\lambda) - a^2(8a-\lambda) = 0 \quad\Leftrightarrow\quad (\lambda^2 - a^2)(8a-\lambda) = 0\,,$$

odakle su svojstvene vrednosti $\lambda = \pm a$, $8a$.

Pošto je

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \mathcal{P}\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \\ 8n_3 \end{pmatrix},$$

za svojstvenu vrednost $\lambda = a$, komponente odgovarajućeg svojstvenog orta zadovoljavaju jednačinu

$$a\begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \\ 8n_3 \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},$$

odakle je $n_3 = 0$, $n_1 = n_2$, pa iz uslova normiranosti $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$, sledi da je traženi svojstveni ort $\vec{n} = \pm(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$. Vektor napona je u tom slučaju jednak $\vec{P}_{\vec{n}} = a\vec{n} = \pm a(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$.

Slično, za $\lambda = -a$ dobija se

$$a\begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \\ 8n_3 \end{pmatrix} = -a\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow \vec{P}_{\vec{n}} = \pm a(\vec{e}_1 - \vec{e}_2)/\sqrt{2}\,,$$

a za $\lambda = 8a$:

$$a\begin{pmatrix} n_2 \\ n_1 \\ 8n_3 \end{pmatrix} = 8a\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad \vec{P}_{\vec{n}} = \pm 8a\vec{e}_3\,.$$

2. (a) Orijentišimo z-osu kao na slici, tako da se poklapa sa osovinom oko koje vrata mogu da se okreću, a osu x u horizontalnom pravcu, tako da zatvorena vrata leže u ravni Ozx, u oblasti $0 \le x \le b$, $0 \le z \le a$ (koordinatni početak je u donjem levom ćošku vrata). Pritisak $p(z)$ u vodi onda ima oblik

$$p(z) = p_0 + \rho g(h + a - z)\,.$$

U tački na vratima određenoj koordinatama (x, z) vektor napona koji potiče od vode jednak je $p(z)\vec{e}_y$, a vektor napona koji potiče od vazduha iz unutrašnjosti kola je $-p_0\vec{e}_y$ (osa y usmerena je od vrata prema unutrašnjosti kola), pa je ukupni vektor napona u toj tački $(p(z) - p_0)\vec{e}_y = \rho g(h + a - z)\vec{e}_y$. Površinska sila koja deluje na elementarnu površinu $\mathrm{d}x\mathrm{d}z$ u toj tački je onda $\rho g(h + a - z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y$, a njen moment

$$\mathrm{d}\vec{K} = \vec{r} \times \rho g(h+a-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\vec{e}_y = \rho g(h+a-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z(x\vec{e}_x + z\vec{e}_z) \times \vec{e}_y = \rho g(h+a-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z(x\vec{e}_z - z\vec{e}_x)\,.$$

Ukupni moment površinskih sila dobija se integraljenjem prethodnog izraza po celoj površini vrata:

$$\vec{K} = \int_0^b \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}z\, \rho g(h + a - z)(x\vec{e}_z - z\vec{e}_x)\,,$$

odakle je

$$K_z = \int_0^b \mathrm{d}x \int_0^a \mathrm{d}z\, \rho g(h + a - z)x = \rho g \int_0^b x\mathrm{d}x \int_0^a (h + a - z)\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\rho g b^2 a \left(h + \frac{a}{2}\right)\,.$$

S druge strane, z-komponenta momenta sile kojom čovek deluje na vrata jednaka je

$$K_z^c = -\frac{3}{4}bF\,.$$

Da bi se vrata pokrenula, potrebno je da je z komponenta ukupnog momenta sila koji deluje na vrata barem malo manja od nule (sa ovakvo izabranom orijentacijom osa koordinatnog sistema), pa se minimalna sila F dobija is uslova

$$K_z^c + K_z = 0 \quad \Rightarrow F = \frac{1}{3}\rho g b a(2h + a) = 1957N\,.$$

(b) Pritisak vode u kolima jednak je $p_u(z) = p_0 + \rho g H - \rho g z$, gde je H visina vode u kolima. Vektor napona koji deluje na vrata u delu $0 \le z \le H$ jednak je $[p(z) - p_u(z)]\vec{e}_y = \rho g(h + a - H)\vec{e}_y$, gde je $p(z)$ pritisak u vodi van automobila na visini z. Odatle je z komponenta ukupnog momenta površinskih sila koje deluju na vrata u ovom slučaju jednaka

$$K_z = \int_0^b \mathrm{d}x \int_H^a \mathrm{d}z\, \rho g(h + a - z)x + \int_0^b \mathrm{d}x \int_0^H \mathrm{d}z\, \rho g(h + a - H)x = \frac{1}{4}\rho g b^2(a^2 + 2ah - H^2)\,,$$

što treba da bude jednako ili manje od $\frac{3}{4}bF_M$, odakle je

$$H = \sqrt{a^2 + 2ah - \frac{3F_M}{\rho g b}} = 86cm\,.$$

3. (a) Ovde se, u stvari, radi o specijalnom slučaju Kuetovog strujanja, pa je (kako je pokazano na predavanjima) brzina u fluidu oblika

$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi = \left(\frac{A}{r} + Br\right)\vec{e}_\varphi\,,$$

gde se z osa poklapa sa osom cilindra, a konstante A i B određuju iz graničnih uslova $v(r = a) = \omega a$, $(v(r = b) = 0$, odakle se dobija

$$A = \frac{\omega a^2 b^2}{b^2 - a^2}\,, \quad B = -\frac{\omega a^2}{b^2 - a^2}\,.$$

Zamenom dobijenog izraza za brzinu u dati oblik tenzora brzine deformacije u cilindričnim koordinatama dobija se

$$\mathcal{S} = -\frac{A}{r^2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je viskozna sila $\mathrm{d}\vec{F}$ koja deluje na element površine $\mathrm{d}S = a\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z$ unutrašnjeg cilindra jednaka

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\vec{F} &= \mathcal{P}'\vec{e}_r\,\mathrm{d}S = 2\eta\,\mathcal{S}\big|_{r=a}\,\vec{e}_r a\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z = -2\frac{\eta A}{a^2}\,a\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= -2\frac{\eta A}{a}\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -2\frac{\eta A}{a}\vec{e}_\varphi\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Moment te sile je

$$\mathrm{d}\vec{K} = (a\vec{e}_r + z\vec{e}_z)\times\mathrm{d}\vec{F} = -2\eta A\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{e}_r\times\vec{e}_\varphi - 2\frac{z}{a}\eta A\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{e}_r\times\vec{e}_z = -2\eta A\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{e}_z + 2\frac{z}{a}\eta A\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z\vec{e}_\varphi\,,$$

pa je ukupni moment kojim viskozna sila fluida deluje na unutrašnji cilindar jednaka

$$\vec{K} = -2\eta A\vec{e}_z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^H\mathrm{d}z + \frac{2\eta A}{a}\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^H z\mathrm{d}z = -4\pi\eta AH\vec{e}_z\,,$$

pošto je

$$\int_0^{2\pi}\vec{e}_\varphi\mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi}(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)\mathrm{d}\varphi = 0\,.$$

Konačno onda sledi:

$$K = 4\pi\eta AH \quad\Rightarrow\quad \eta = \frac{K}{4\pi AH} = \frac{K(b^2-a^2)}{4\pi H\omega a^2b^2} = 0.1639Ns/m^2\,.$$

(b) Ako se pretpostavi da brzina zavisi linearno od r:

$$\vec{v} = (Cr + D)\vec{e}_\varphi\,,$$

uz iste granične uslove kao pod (a), dobija se

$$C = \frac{\omega a}{a-b}\,,\quad D = \frac{\omega ab}{b-a}\,.$$

Dalje se na isti način kao pod (a) dobija da je $K = 2\pi aHD\eta$, odnosno

$$\eta = \frac{K(b-a)}{2\pi H\omega a^2 b} = 0.1681Ns/m^2\,,$$

pa je apsolutna greška koja bi se napravila pri ovakvom merenju, ako bi se profil brzine smatrao linearnim, jednaka 0.005 Ns/m^2, a relativna 3%.

Napomena: Iz tačnog izraza za η dobijenog pod (a) vidi se da ako je $b - a \ll b$ može da se napravi sledeća aproksimacija

$$\eta = \frac{K(b^2 - a^2)}{4\pi H\omega a^2 b^2} = \frac{K}{4\pi H\omega}\frac{(b-a)(b+a)}{a^2 b^2} \approx \frac{K}{4\pi H\omega}\frac{(b-a)(b+b)}{a^2 b^2} \approx \frac{K}{2\pi H\omega}\frac{(b-a)}{a^2 b},$$

tj. što je sloj između cilindara tanji, to je greška koja se pravi usled pretpostavke da je profil brzine linearan manja.

4. (a) Pošto brzina ima oblik $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$, tenzor brzine deformacije (u Dekartovim koordinatama) ima oblik

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & 0 \end{pmatrix},$$

a, pošto je

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x}, \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2} = \cos\varphi \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = \cos\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}$$

i, slično:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r},$$

sledi

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix}.$$

Tenzor napona onda ima oblik

$$\mathcal{P} = -p\mathcal{I} + 2\eta\mathcal{S} = \begin{pmatrix} -p & 0 & \eta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \\ 0 & -p & \eta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \\ \eta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} & \eta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} & -p \end{pmatrix}$$

pa je vektor napona kojim fluid deluje na graničnu površinu fluid-atmosfera jednak

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \mathcal{P}(-\vec{e}_r) = -\begin{pmatrix} -p & 0 & \eta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \\ 0 & -p & \eta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \\ \eta\cos\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} & \eta\sin\varphi\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} & -p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p\cos\varphi \\ p\sin\varphi \\ -\eta\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} \end{pmatrix}.$$

Pošto vektor napona na ovoj granici treba da ima samo normalnu komponentu, sledi da z-komponenta dobijenog vektora treba da bude jednala nuli, tj. zaista treba da važi $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} = 0$, za $r = R + \delta$.

(b) Projektovanjem Stoksove jednačine na pravce ortova $\vec{e}_r$ i $\vec{e}_\varphi$ dobijaju se jednačine iz kojih se zaključuje da pritisak zavisi samo od z koordinate, a projektovanjem na z-osu se onda dobija diferencijalna jednačina

$$-g\rho + \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = \eta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right).$$

Izraz sa leve strane zavisi samo od z koordinate, a izraz sa desne samo od r koordinate, što je moguće jedino ako su oba ta izraza jednaka istoj konstanti, odakle sledi jednačina

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right) = C,$$

čijim rešavanjem se dobija

$$v = \frac{1}{4}Cr^2 + K_1 \ln r + K_2\,.$$

Iz graničnih uslova $v(r = R) = 0$ i $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\Big|_{r=R+\delta} = 0$ dobija se

$$K_1 = -\frac{1}{2}C(R+\delta)^2\,, \quad K_2 = -\frac{1}{4}CR^2 + \frac{1}{2}C(R+\delta)^2 \ln R\,.$$

S druge strane, zapreminski protok F kroz cev jednak je zapreminskom protoku F_f sloja koji se sliva niz cev, a koji je jednak

$$F_f = \int\int \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_R^{R+\delta} v(r) r \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi =$$

$$= 2\pi\left\{\frac{1}{16}C[(R+\delta)^4 - R^4] + \frac{K_2}{2}[(R+\delta)^2 - R^2] + \frac{K_1}{4}[2(R+\delta)^2\ln(R+\delta) - 2R^2\ln R - (R+\delta)^2 + R^2]\right\}\,.$$

Zamenom prethodno dobijenih izraza za K_1 i K_2 u funkciji C u F_f, pa zatim izjednačavanjem F i F_f dobija se

$$C = \frac{8F}{\pi}\left[3(R+\delta)^4 + R^4 - 4R^2(R+\delta)^2 - 4(R+\delta)^4 \ln\frac{R+\delta}{R}\right]^{-1}\,,$$

pa vraćanjem tog izraza u dobijeni izraz za $v(r)$ sledi konačan izraz za brzinu.

5. Projekcije Navije-Stoksove jednačine na $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$ i $\vec{e}_\varphi$ redom imaju oblik

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right) + \frac{v_\theta}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right) =$$

$$= -g\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\eta}{\rho r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right)$$

$$+\frac{\eta+\xi}{3\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\,,$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{1}{r}\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial\theta} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\theta} + v_\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\theta}\right) - \frac{v_\varphi}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right) + \frac{v_r}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right) =$$

$$= g\sin\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} - \frac{\eta}{r\rho}\left(\frac{1}{r\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right) - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial\theta}\right)\right) +$$

$$+\frac{\eta+\xi}{3r\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\,,$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(v_r\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + v_\theta\frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi} + v_\varphi\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right) - \frac{v_r}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right) + \frac{v_\theta}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right) =$$

$$-\frac{1}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\varphi} - \frac{\eta}{r\rho}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\varphi\sin\theta) - \frac{\partial v_\theta}{\partial\varphi}\right)\right)\right) +$$

$$+\frac{\eta+\xi}{3\rho r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2v_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(v_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi}\right)\,.$$

DRUGI KOLOKVIJUM IZ FIZIKE KONTINUUMA
10.MAJ 2012.

Stoksov fluid stacionarno struji u oblasti između dva koaksijalna cilindra, poluprečnika a i b ($a < b$). Spoljašnji cilindar rotira ugaonom brzinom ω, a unutrašnji se kreće u pravcu zajedničke ose konstantnom brzinom U. Gustina fluida je ρ, koeficijent viskoznosti η, a zapreminske sile mogu da se zanemare. Pretpostavljajući da je brzina fluida oblika

$$\vec{v} = v_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + v_z(r)\vec{e}_z \, ,$$

gde su (r, φ, z) cilindrične koordinate izabrane tako da se z osa poklapa sa osom cilindara, kao i da pritisak zavisi samo od rastojanja od ose, $p = p(r)$,

1. (80 poena) rešiti Stoksovu jednačinu, tj. naći $v_\varphi(r)$ i $v_z(r)$;
2. (20 poena) sastaviti diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava pritisak i pokazati da iz nje sledi
$$p(r) = \int \mathrm{d}r \, F(r) \, ,$$
gde treba naći eksplicitan oblik funkcije $F(r)$ (inegral NE TREBA rešavati).

Korisne formule

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v} \, , \quad \Delta\vec{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{v}$$

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\varphi & v_z \end{vmatrix} \, , \quad \mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

REŠENJE

1. Za pretpostavljeni oblik brzine direktnim računom dobija se

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r v_\varphi(r) & v_z(r) \end{vmatrix} = -\vec{e}_\varphi \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} + \frac{1}{r}\vec{e}_z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\varphi) \, , \quad \vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v} = \vec{e}_r \left(v_z \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\varphi) \right) \, ,$$

$$\mathrm{rot}\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} & \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\varphi) \end{vmatrix} = -\vec{e}_\varphi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\varphi)\right) - \vec{e}_z \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) \, ,$$

$$\mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) = \left(v_z \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r} + v_\varphi \frac{\mathrm{d}v_\varphi}{\mathrm{d}r} \right) \vec{e}_r \, .$$

Zamenom u Stoksovu jednačinu dobija se sledeća jednačina

$$-\frac{v_\varphi^2}{r}\vec{e}_r = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\vec{e}_r + \frac{\eta}{\rho}\left(\vec{e}_\varphi \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(r v_\varphi)\right) + \vec{e}_z \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) \right) \, ,$$

odakle, projektovanjem na ortove $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$ i $\vec{e}_z$, slede diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned} \frac{v_\varphi^2}{r} &= \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}\,, &(1)\\ 0 &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rv_\varphi)\right)\,, &(2)\\ 0 &= \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)\,. &(3)\end{aligned}$$

Rešavanjem ovih jednačina dobija se

$$v_\varphi = K_1 r + \frac{K_2}{r}\,,\quad v_z = C_1\ln r + C_2\,,$$

gde integracione konstante treba odrediti iz graničnih uslova:

$$r = a: \qquad v_\varphi = 0\,,\quad v_z = U\,,$$

odnosno

$$r = b: \qquad v_\varphi = \omega b\,,\quad v_z = 0\,,$$

tako da se konačno dobijaju sledeći izrazi za komponente brzine:

$$v_\varphi = \frac{b^2}{b^2-a^2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)\omega r\,,\quad v_z = U\,\frac{\ln\frac{b}{r}}{\ln\frac{b}{a}}\,.$$

2. Jednačina za pritisak se dobija zamenom dobijenog izraza za v_φ u jednačinu (1), odakle, nakon razdvajanja promenljivih, direktno sledi

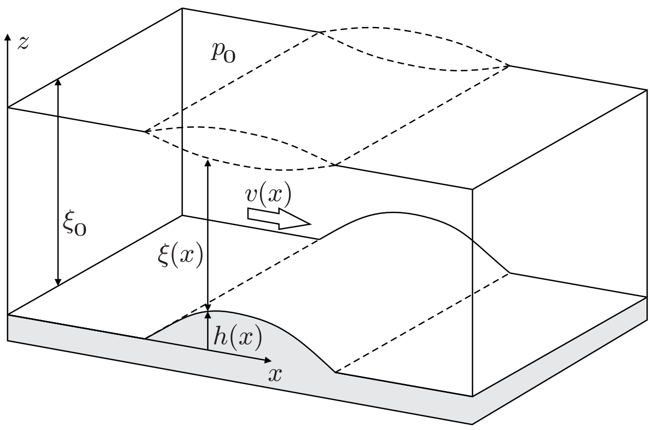
$$p(r) = \rho\int\frac{v_\varphi^2}{r}\,\mathrm{d}r\,,$$

pa je

$$F(r) = \rho\frac{r\omega^2 b^4}{(b^2-a^2)^2}\left(r-\frac{a^2}{r}\right)^2\,.$$

Treći domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 15. maj 2012.

1. (15 poena) Na dnu reke koja ima široko i ravno dno, usled nanosa peska (po čitavoj površini reke) formirao se breg visine $h(x)$, kao na slici. Pretpostavimo da je voda u reci idealan fluid i da je protok vode stacionaran. Odrediti kako se menja profil reke na površini usled izbočine na dnu primenom Bernulijeve jednačine i jednačine kontinuiteta, tj. pokazati da je promena dubine $\xi(x)$ povezana sa promenom visine brega na dnu izrazom:



$$\mathrm{d}\xi = -\frac{\mathrm{d}h}{1-\frac{v^2}{g\xi}},$$

gde je $v(x)$ brzina fluida na mestu x.

2. (25 poena) Idealan fluid se kreće u dve dimezije u oblasti $a < r < b$ i ima konstantnu vrtložnost ω. Strujne linije su koncentrične kružnice i linijska brzina na strujnoj liniji $r = a$ je V, dok je za $r = b$ brzina nula. Naći vrtložnost i odrediti razliku pritisaka koja postoji na granicama oblasti u kojoj se fluid kreće $p_b - p_a$.

3. (35 poena) Kompleksni potencijal je jednak

$$W(z) = Vf(z) - a\lambda \ln f(z),$$

gde je $f(z) = z - 2\sqrt{az}$. Ovde su V, a i λ realne konstante.

a) Pokazati da je strujna linija $\psi = -a\lambda\pi$ parabola.

b) Odrediti brzinu za jako velike vrednosti $|z|$.

c) Ako je $0 < V < 2\lambda$ naći pritisak na paraboli, ako se zna da je pritisak u beskonačnosti jednak p_∞.

4. (25 poena) Polje temperature u Stoksovom fluidu ima oblik $T = Ax_2^2 + Bx_2 + T_1$, gde su A, B i T_1 konstante.

a) Pretpostavljajući da za vektor gustine fluksa toplote $\vec{q}$ važi Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa\nabla T$, pri čemu je koeficijent termoprovodnosti κ poznat, izračunati količinu toplote koja u jedinici vremena prođe kroz kvadrat stranice a, koji leži u ravni normalnoj na x_2-osu.

b) Neka dato polje temperature odgovara Kuetovom proticanju $\vec{v} = kx_2\vec{e}_1$ Stoksovog fluida, koji se nalazi u oblasti između ploča $x_2 = 0$ i $x_2 = d$, čije su temperature T_1 i T_2. Koeficijent viskoznosti fluida je η. Pretpostavljući da je gustina unutrašnje energije fluida proporcionalna temperaturi T, odrediti konstante A i B.

Rešenja

1. Bernulijeva jednačina za strujne linije koje se nalaze na samoj površini reke, a na mestima gde nema brega i gde je breg glasi: $p_0 + \rho g\xi_0 + \rho v_0^2/2 = p_0 + \rho g(h+\xi) + \rho v^2/2 = \text{const}$, iz čega se vidi da je $\rho g(h+\xi) + \rho v^2/2 = \text{const}$. Diferenciranjem ovog izraza dobija se

$$c\mathrm{d}v + g\mathrm{d}h + g\mathrm{d}\xi = 0.$$

Za iste ove preseke, možemo da napišemo i jednačinu kontinuuiteta (za ptorok po jediničnoj širini reke) $v_0\xi_0 = v\xi = \text{const}$, pa diferenciranjem dobijamo:

$$v\mathrm{d}\xi + \xi\mathrm{d}v = 0.$$

Kombinovanjem ova dva izraza, dobijamo traženu jednačinu:

$$\mathrm{d}\xi = -\frac{\mathrm{d}h}{1 - \frac{v^2}{g\xi}}.$$

2. Na osnovu simetrije problema, možemo da zaključimo da polje brzine ima oblik $\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi$. Pošto je rečena da se fluid kreće tako da mu je vrtložnost konstantna, imamo da je $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$, pa je $\omega = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rv)$, odakle se integracijom dobija da je:

$$v = \omega r + \frac{C}{r}.$$

Konstantu C određujemo iz uslova da je $v(b) = 0$ iz čega sledi da je $C = -b^2\omega$. Dakle, imamo da je:

$$v = \omega\left(r - \frac{b^2}{r}\right).$$

Sad možemo da nađemo i vrtložnost ω. Pošto je $v(r = a) = V$ dobijamo:

$$\omega = V\frac{a}{a^2 - b^2}.$$

Vezu pritiska i brzine možemo da dobijemo iz Ojlerove jednačine. Naime, ako ovu jednačinu skalarno pomnožimo sa $\vec{e}_r$ dobijamo:

$$\rho\frac{v^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}.$$

Pošto je pritisak p funkcija samo od r (opet zbog simetrije), onda je $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}r}$, pa se u gornjoj jednačini mogu radvojiti promenljive i izvršiti integracija:

$$\mathrm{d}p = \rho\frac{v(r)^2}{r}\mathrm{d}r \xRightarrow{\int_a^b} p_b - p_a = \rho\int_a^b \frac{v^2}{r}\mathrm{d}r = \frac{\rho V^2}{2}\frac{1}{(b^2 - a^2)^2}\left(b^4 - a^4 - 4a^2b^2\ln\frac{b}{a}\right).$$

3. Pošto je $W(z) = \Phi + \mathrm{i}\psi$, strujna funkcija je jednaka imaginarnom delu kompleksnog potencijala $\psi = \mathrm{Im}W(z)$. Mi treba da pokažemo da je strujna funkcija $\psi = -a\lambda\pi$ parabola. Za dati oblik kompleksnog potencijala, imamo da je:

$$\psi = \mathrm{Im}W(z) = V\mathrm{Im}f(z) - a\lambda\mathrm{arg}f(z).$$

Ovde je sa $\mathrm{arg}f(z)$ označen argument[1] funkcije $f(z)$. Ako tražimo da je $\psi = -a\lambda\pi$, treba da budu zadovoljena dva uslova:

$$\mathrm{Im}f(z) = 0, \quad \mathrm{arg}f(z) = \pi.$$

Ova dva uslova su saglasna, jer kada je $\mathrm{Im}f(z) = 0$, tada je $\mathrm{arg}f(z)$ jednak ili 0 (ako je $\mathrm{Re}f(z)$ pozitivan) ili π (ako je $\mathrm{Re}f(z)$ negativan). Napišimo sad $f(z)$ u trigonometrijskoj formu:

$$f(z) = f(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}) = r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) - 2\sqrt{ar}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + \mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

[1] Funkcija $f(z)$ je kompleksna funkcija kompleksnog parametra. To znači da je za svako z vrednost $f(z)$ neki kompleksan broj, koji se u opštem slučaju može napisati u trigonometrijskoj formi: $f(z) = A\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$. Ovde je $A = |f(z)|$ norma a $\alpha = \mathrm{arg}f(z)$ argument tog kompleksnog broja. Kada potražimo prirodni logaritam od $f(z)$ dobićemo da je $\ln f(z) = A + \mathrm{i}\alpha$, iz čega vidimo da je imaginarni deo logaritma zapravo argument funkcije $f(z)$.

pa se uslov $\mathrm{Im}f(z)=0$ svodi na:

$$r\sin\varphi = 2\sqrt{ar}\sin\frac{\varphi}{2},$$

iz čega se dobija:

$$\sin\frac{\varphi}{2}=0 \vee \sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{a}.$$

Ako je $\sin\frac{\varphi}{2}=0$ imamo da je $\varphi=0$. Skup tačaka koji odgovara ovom rešenju je poluprava. U tom slučaju je $\mathrm{Re}f=r-2\sqrt{ar}$ i ako je $r>4a$ imamo da je $\mathrm{Re}f>0$ što znači da u ovom rešenju imamo da je $\arg f$ jednak i 0 i π, tako da oba uslova ne mogu uvek biti zadovoljena. Međutim, ako razmotrimo drugu jednačinu, $\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{a}$, imamo da je $\mathrm{Re}f=r\cos\varphi-2\sqrt{ar}\cos\frac{\varphi}{2}=-\frac{a}{\cos^2\frac{\varphi}{2}}<0$, tako da je u ovom slučaju uvek $\arg f=\pi$, što znači da je ovo traženo rešenje. Sad možemo ispitamo i geometrijsko mesto tačka koje su u cilindričnim koordinatama zadate s $\sqrt{r}\cos\frac{\varphi}{2}=\sqrt{a}$. Najpre imamo da je

$$\cos\frac{\varphi}{2}=\frac{\cos\varphi-1}{2}=\frac{a}{r}\Rightarrow r\cos\varphi-r=2a\Rightarrow\sqrt{x^2+y^2}=x-2a\Rightarrow y^2=4a^2-4ax,$$

što je jednačina parabole simetrične u odnosu na x-osu.

Brzinu nalazimo iz

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=V\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}-a\lambda\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=\left(1-\sqrt{\frac{a}{z}}\right)\left(V-\frac{a\lambda}{z-2\sqrt{az}}\right)$$

jer je $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=1-\sqrt{\frac{a}{z}}$. Ako $\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}$ napišemo u trigonometrijskoj formi, na paraboli $r\cos^2\frac{\varphi}{2}=a$ imaćemo da je

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=\left(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\left(V-\frac{\lambda\cos^2\frac{\varphi}{2}}{1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}}\right).$$

Primetimo li da je $1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}$ kao i $1-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\cos\frac{\varphi}{2}=-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, imamo:

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}=-\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{\varphi}{2}\left(V+\lambda\cos^2\frac{\varphi}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right).$$

Pritisak nalazimo iz Bernulijeve jednačine $p+\frac{1}{2}\rho v^2=\mathrm{const}$. Dakle, treba nam kvadrat brzine, a njega nalazimo iz $v^2=\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|^2$ pa računamo

$$v^2=\left|\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}z}\right|^2=\sin^2\frac{\varphi}{2}\left(V^2+2\lambda V\cos^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi+\lambda^2\cos^4\frac{\varphi}{2}\right),$$

ili, pošto je na paraboli $\cos^2\frac{\varphi}{2}=\frac{a}{r}$

$$v^2=\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}\left[V^2+2\lambda V\frac{a}{r}\left(2\frac{a}{r}-1\right)+\lambda^2\frac{a^2}{r^2}\right].$$

Sad vidimo da je za jako velike vrednosti z (tada ja i r jako veliko)

$$\lim_{r\to\infty}v^2=V^2,$$

pa je traženi pritisak

$$p=p_\infty+\frac{1}{2}\rho(V^2-v^2),$$

odnosno

$$p(r)=p_\infty+\frac{1}{2}\rho\left\{V^2-\sqrt{1-\frac{a^2}{r^2}}\left[V^2+2\lambda V\frac{a}{r}\left(2\frac{a}{r}-1\right)+\lambda^2\frac{a^2}{r^2}\right]\right\}.$$

4. Vektor gustine fluksa toplote računa se iz Furijeovog zakona:

$$\vec{q} = -\kappa \nabla T = -\kappa(2Ax_2 + B)\vec{e}_2.$$

Kvadrat stranice a koji leži u ravni normalnoj na x_2-osu ima ort normale $\vec{n} = \vec{e}_2$, dok je $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_3 \vec{e}_2$. Količina toplote koja u jedinici vremena prođe kroz površinu S je

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\int_S \vec{q} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_S \kappa(2Ax_2 + B)\mathrm{d}x_1 \mathrm{d}x_3 = \kappa(2Ax_2 + B)a^2.$$

Pretpostavljajući da je gustina unutrašnje energije srazmerna s temperaturom $u = c_v T$ imamo da je

$$\rho c_v \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) - \mathrm{div}\vec{q}.$$

Leva strana jednačine jednaka je nuli, jer je

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + v\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0.$$

Pošto je $\tilde{\mathcal{P}} = 2\eta\tilde{\mathcal{S}} - p\tilde{\mathcal{I}}$ imamo da je $\mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) = 2\eta \mathrm{Tr}\tilde{\mathcal{S}}^2$. Kod Kuetovog proticanja je $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} = k$ dok su svi ostali izvodi jednaki nuli, pa dobijamo da je

$$\tilde{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} 0 & k/2 & 0 \\ k/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

iz čega se lako dobija da je $\mathrm{Tr}\tilde{\mathrm{S}}^2 = \frac{k^2}{2}$, odnosno $\mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) = \eta k^2$. Konav cno, pošto je $\mathrm{div}\vec{q} = -2kA$, imamo da je

$$0 = \eta k^2 + 2kA \Rightarrow A = -\frac{\eta k^2}{2\kappa}.$$

Konstantu B nalazimo iz graničnog uslova

$$T(x_2 = d) = T_2 \Rightarrow B = \frac{T_2 - T_1}{d} - Ad = \frac{T_2 - T_1}{d} + \frac{\eta k^2 d}{2\kappa}.$$

Rešenja drugog ponovljenog kolokvijuma iz Fizike kontinuuma

a) Potencijalno kretanje nestišljivog fluida opisano je Laplasovom jednačinom $\Delta\Phi = 0$. Kada pretpostavljeni oblik potencijala $\Phi(r,\varphi) = F(r)\cos\varphi$ uvrstimo u Laplasovu jednačinu, dobijamo $\cos\varphi\left(F'' + \frac{1}{r}F' - \frac{1}{r^2}F\right) = 0$ iz čega sledi da nepoznata funkcija F zadovoljava diferencijalnu jednačinu:

$$r^2F'' + rF' - F = 0.$$

Pretpostavljajući rešenje u obliku $F = Cr^n$ dobijamo da je $n(n-1) + n - 1 = 0$, iz čega se dobija da je $n = \pm 1$. Stoga je opšte rešenje za nepoznatu funkciju F jednako: $F(r) = C_1 r + \frac{C_2}{r}$. Dakle, potencijal je jednak:

$$\Phi = \left(C_1 r + \frac{C_2}{r}\right)\cos\varphi.$$

Iz potencijala dobijamo brzinu:

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\Phi = \left(C_1 - \frac{C_2}{r}\right)\cos\varphi\vec{e}_r - \left(C_1 + \frac{C_2}{r}\right)\sin\varphi\vec{e}_\varphi.$$

Granični uslov neprobojnosti fluida u $r = a$ zahteva da je $v_r(a) = 0$, iz čega sledi:

$$C_2 = C_1 a^2.$$

Drugi islov da je brzina u beskonačnosti jednaka $U_0\vec{e}_x$ se svodi na:

$$\lim_{r\to\infty}\vec{v} = C_1\cos\varphi\vec{e}_r - C_1\sin\varphi\vec{e}_\varphi = C_1\vec{e}_x = U_0\vec{e}_x \Rightarrow C_1 = U_0.$$

Dakle, nepoznata funkcija je jednaka $F = U_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)$, potencijal je $\Phi = U_0\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\varphi$, a brzina je:

$$\vec{v} = U_0\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)\cos\varphi\vec{e}_r - U_0\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)\sin\varphi\vec{e}_\varphi.$$

b) Da bismo našli silu koja deluje na polucilindar, treba da nađemo pritiska kojim vazduh deluje na halu. Njega nalazimo iz Bernulijevog integrala koji se u ovom slučaju svodi na:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 + gy = \mathrm{const.} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}U_0^2.$$

Pritisak vazduha je

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{1}{2}\rho\left(U_0^2 - v^2\right) - \rho g y \\ &= p_0 + \frac{1}{2}\rho\left[U_0^2 - U_0^2\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^2\cos^2\varphi - U_0^2\left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right)^2\sin^2\varphi\right] - \rho g y. \end{aligned}$$

Na polucilindru je $r = a$ i $y = a\cos\varphi$ i pritisak iznosi

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U_0^2\left(1 - 4\sin^2\varphi\right) - \rho g a\cos\varphi.$$

Sila je jednaka:

$$\vec{F} = \int_0^{\pi} \int_{z_0}^{z_0+1} a \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}z p \vec{e}_r.$$

Kada se $\vec{e}_r$ napiše preko Dekartovih ortova i izvrše integracije, dobija se da je konaňo

$$\vec{F} = \left(\frac{\pi}{2} \rho g a^2 + \frac{5}{3} U_0 \rho a - 2 a p_0 \right) \vec{e}_y.$$

Prvi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 10. mart 2011.

1. (25 poena) Polje brzine u Dekartovim koordinatama ima oblik

$$\vec{v} = a\sin[\omega(t - x_2/b)]\vec{e}_1 + b\vec{e}_2\,,$$

gde su a, b i ω zadate konstante. **(a)** Naći trajektoriju čestice koja se u trenutku $t = t_0$ nalazila u tački $(0,0,0)$. Nacrtati trajektoriju za: $t_0 = 0$, $t_0 = \pi/(2\omega)$ i $t_0 = 3\pi/(2\omega)$. **(b)** Odrediti strujnu liniju koja u trenutku $t = t_0$ prolazi kroz tačku čije su koordinate $(0,0,0)$. Skicirati strujnu liniju za: $t_0 = 0$, $t_0 = \pi/(2\omega)$ i $t_0 = 3\pi/(2\omega)$. **(c)** Naći ubrzanje $\vec{a}$ u Lagranževim i Ojlerovim promenljivim.

2. (30 poena) Dekartove komponente dvodimenzionalnog polja brzine imaju oblik

$$v_1 = \frac{x_2 - b}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}\,, \quad v_2 = \frac{a - x_1}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}\,.$$

(a) Uveriti se da je zadovoljen uslov nestišljivosti. **(b)** Naći strujnu funkciju $\psi(x_1, x_2)$. **(c)** Naći jednačinu strujne linije koja prolazi kroz tačku $(c, d, 0)$. **(d)** Naći elemente tenzora brzine deformacije. **(e)** Izraziti vektor brzine u cilindričnim koordinatama.

3. (25 poena) Dvodimenzionalno polje brzine u polarnim koordinatama (r, φ) ima oblik:

$$\vec{v} = r^2\cos(3\varphi)\vec{e}_r - r^2\sin(3\varphi)\vec{e}_\varphi\,.$$

(a) Naći strujnu funkciju $\psi(r, \varphi)$. **(b)** Naći jednačinu strujnih linija polazeći direktno od definicije strujne linije. **(c)** Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$.

4. (20 poena) Dvodimenzionalno strujanje nestišljivog fluida opisano je strujnom funkcijom

$$\psi = K(-x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + 3x_1x_2)\,,$$

gde je K zadata konstanta. Izračunati: **(a)** cirkulaciju brzine $\vec{v}$ po kružnici $(x_1-1)^2+(x_2-6)^2 = R^2$; **(b)** zapreminski protok kroz površinu $x_1^2+x_2^2+x_3^2 = R^2$; **(c)** relativnu promenu dužine supstancijalne duži $\mathrm{d}s(\vec{e}_1 + \vec{e}_2)/\sqrt{2}$ u jedinici vremena.

Rešenje.

1.(a) Iz definicije vektora brzine, za zadato polje važe jednačine:

$$v_1 = \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a\sin\omega(t - x_2/b) \tag{1}$$

$$v_2 = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = b \tag{2}$$

Iz druge jednačine onda sledi da je $x_2 = bt+\text{const}$, gde se konstanta određuje iz uslova $x_2(t = t_0) = 0$, tako da se dobija

$$x_2(t) = b(t - t_0)\,. \tag{3}$$

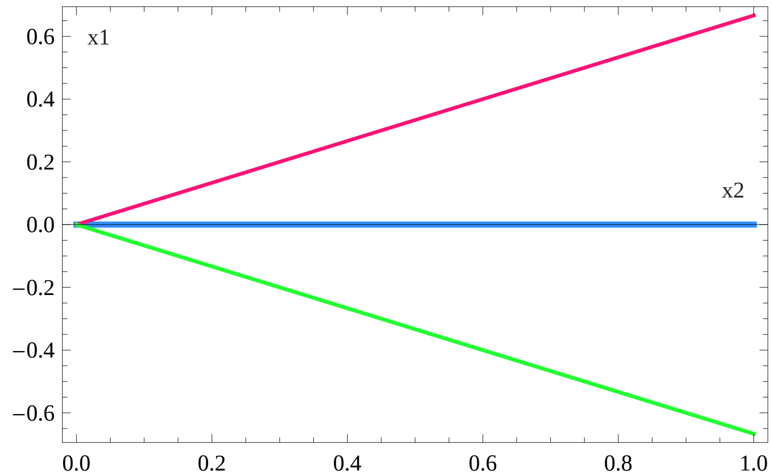
Zamenom dobijenog izraza za x_2 u prvu jednačinu zatim se dobija:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a\sin\omega t_0 \;\Rightarrow\; x_1(t) = a(t - t_0)\sin\omega t_0\,, \tag{4}$$

gde je nakon integracije iskorišćen početni uslov $x_1(t = t_0) = 0$. Eliminacijom vremena iz izraza $x_2(t)$ dobija se jednačina trajektorije

$$x_1 = \frac{a}{b}(\sin \omega t_0)\, x_2 \,, \tag{5}$$

koja je za zadate početne trenutke t_0 prikazana na sledećoj slici:



Trajektorija delića koji se u trenutku $t = t_0$ nalazio u tački $(0, 0, 0)$ je poluprava koja polazi iz koordinatnog početka, a čiji nagib je određen vrednošću $\sin(\omega t_0)a/b$. Za $t_0 = 0$ trajektorija leži na x_2 osi i obojena je plavom bojom, za $t_0 = \pi/2\omega$ to je crvena linija, a za $t_0 = 3\pi/(2\omega)$ zelena linija. Vrednosti na osi x_1 izražene su u jedinicama a/b.

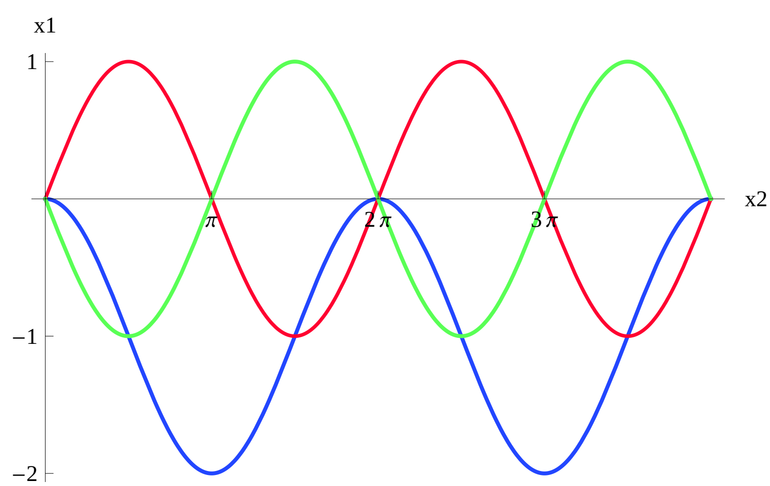
(b) Pošto je $v_3 = 0$, strujne linije leže u ravni $x_3 = 0$, a njihova jednačina u toj ravni dobija se rešavanjem diferencijalne jednačine

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{a \sin \omega(t_0 - x_2/b)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{b} \;\Rightarrow\; b\mathrm{d}x_1 = a \sin \omega(t_0 - x_2/b)\, \mathrm{d}x_2 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{a}{\omega} \cos \omega(t_0 - x_2/b) + \mathrm{const}\,. \tag{6}$$

Integraciona konstanta određuje se iz uslova da strujna linija treba da prolazi kroz tačku $(0, 0, 0)$, tako da se konačno dobija

$$x_1 = \frac{a}{\omega}[\cos \omega(t_0 - x_2/b) - \cos \omega t_0]\,. \tag{7}$$

Za $t_0 = 0$ dobijeni izraz se svodi na $x_1 = a/\omega[\cos(\omega x_2/b)-1]$, za $t_0 = \pi/(2\omega)$: $x_1 = (a/\omega)\sin(\omega x_2/b)$, a za $t_0 = 3\pi/(2\omega)$: $x_1 = -(a/\omega)\sin(\omega x_2/b)$. Ove tri linije prikazane su na sledećoj slici:



gde plava, crvena i zelena boja odgovaraju redom trenucima $t_0 = 0, \pi/(2\omega), 3\pi/(2\omega)$, vrednosti na x_1 osi su izražene u umnošcima a/ω, a vrednosti na x_2 osi u umnošcima b/ω.
(c) Na isti način kako su u delu pod (a) za česticu koja se u $t = t_0$ nalazila u tački $(0, 0, 0)$ dobijeni izrazi za $x_1(t)$ i $x_2(t)$, može se naći da su za česticu koja se u $t = t_0$ nalazila u tački (X_1, X_2, X_3) konačne jednačine kretanja

$$x_1(t) = a(t - t_0)\sin[\omega(t_0 - X_2/b)] + X_1\,, \quad x_2(t) = b(t - t_0) + X_2\,.$$

Odatle se u Lagranževom opisu, dvostrukim diferenciranjem dobijenih izraza po vremenu, dobija da je $\vec{a} = 0$. Isti rezultat mora da se dobije i u Ojlerovom opisu, što može i nezavisno formalno da se proveri izračunavanjem supstancijalnog izvoda brzine:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{e}_1 + v_1\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} =$$

$$= \frac{\partial v_1}{\partial t}\vec{e}_1 + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}\vec{e}_1 = \vec{e}_1\{a\omega\cos[w(t - x_2/b)] - a\omega\cos[w(t - x_2/b)]\} = 0\,.$$

2. (a) Kako je

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -2\frac{(x_1 - a)(x_2 - b)}{[(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2]^2}\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 2\frac{(x_1 - a)(x_2 - b)}{[(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2]^2}\,,$$

jasno je da je uslov nestišljivosti $\mathrm{div}\vec{v} = 0$ zadovoljen.
(b) Pošto je $v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}$, na osnovu zadatog izraza za v_2 sledi jednačina

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{x_2 - b}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}\,,$$

odakle je

$$\psi = \int \frac{x_2 - b}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2}\,\mathrm{d}x_2 = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}[(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2]}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} = \frac{1}{2}\ln[(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2] + f(x_1)\,.$$

Zamenom nađenog izraza za ψ u jednačinu $v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$, sa zadatim izrazom za v_2, dobija se jednačina

$$\frac{a - x_1}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x_1} + \frac{a - x_1}{(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2} \;\Rightarrow\; f = \mathrm{const}\,,$$

pa je strujna funkcija

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}\ln[(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2] + \mathrm{const}\,.$$

(c) Pošto je jednačina strujne linije $\psi(x_1, x_2) = \mathrm{const}$, strujna linija koja prolazi kroz zadatu tačku je kružnica koja leži u ravni (x_1, x_2), sa centrom u tački (a, b), a poluprečnik joj je $\sqrt{(c - a)^2 + (d - b)^2}$:

$$(x_1 - a)^2 + (x_2 - b)^2 = (c - a)^2 + (d - b)^2\,.$$

(d) Pošto je matrica parcijalnih izvodi komponenata brzina po koordinatama $\mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ jednaka

$$\mathcal{T} = \frac{1}{[(x_1-a)^2+(x_2-b)^2]^2} \begin{pmatrix} -2(x_1-a)(x_2-b) & (x_1-a)^2-(x_2-b)^2 & 0 \\ (x_1-a)^2-(x_2-b)^2 & 2(x_1-a)(x_2-b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tenzor brzine deformacije se lako nalazi kao

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}^\dagger) = \mathcal{T}\,,$$

pošto je $\mathcal{T} = \mathcal{T}^\dagger$.

(e) Pošto su Dekartove komponente brzine v_1, v_2 i v_3 u cilindričnim koordinatama (r,φ,z) jednake

$$v_1 = \frac{r\sin\varphi - b}{(r\cos\varphi-a)^2+(r\sin\varphi-b)^2}\,, \quad v_2 = \frac{a-r\cos\varphi}{(r\cos\varphi-a)^2+(r\sin\varphi-b)^2}\,, v_z = 0\,,$$

a Dekartovi ortovi $\vec{e}_1$ i $\vec{e}_2$ u cilindričnim koordinatama imaju oblik:

$$\vec{e}_1 = \cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi\,, \quad \vec{e}_2 = \sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi\,,$$

vektor brzine u cilindričnim koordinatama je

$$\vec{v} = \frac{-b\cos\varphi + a\sin\varphi}{(r\cos\varphi-a)^2+(r\sin\varphi-b)^2}\vec{e}_r + \frac{-r+b\sin\varphi+a\cos\varphi}{(r\cos\varphi-a)^2+(r\sin\varphi-b)^2}\vec{e}_\varphi\,.$$

3.(a) Pošto je

$$v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r} = -r^2\sin(3\varphi)\,,$$

sledi da je $\psi = \frac{1}{3}r^3\,\sin 3\varphi + f(\varphi)$. Kada se takav izraz zameni u

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,,$$

lako se dobija jednačina $\mathrm{d}f/\mathrm{d}\varphi = 0$, odakle se vidi da je $f(\varphi) = \mathrm{const}$, odakle je strujna funkcija

$$\psi = \frac{1}{3}r^3\,\sin 3\varphi + \mathrm{const}\,.$$

(b) Iz definicione jednačine strujne linije: $\mathrm{d}\vec{r} = \lambda\vec{v}$, u cilindričnim kooordinatama se dobijaju jednačine $\mathrm{d}z = 0$ i

$$\frac{\mathrm{d}r}{r^2\cos 3\varphi} = \frac{r\mathrm{d}\varphi}{-r^2\sin 3\varphi} \;\Rightarrow\; \frac{1}{r}\mathrm{d}r = -\frac{\cos 3\varphi}{\sin 3\varphi}\,\mathrm{d}\varphi \;\Rightarrow\; \ln r = -\frac{1}{3}\ln|\sin 3\varphi| + \mathrm{const}\,,$$

odakle sledi da se strujna linija nalazi u preseku površina

$$r^3 = \frac{K_1}{\sin 3\varphi}\,, \quad z = K_2$$

gde su K_1 i K_2 konstante.
(c) Pošto je $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$ direktnim računom se dobija

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & r v_\varphi & 0 \end{vmatrix} = 0\,.$$

4. Iz strujne funkcije se direktno dobija da su komponente brzine u Dekartovim koordinatama

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = K(x_2 + 3x_1)\,, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} = K(2x_1 - 3x_2)\,, \quad v_3 = 0\,.$$

(a) Cirkulacija brzine po zadatoj kružnici C se lako izračunava pomoću Stoksove teoreme:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int\int_S \mathrm{rot}\vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\int_S (K\vec{e}_3)\cdot(\mathrm{d}S\,\vec{e}_3) = K\int\int_S \mathrm{d}S = K(\pi R^2)\,.$$

(b) Fluid je nestišljiv, pa, pošto se traži protok kroz zatvorenu površinu, ovde je najjednostavnije primeniti teoremu Gausa-Ostrogradskog:

$$F = \int\int_S \vec{v}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int\int\int_V \mathrm{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V = 0\,.$$

(c) Brzina relativne promene dužine supstancijalne duži $\mathrm{d}s\vec{n}$, gde je $\vec{n}$ ort, može da se izračuna pomoću tenzora brzine deformacije $\tilde{\mathcal{S}}$ kao $\vec{n}\cdot(\tilde{\mathcal{S}}\vec{n})$. Pošto je

$$\mathcal{S} = \frac{3K}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

što se lako proverava, tražena veličina je jednaka

$$\vec{n}\cdot(\tilde{\mathcal{S}}\vec{n}) = \frac{3K}{2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{2}K\,.$$

Prvi kolokvijum iz FIZIKE KONTINUUMA
12. maj 2011.

Za polje brzine koje u cilindričnim koordinatama (r, φ, z) ima oblik $\vec{v} = r^4\vec{e}_\varphi$ naći:

(1) polje brzine u Dekartovim koordinatama;

(2) matricu koja odgovara tenzoru brzine deformacije;

(3) vektor vrtložnosti;

(4) strujnu funkciju;

(5) trajektoriju delića koji se u početnom trenutku nalazio u tački (X_1, X_2, X_3);

(6) strujne linije;

(7) vrtložne linije;

(8) polje ubrzanja u Dekartovim koordinatama;

(9) fluks vektora vrtložnosti kroz površinu kruga jediničnog poluprečnika, koji leži u ravni $z = 0$, a centar mu je u koordinatnom početku;

(10) protok kroz površinu lopte poluprečnika R, sa centrom u koordinatnom početku, ako je gustina fluida ρ.

REŠENJA

(1) Pošto je $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2$, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ i $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ brzina je

$$\vec{v} = r^4\vec{e}_\varphi = r^4(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) = (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}(-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2)\,.$$

(2) Pošto je

$$v_1 = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}\,, \quad v_2 = x_1(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}\,, \quad v_3 = 0\,,$$

parcijalni izvodi komponenata brzina po koordinatama su:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = -x_2\frac{3}{2}(x_1^2+x_2^2)^{1/2}(2x_1)\,, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\left((x_1^2 + x_2^2)^{3/2} + x_2\frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}2x_2\right) = -(x_1^2+x_2^2)^{1/2}(x_1^2+4x_2^2)\,,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}(4x_1^2 + x_2^2)\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 3x_1x_2(x_1^2 + x_2^2)^{1/2} = -\frac{\partial v_1}{\partial x_1}\,,$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0\,,$$

pa je tenzor brzine deformacije u Dekartovim koordinatama reprezentovan matricom

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \mathcal{T}^T) = \frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)^{1/2}\left[\begin{pmatrix} -3x_1x_2 & -(x_1^2 + 4x_2^2) & 0 \\ 4x_1^2 + x_2^2 & 3x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3x_1x_2 & 4x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ -(x_1^2 + 4x_2^2) & 3x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$
= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \begin{pmatrix} -3x_1x_2 & \frac{3}{2}(x_1^2 - x_2^2) & 0 \\ \frac{3}{2}(x_1^2 - x_2^2) & 3x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,
$$

gde je iskorišćen tenzor čiji su elementi $\mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

(3) U Dekartovim koordinatama:

$$
\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3 = \frac{5}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}\vec{e}_3
\end{aligned}
$$

U cilindričnim koordinatima:

$$
\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r^5 & 0 \end{vmatrix} = \frac{5}{2}r^3\vec{e}_z
$$

(4) U Dekartovim koordinatama:

$$
v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} , \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}
$$

Iz prve od prethodne dve relacije sledi:

$$
\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = -x_2(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} \Rightarrow \psi(x_1, x_2) = -\frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2)^{5/2} + F(x_1) ,
$$

pa se zamenom tako nađenog izraza za strujnu funkciju u drugu relaciju dobija

$$
v_2 = (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}x_1 - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_1} \Rightarrow x_1(x_1^2 + x_2^2)^{3/2} = (x_1^2 + x_2^2)^{3/2}x_1 - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_1} = 0 \Rightarrow F = \mathrm{const} ,
$$

tako da je strujna funkcija jednaka

$$
\psi(x_1, x_2) = -\frac{1}{5}(x_1^2 + x_2^2)^{5/2} + \mathrm{const} .
$$

U cilindričnim koordinatama je

$$
v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \varphi} ,
$$

odakle sledi da ψ ne zavisi od φ (pošto je $v_r = 0$), tj. $\psi = \psi(r)$. Pošto je

$$
v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} , \quad v_\varphi = r^4 ,
$$

dalje se dobija

$$
\psi = -\frac{1}{5}r^5 + \mathrm{const} ,
$$

što se poklapa sa izrazom dobijenom u Dekartovim koordinatama, ako se uzme u obzir da je $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

(5), (6) Pošto je polje brzine stacionarno, trajektorije delića se poklapaju sa strujnim linijama, koje se najlakše dobijaju iz jednačine $\psi = \text{const}$. Poslednja jednačina, uz prethodno nađeni izraz za ψ, daje uslov $r^5 = \text{const}$, odnosno $r = \text{const}$. Uz uslov $z = \text{const}$ (koji sledi iz $v_z = 0$), to znači da su strujne linije kružnice koje leže u ravnima ortogonalnim na z-osu, a centar im je upravo na z-osi. Tražena trajektorija je onda kružnica određena jednačinama $r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $z = X_3$.

(7) Iz definicije vrtložne linije $\vec{\omega} = \lambda \mathrm{d}\vec{r}$ i nađenog izraza za $\vec{\omega}$ sledi

$$\frac{5}{2} r^3 \vec{e}_z = \lambda(\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\vec{e}_z) \ \Rightarrow\ \mathrm{d}r = 0\,, \quad \mathrm{d}\varphi = 0 \ \Rightarrow\ r = \text{const},\ \varphi = \text{const}\,.$$

Pošto jednačina $r = \text{const}$ predstavlja cilindričnu površinu, a $\varphi = \text{const}$ jednačinu poluravni koja sadrži z-osu, presek ove dve površine je prava pralelna z-osi i ona upravo predstavlja vrtložnu liniju.

Slično bi se u Dekartovim koordinatama dobili uslovi $\mathrm{d}x_1 = 0$ i $\mathrm{d}x_2 = 0$, tj. jednačine koordinatnih ravni $x_1 = \text{const}$ i $x_2 = \text{const}$, čiji presek je ponovo prava paralelna x_3-, tj. z-osi.

(8) Pošto je

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2}\,,$$

uzimajući u obzir izraze dobijene za v_1, v_2 i njihove izvode po koordinatama sledi

$$\begin{aligned} a_1 = v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= -x_2(x_1^2+x_2^2)^{3/2}\left(-3x_1x_2(x_1^2+x_2^2)^{1/2}\right) + x_1(x_1^2+x_2^2)^{3/2}\left(-(x_1^2+x_2^2)^{1/2}(x_1^2+4x_2^2)\right) \\ &= -x_1(x_1^2+x_2^2)^3\,, \\ a_2 = v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2} &= -x_2(x_1^2+x_2^2)^{3/2}(x_1^2+x_2^2)^{1/2}(4x_1^2+x_2^2) + x_1(x_1^2+x_2^2)^{3/2}\left(3x_1x_2(x_1^2+x_2^2)^{1/2}\right) \\ &= -x_2(x_1^2+x_2^2)^3\,, \end{aligned}$$

pa je

$$\vec{a} = -(x_1^2+x_2^2)^3(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2)\,.$$

(9) Fluks vektora vrtložnosti jednak je

$$\int\int_S \vec{\omega}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,, \quad \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\vec{e}_z\,,$$

pa je

$$\int\int_S \vec{\omega}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1\int_0^{2\pi}\omega r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{5}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi} r^4\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = \frac{5}{2}\int_0^1 r^4\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \pi$$

Drugi način:

$$\int\int_S \vec{\omega}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\int\int_S \mathrm{rot}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_{r=1}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{2}\oint_{r=1}(r^4\vec{e}_\varphi)\cdot(r\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \pi$$

(10) Protok Q kroz zadatu površinu S jednak je

$$Q = \int_S \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \rho\int_S \vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \rho\int_V \mathrm{div}\vec{v}\,\mathrm{d}V = 0\,,$$

gde je iskorišćena teorema Gausa-Ostrogradskog i činjenica da je za zadato polje brzine $\mathrm{div}\vec{v} = 0$.

Drugi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 18. april 2011.

1. (20 poena) Naći vektor ukupne sile pritiska koja deluje na polusfernu šupljinu poluprečnika R. Centar šupljine se nalazi na dubini $h > R$, tako da je celokupna šupljina ispunjena tečnošću gustine ρ.

2. (20 poena) Prostor između dva beskonačna koncentrična cilindra poluprečnika a (unutrašnji) i b (spoljašnji) ispunjen je viskoznom tečnošću gustine ρ i viskoznosti η. Cilindri rotiraju oko zajedničke ose istom ugaonom brzinom $\vec{\omega} = \Omega\vec{e}_z$ s tim da se unutrašnji cilindar kreće još i konstantnom brzinom $\vec{v} = V\vec{e}_z$. Naći polje brzine fluida.

3. (25 poena) Napisati Navije-Stoksovu jednačinu u cilindričnim koordinatama. Pretpostaviti da je jedina zapreminska sila gravitacija i da se z-osa koordinatnog sistema poklapa sa vertikalom, tako da je $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Polja brzine i pritiska imaju najopštije oblike: $\vec{v} = \vec{v}(r, \varphi, z, t)$ i $p = p(r, \varphi, z, t)$.

4. (35 poena) Razmotriti problem potencijalnog proticanja oko sfere poluprečnika R. Za aksijalno simetrično proticanje oko sfere strujna funkcija $\psi(r, \theta)$ je povezana sa brzinom

$$\vec{v} = \mathrm{rot}\left(\frac{\psi(r,\theta)\vec{e}_\varphi}{r\sin\theta}\right).$$

a) Pokazati da relacija između $\vec{v}$ i ψ obezbeđuje da je jednačina kontinuiteta automatski zadovoljena.

b) Naći diferencijalnu jednačinu i granične uslove koje strujna funkcija treba da zadovoljava.

c) Pokazati da $\psi \to \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta$ za $r \to \infty$ odgovara $\vec{v} \to U\vec{e}_z$. Kako glase uslovi neprobojnosti na granici $r = R$?

d) Pretpostavljajući rešenje strujne funkcije u obliku $\psi = f(r)\sin^2\theta$, naći strujnu funkciju, a potom odrediti profil brzine.

Rešenje

1. Koordinatni sistem postavimo u centar polusferne šupljine, z-osa se poklapa sa vertikalom a x-osa neka leži u ravni vertikalnog zida. Sila koja deluje na infinitezimalni delić šupljine jednaka je $\mathrm{d}\vec{F} = p\mathrm{d}\vec{S}$. Ovde je p hidrostatički pritisak koji iznosi $p = \rho g(h - R\cos\theta)$, a element pov ršine će u ovom koordinatnom sistemu biti jednak $\mathrm{d}\vec{S} = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_r$. Stoga je

$$\mathrm{d}\vec{F} = \rho g(h - R\cos\theta)R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi(\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z).$$

Ovaj oblik infinitezimalne sile je pogodan za integraciju:

$$\vec{F} = \rho g R^2\int_0^\pi\int_0^\pi(h - R\cos\theta)\sin\theta(\sin\theta\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\vec{e}_y + \cos\theta\vec{e}_z)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

Nakon integracije, dobija se da je tražena sila jednaka

$$\vec{F} = \rho g R^2\pi\left(h\vec{e}_y - \frac{2}{3}R\vec{e}_z\right)$$

2. S obzirom na simetriju probelma, može se pretpostaviti da polje brzine ima sledeći oblik:

$$\vec{v} = v_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + v(z)\vec{e}_z,$$

dok pritisak zavisi samo od rastojanja od zajedničke ose cilindara $p = p(r)$. Navije-Stoksova jednačina se ya ovo polje brzine svodi na:

$$(\vec{v}\nabla)\vec{v} = \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\,p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}.$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo s $\vec{e}_\varphi$, odnosno s $\vec{e}_z$ dobijamo:

$$\frac{\eta}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}(rv_\varphi)\right) = 0, \qquad -\frac{\eta}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) = 0$$

Rešavanje ovih diferencijalnih jednačina daje:

$$v_\varphi = A_1\frac{r}{2} + A_2\frac{1}{r}, \qquad v_z = B_1 \ln r + A_2.$$

Granični uslovi koje imamo u ovom slučaju omogućavaju da se odrede konstante integracije:

$$v_\varphi(a) = a\Omega,\ v_\varphi(b) = b\Omega \Rightarrow A_1 = 2\Omega,\ A_2 = 0.$$

$$v_z(a) = V,\ v_z(b) = 0 \Rightarrow B_1 = \frac{V}{\ln\frac{a}{b}},\ B_2 = -\ln b\frac{V}{\ln\frac{a}{b}},$$

pa je traženo polje brzine:

$$\vec{v} = r\Omega\vec{e}_\varphi + V\frac{\ln\frac{r}{b}}{\ln\frac{a}{b}}\vec{e}_z.$$

3. U opštem slučaju Navije-Stoksova jednačina glasi

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{f} + \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}.$$

Koristeći se činjenicom da je $\vec{v} = \vec{v}(r,\varphi,z,t)$, $\vec{f} = -g\vec{e}_z$, $p = p(r,\varphi,z,t)$, pomoću formula

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v}, \qquad \Delta\vec{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{v},$$

kao i

$$\mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad \mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z,$$

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix}, \quad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

dobijaju se projekcije Navije-Stoksove jednačine i to, $\vec{e}_r$-projekcija:

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} - \frac{v_\varphi^2}{r} + v_z\frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\eta}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_r)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right],$$

$\vec{e}_\varphi$-projekcija:

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} - \frac{v_r v_\varphi}{r} + v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} = -\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} + \frac{\eta}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_\varphi)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial\varphi^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right],$$

$\vec{e}_z$-projekcija:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial\varphi} + v_z\frac{\partial v_z}{\partial z} = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{\rho}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right].$$

4. Koristeći se definicijom rotora u sfernim koordinatama, dobija se da je brzina

$$\vec{v} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_\theta.$$

a) Lako se pokazuje da ovako definisano polje brzine ima divergenciju koja je jednaka

$$\operatorname{div}\vec{v} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) = 0.$$

b) Pošto je strujanje bezvrtložno, imamo da je $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$. Za dato polje brzine se dobija

$$\operatorname{rot}\vec{v} = -\left[\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^3}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)\right]\vec{e}_\varphi.$$

Uslov bezvrtložnosti se svodi na:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) = 0,$$

što je tražena diferencijalna jednačina za strujnu funkciju.

c) Kada uzmemo $\psi = \frac{1}{2}Ur^2\sin^2\theta$ i izračunamo

$$\lim_{r\to\infty}\vec{v} = \lim_{r\to\infty}\left(\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\vec{e}_r - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_\theta\right) = U\cos\theta\vec{e}_r - U\sin\theta\vec{e}_\theta = U\vec{e}_z$$

što je i trebalo pokazati. Uslovi neprobojnosti na granici $r = R$ glasi $v_r|_{r=R} = 0$, što se svodi na

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right|_{r=R} = 0$$

d) Ubacujući pretpostavljno rešenje za strujnu funkciju $\psi = f(r)\sin^2\theta$, u jednačinu koju zadovoljava strujna funkcija (određena u b) delu zadatka), dobija se diferencijalna jednačina:

$$r^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}r^2} - 2f = 0.$$

Ovo je Ojlerova jednačina, čije rešenje se traži u obliku $f = cr^n$, pa se dobija $n^2 - n - 2 = 0$, što ima dva rešenja $n = -1$ i $n = 2$, pa je rešenje:

$$f = C_1\frac{1}{r} + C_2 r^2$$

Granični uslovi koji su razmatrani omogućavaju da se odrede konstante C_1 i C_2. Najpre vidimo da je

$$\lim_{r\to\infty} f(r) = \frac{1}{2}Ur^2 \Rightarrow C_2 = \frac{1}{2}U.$$

Uslov neprobojnosti se svodi na $f(r = R) = 0$ iz čega se dobija $C_1 = -C_2R^3 = -\frac{1}{2}UR^3$, pa je konačno strujna funkcija jednaka:

$$\psi = \frac{1}{2}UR^2\left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{R}{r}\right)\sin^2\theta,$$

odnosno

$$\vec{v} = U\left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right)\vec{e}_r - U\left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right)\vec{e}_\varphi.$$

Drugi kolokvijum iz FIZIKE KONTINUUMA
12. maj 2011.

1. (65 poena) Između dve paralelne horizontalne ploče površine S protiče nestišljiv viskozni fluid, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η. Rastojanje između ploča je H, i važi $H \ll \sqrt{S}$. Donja ploča leži na nepomičnoj, horizontalnoj podlozi. Na gornju ploču, mase M, deluje se konstantnom silom $\vec{F}$, čiji je vektor u ravni ploče. Čitav sistem se nalazi u vakuumu, u homogenom polju Zemljine teže ($\vec{g}$ usmeren od gornje ka donjoj ploči). Pod pretpostavkom da nema drugih zapreminskih sila i da je tok stacionaran i paralelan, naći polje brzine i polje pritiska u fluidu.

2. (35 poena) Stacionarno proticanje idealnog nestišljivog fluida gustine ρ, van polja zapreminskih sila opisano je potencijalom

$$\Phi = -\frac{m}{4\pi\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Uzimajući da je pritisak na jako velikim rastojanjima od koordinatnog početka p_0, naći pritisak u ovom fluidu.

Rešenje

1. Uzmimo x-osu koordinatnog sistema u pravcu i smeru sile $\vec{F}$, y-osu verikalno nagore, koordinatni početak na donjoj ploči. S obzirom da su ploče "beskonačne" sa stanovišta fluida među njima ($H \ll \sqrt{S}$), brzina ne sme da zavisi od koordinata duž ploča. Uz zahtev da tok bude paralelan i stacionaran, uz prethodno razmatranje zaključujemo $\vec{v}(\vec{r}) = v(y)\vec{e}_x$. Jasno je da će fluid sa ovako pretpostavljenim poljem brzine zaista biti nestišljiv. Navije-Stoksova jednačina glasi

$$0 = -\vec{g} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\triangle\vec{v}$$

Ova vektorska jednakost daje dve skalarne:

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}y^2}, \qquad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = -\rho g.$$

Rešenje ovih jednačina su

$$v(y) = Ay + B, \qquad p = -\rho g y + C.$$

Donja ploča se ne kreće, dakle $B = 0$. Konstante A i C odredićemo iz drugog Njutnovog zakona za gornju ploču. Naime, ploča se mora kretati konstantnom brzinom (kao i sloj fluida uz nju). Ukupna sila na nju je

$$M\vec{g} + \int_S \vec{P}_{\vec{n}}\mathrm{d}\vec{S} + \vec{F} = M\vec{a} = 0$$

Lako utvrđujemo da je tenzor napona

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} -p & A\eta & 0 \\ A\eta & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

Vektor normale na ploču je $\vec{n} = -\vec{e}_y$ tako da

$$\vec{F}_{\text{visk. na ploču}} = -S\mathcal{P}\cdot\vec{e}_y = pS\vec{e}_y - AS\eta\vec{e}_x$$

pa imamo

$$F - AS\eta = 0 \Rightarrow A = \frac{F}{\eta S},$$

$$-Mg + p(H) = 0 \Rightarrow C = \frac{Mg}{S} + \rho g H.$$

Tražena polja su

$$\vec{v} = \frac{y\vec{F}}{\eta S}, \qquad p = \frac{Mg}{S} + \rho g(H - y).$$

2. Polje brzine nalazimo iz potencijala

$$\vec{v} = \operatorname{grad}\Phi = -\frac{m}{4\pi}\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{m}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{m}{4\pi}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r.$$

Pritisak u fluidu može da se nađe na osnovu Bernulijeve

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Pošto je $v^2 = \frac{m^2}{16\pi^2}\frac{1}{r^4}$, Bernulijeva jednačina postaje

$$\frac{m^2}{32\pi^2}\frac{1}{r^4} + \frac{p}{\rho} = \text{const.}$$

Nepoznatu konstantu određujemo iz uslova da je pritisak na jako velikim rastojanjima od koordinatnog početka p_0, tako da je

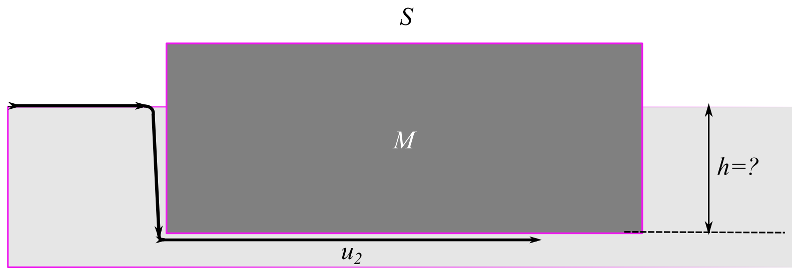
$$\frac{m^2}{32\pi^2}\frac{1}{r^4} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho},$$

pa je

$$p = p_0 - \frac{m^2\rho}{32\pi^2}\frac{1}{r^4}.$$

Treći domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 17. maj 2010.

1. (10 poena) Splav oblika kvadra, mase M i površine osnove (kojom je postavljen na vodu) S, kreće se malom brzinom u_1 kroz kanal (ispunjen vodom gustine ρ) u koji jedva staje, tako da se u tankom sloju vode ispod splava generiše tok brzine $u_2 \gg u_1$. Pretpostavljajući da je kretanje stacionarno, primeniti Bernulijevu jednačinu na strujnu liniju koja povezuje površinu vode sa donjom površinom splava (takođe pretpostaviti da je tok dvodimenzionalan). Izračunati do koje dubine je splav uronjen u vodu.



2. (30 poena) Razmotriti potencijalno strujanje homogenog nestišljivog fluida, do kojeg dolazi usled toga što su kroz tačke $(\pm a, 0)$ u ravni Oxy postavljena dva linijska izvora jačine m, a kroz koordinatni početak izvor jačine -2m (zapravo bi trebalo reći ponor, ako je $m > 0$). Naći kompleksni potencijal koji odgovara ovakvom strujanju. Pokazati da jednačine strujnih linija imaju oblik

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \lambda xy)\,,$$

gde je λ konstanta.

3. (30 poena) **(a)** Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ za polje brzine $\vec{v}$, čije komponente u Dekartovim koordinatama imaju oblik

$$v_1 = -\beta x_1 - x_2\sqrt{x_1^2 + x_2^2}f(t)\,, \quad v_2 = -\beta x_2 + x_1\sqrt{x_1^2 + x_2^2}f(t)\,, \quad v_3 = 2\beta x_3\,,$$

gde je β konstanta. Pod pretpostavkom da su zapreminske sile potencijalne, koristeći Helmholcovu jednačinu za vrtložnost, naći funkciju $f(t)$. Izraziti vektor brzine $\vec{v}$ u cilindričnim koordinatama.
(b) Razmotriti supstancijalnu konturu u ravni $z = 0$, koja je u početnom trenutku $t = 0$ imala oblik kružnice radijusa $a = a_0$. Pokazati da ova kriva ostaje u ravni $z = 0$, a da joj se radijus sa vremenom menja po zakonu $a(t) = a_0 e^{-\beta t}$.
(c) Eksplicitnim računom proveriti da je za supstancijalnu konturu definisanu u prethodnom delu zadatka zadovoljena Kelvinova teorema.

4. (30 poena) U Stoksovom fluidu polje brzine u cilindričnim koordinatama (r, φ, z) ima oblik:

$$\vec{v}(r,t) = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - \mathrm{e}^{-r^2/4\nu t})\vec{e}_\varphi\,.$$

Pretpostavljajući da je temperatura funkcija samo rastojanja od ose vrtloga i vremena, tj. $T = T(r,t)$, da važi Furijeov zakon provođenja toplote $\vec{q} = -\kappa \mathrm{grad} T$, kao i da je gustina unutrašnje energije linearna funkcija temperature $u = cT$, sastaviti diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava $T(r,t)$. Koeficijenti Γ, κ i c su zadati, kao i gustina ρ i koeficijent viskoznosti ν fluida.

Rešenja

1. Gledano iz sistema vezanog za splav, brzina u nekoj tački koja je jako daleko od splava, na uočenoj strujnoj liniji iznosi u_1, dok je pritisak jednak atmosferskom p_{atm}. Ako se za visinu te tačke uzme $z = 0$, onda Bernulijeva jednačina duž uočene strujne linije ima oblik

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g z = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 \,.$$

Na delu strujne linije uz dno splava je $z = -h$, $p = p_2$ i $v = u_2$, pa sledi

$$p_2 + \frac{1}{2}\rho u_2^2 - \rho g h = p_{atm} + \frac{1}{2}\rho u_1^2 \,.$$

S druge strane, pošto nema vertikalnog pomeranja splava, važi relacija $(p_2 - p_{atm})S = mg$, pa je

$$\frac{1}{2}S\rho(u_1^2 - u_2^2) + S\rho g h = mg$$

odakle je

$$h = \frac{m}{\rho S} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2g} \approx \frac{m}{\rho S} + \frac{u_2^2}{2g} \,.$$

2. Kompleksni potencijal $W(z)$ dobija se kao zbir kompleksnih potencijala zadata tri linijska izvora

$$\begin{aligned} W(z) &= \frac{m}{2\pi}\ln(z-a) + \frac{m}{2\pi}\ln(z+a) - \frac{2m}{2\pi}\ln z = \frac{m}{2\pi}\ln\frac{z^2-a^2}{z^2} = \frac{m}{2\pi}\ln\frac{(z^2-a^2)z^{*2}}{z^2 z^{*2}} \\ &= \frac{m}{2\pi}\ln\frac{(x^2-y^2-a^2)(x^2-y^2)+4x^2y^2+2ixya^2}{(x^2+y^2)^2} \,. \end{aligned} \tag{1}$$

Ako se izraz koji stoji pod logaritmom u poslednjem izrazu napiše kao $A + iB$, gde su

$$A = \frac{(x^2-y^2-a^2)(x^2-y^2)+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \,, \quad B = \frac{2xya^2}{(x^2+y^2)^2} \,,$$

onda je

$$\ln(A+iB) = \ln De^{iF} = \ln D + iF \,,$$

gde su D i F redom moduo i argument kompleksnog broja $A + iB$. Pošto je $W(z) = \Phi + i\psi$, sledi da je strujna funkcija jednaka

$$\psi = \frac{m}{2\pi}F = \frac{m}{2\pi}\mathrm{arctg}\frac{B}{A} = \frac{m}{2\pi}\mathrm{arctg}\frac{2xya^2}{(x^2-y^2-a^2)(x^2-y^2)+4x^2y^2} \,,$$

odakle se jednačina strujne linije $\psi = \mathrm{const}$ svodi na jednačinu

$$\frac{2xya^2}{(x^2-y^2-a^2)(x^2-y^2)+4x^2y^2} = K \,,$$

gde je K konstanta. Nakon jednostavnog sređivanja ovog izraza dobija se jednačina

$$(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2 + \frac{2}{K}xy) \,,$$

što se uz smenu $\lambda = 2/K$ svodi na traženu jednačinu.

3. (a) Direktnim računom iz definicije $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v}$ se dobija

$$\vec{\omega} = \frac{3}{2} f(t)\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\vec{e}_3\,.$$

Takođe se lako proverava da je $\mathrm{div}\vec{v} = 0$, pa Helmholcova jednačina u ovom slučaju ima oblik

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} = 0\,.$$

Zamenom dobijenog izraza za $\vec{\omega}$ u ovu jednačinu dobija se

$$\frac{3}{2}(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} - \beta f\right)\vec{e}_3 - 3\beta f (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}\vec{e}_3 = 0\,,$$

odakle sledi jednačina

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = 3\beta f\,,$$

čije rešenje je

$$f(t) = C\mathrm{e}^{3\beta t}\,,$$

gde je C neka konstanta.

Direktnom zamenom izraza $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, $x_3 = z$ u izraz za brzinu dobija se

$$\begin{aligned}\vec{v} &= (-\beta r\cos\varphi - r^2\sin\varphi f)\vec{e}_1 + (-\beta r\sin\varphi + r^2\cos\varphi f)\vec{e}_2 + 2\beta z\vec{e}_z\\ &= -\beta r(\cos\varphi\vec{e}_1 + \sin\varphi\vec{e}_2) + r^2 f(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) + 2\beta z\vec{e}_z = -\beta r\vec{e}_r + r^2 f\vec{e}_\varphi + 2\beta z\vec{e}_z\,.\end{aligned}$$

(b) Pošto je u cilindričnim koordinatama $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{e}_z$, iz dobijenog izraza za brzinu slede jednačine

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} &= -\beta r\,,\\ r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} &= Cr^2\mathrm{e}^{3\beta t}\,,\\ \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} &= 2\beta z\,.\end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine sledi

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = 2\beta\mathrm{d}t\,,$$

odakle je $z =$konst $\mathrm{e}^{2\beta t}$, pa se za deliće konture koja se u početnom trenutku $t = 0$ u celini nalazi u ravni $z = 0$ dobija da je i u svakom sledećem trenutku $z = 0$. Iz prve od ove tri jednačine na sličan način se dobija

$$r = \mathrm{const}\,\mathrm{e}^{-\beta t}\,,$$

odakle se za deliće uočene konture (za koje je u početnom trenutku $r(t = 0) = a_0$) dobija

$$r(t) = a_0\mathrm{e}^{-\beta t}\,,$$

što zaista znači da uočena supstancijalna kriva ostaje u ravni $z = 0$, zadržavajući oblik kružnice, čiji se poluprečnik menja sa vremenom po zakonu $a(t) = a_0 \mathrm{e}^{-\beta t}$. Napomena: Iz druge jednačine, zamenom dobijenog izraza za $r(t)$ može da se nađe i zavisnost $\varphi(t)$, ali jasno je da promena φ sa vremenom ne utiče na prethodno dobijeni zaključak, tj. delići se pomeraju po konturi, ali tako da to ne utiče na izgled konture u celini.

(c) Pošto je element zadate konture u proizvoljnom trenutku jednak $\mathrm{d}\vec{l} = a_0 \mathrm{e}^{-\beta t} \mathrm{d}\varphi \vec{e}_\varphi$, za cirkulaciju se dobija

$$\Gamma = \oint \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_0^{2\pi} v_\varphi a_0 \mathrm{e}^{-\beta t} \mathrm{d}\varphi = C a_0^3 \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi C a_0^3 = \mathrm{const}\,,$$

što Kelvinova teorema i tvrdi.

4. Kao što je pokazano na predavanjima, iz jednačine unutrašnje energije u ovakvom slučaju sledi jednačina

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \mathrm{grad} T = \frac{2\eta}{\rho c} \sum_{i,j=1}^{3} S_{ij}^2 + \frac{\kappa}{\rho c} \Delta T\,.$$

Pošto brzina ima samo φ komponentu, a temperatura po pretpostavci zavisi samo r i t iz ove jednačine se dalje dobija

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{4\eta}{\rho c}(S_{11}^2 + S_{12}^2) + \frac{\kappa}{\rho c} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right)\,, \tag{2}$$

gde je iskorišćeno i $S_{11} = -S_{22}$, što važi zbog nestišljivosti Stoksovog fluida. Ostaje još da se nađu elementi S_{11} i S_{12}, što se svodi na izračunavanje parcijalnih izvoda $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial v_1}{\partial x_2}$ i $\frac{\partial v_2}{\partial x_1}$. Pošto je

$$v_1 = -\frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - \mathrm{e}^{-r^2/4\nu t}) \sin\varphi = -v(r) \sin\varphi\,, \quad v_2 = \frac{\Gamma}{2\pi r}(1 - \mathrm{e}^{-r^2/4\nu t}) \cos\varphi = v(r) \cos\varphi\,,$$

dobija se redom:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\sin\varphi \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_1} - v\cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,,\\
\frac{\partial v_1}{\partial x_2} &= \frac{\partial v_1}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_2} + \frac{\partial v_1}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = -\sin\varphi \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_2} - v\cos\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\,,\\
\frac{\partial v_2}{\partial x_1} &= \frac{\partial v_2}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = \cos\varphi \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\frac{\partial r}{\partial x_1} - v\sin\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\,.
\end{aligned}$$

Pošto je

$$\frac{\partial r}{\partial x_1} = \cos\varphi\,, \quad \frac{\partial r}{\partial x_2} = \sin\varphi\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} = -\frac{\sin\varphi}{r}\,, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} = \frac{\cos\varphi}{r}\,,$$

što se lako pokazuje, sledi:

$$\begin{aligned}
S_{11} &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{v}{r}\right)\sin 2\varphi\\
S_{12} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r} - \frac{v}{r}\right)\cos 2\varphi\,.
\end{aligned}$$

Zamenom dobijenih relacija u jednačinu (2), konačno se dobija diferencijalna jednačina koju zadovoljava temperatura:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\Gamma^2 \eta}{\pi^2 \rho c}\left[-\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{4\nu t}\right)\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{4\nu t}}\right]^2 + \frac{\kappa}{\rho c}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)\,.$$

Prvi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 4. mart 2010.

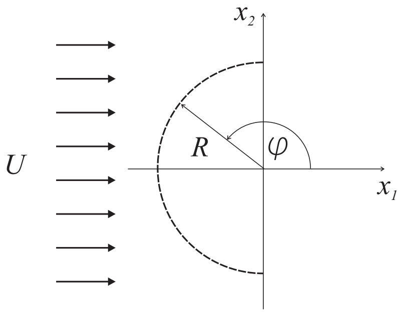
1. (30 poena) Polje brzine u Dekartovim koordinatama ima oblik

$$\vec{v} = A\frac{t}{x_1}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,\vec{e}_1\,,$$

gde je A zadata konstanta. **(a)** Naći polje ubrzanja. **(b)** Odrediti strujnu liniju koja u trenutku $t = t_0$ prolazi kroz tačku čije su koordinate (a, b, c). **(c)** Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ i formirati matricu koja odgovara tenzoru brzine deformacije. Uveriti se eksplicitnim računom da je div$\vec{\omega} = 0$. **(d)** Izraziti polje brzine u cilindričnim koordinatama.

2. (25 poena) Polje gustine u fluidu ima oblik $\rho = A/x_1$, za $x_1 > 0$. Položaj delića koji se u trenutku $t = 0$ nalazio u tački sa koordinatama (X_1, X_2, X_3) u bilo kom sledećem trenutku dat je izrazima: $x_1(t) = X_1[1 + \ln(Bt + 1)]$, $x_2(t) = X_2$, $x_3(t) = X_3$. **(a)** Naći polje brzine. **(b)** Izračunati brzinu promene gustine duž trajektorije delića (supstancijalni izvod gustine). **(c)** Izračunati protok kroz proizvoljnu površinu S, koja leži u ravni $x_1 = L$.

3. (20 poena) Fluid struji brzinom $\vec{v} = U\vec{e}_1$, gde je $U = \text{const}$. Na slici je prikazana projekcija zamišljene površine na ravan Ox_1x_2 (isprekidana linija). Duž x_3 ose "dubina" ove zamišljene površine je jedinična ($H = 1$). Izračunati zapreminski protok kroz takvu površinu, u funkciji R i U.



4. (25 poena) Fluid struji u oblasti $0 \le \varphi \le 3\pi/2$, tako da mu je polje brzine u cilindričnim koordinatama (r, φ, z) zadato izrazima:

$$v_r = -A\frac{\cos(2\varphi/3)}{r^{1/3}}\,, \quad v_\varphi = A\frac{\sin(2\varphi/3)}{r^{1/3}}\,, \quad v_z = 0\,,$$

gde je A pozitivna konstanta. **(a)** Naći jednačinu strujnih linija polazeći direktno od definicije strujne linije. **(b)** Uveriti se da su zadovoljeni uslovi za postojanje strujne funkcije ψ i naći je. **(c)** Naći jednačinu strujnih linija pomoću strujne funkcije, nađene u prethodnom delu zadatka. **(d)** Skicirati nekoliko strujnih linija.

Rešenja

1. **(a)** (8 poena)

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \vec{e}_1\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x_1}\right)\,, \tag{1}$$

gde je

$$v = A\frac{t}{x_1}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\,.$$

Pošto je

$$\frac{\partial v}{\partial t} = A\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_1}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x_1} = -At\frac{x_2^2}{x_1^2}(x_1^2 + x_2^2)^{-1/2}\,,$$

zamenom u izraz (1), dobija se da je polje ubrzanja:

$$\vec{a} = A\frac{\sqrt{x_1^2+x_2^2} - At^2x_2^2/x_1^2}{x_1}\vec{e}_1\,.$$

(b) (5 poena) Iz jednačine strujne linije $\mathrm{d}\vec{r} = \lambda\vec{v}$ za zadato polje brzine direktno slede jednačine $\mathrm{d}x_2 = 0$ i $\mathrm{d}x_3 = 0$, odakle se dobijaju jednačine ravni $x_2 = \mathrm{const} = b$ i $x_3 = \mathrm{const} = c$, čiji presek predstavlja traženu strujnu liniju. Dakle, tražena strujna linija je prava paralelna osi x_1 koja sadrži tačku (a, b, c).

(c) (10 poena)

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v} = -\frac{At}{2}\frac{x_2}{x_1}\frac{\vec{e}_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}} \quad\Rightarrow\quad \mathrm{div}\vec{\omega} = \frac{\partial}{\partial x_3}\left(-\frac{At}{2}\frac{x_2}{x_1}\frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\right) = 0$$

Pošto brzina ima samo $v_1 = v$ komponentu, koja zavisi samo od koordinata x_1 i x_2 jasno je da su sledeći parcijalni izvodi potrebni za formiranje tenzora čiji su elementi $\mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$ jednaki nuli:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} = \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0\,,$$

pa je

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{\partial v}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,, \quad \frac{\partial v}{\partial x_2} = \frac{Atx_2}{x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\,,$$

a tenzor brzine deformacije

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{T}+\mathcal{T}^T) = \begin{pmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{1}{2}\frac{\partial v}{\partial x_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{Atx_2}{2x_1\sqrt{x_1^2+x_2^2}}\begin{pmatrix} -2x_2/x_1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

(d) (7 poena) Pošto je $x_1 = r\cos\varphi$, $r = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$ i $\vec{e}_1 = \cos\varphi\vec{e}_r - \sin\varphi\vec{e}_\varphi$ direktnom zamenom u zadato polje brzine dobija se

$$\vec{v} = At(\vec{e}_r - \mathrm{tg}\varphi\,\vec{e}_\varphi)\,.$$

2. (a) (10 poena)

$$\vec{v} = \frac{dx_1}{\mathrm{d}t}\vec{e}_1 = \frac{X_1B}{Bt+1}\vec{e}_1 = \frac{\vec{e}_1}{1+\ln(Bt+1)}\frac{Bx_1}{Bt+1}$$

(b) (10 poena)

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot\mathrm{grad}\rho = v_1\frac{\partial\rho}{\partial x_1} = -\frac{AB}{x_1(Bt+1)}\frac{1}{1+\ln(Bt+1)}$$

(c) (5 poena) Pošto je za definisanu površinu $\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\,\vec{e}_1$ i $x_1 = L$ za protok se dobija

$$Q = \int\int_S \rho\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int\int_S \rho v_1\,\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3 = \frac{AB}{Bt+1}\frac{1}{1+\ln(Bt+1)}\int\int_S \mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

$$= \frac{ABS}{(Bt+1)[1+\ln(Bt+1)]}\,.$$

3. Zapreminski protok F jednak je

$$F = \int\int_S \vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S}\,,$$

pri čemu je u ovom slučaju $\mathrm{d}\vec{S} = -\vec{e}_r R \mathrm{d}z \mathrm{d}\varphi$, gde su (r, φ, z) cilindrične koordinate. Pošto je onda

$$\vec{v} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -UR\mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_r = -UR\cos\varphi \mathrm{d}z\mathrm{d}\varphi\,,$$

dalje sledi

$$F = -UR\int_0^1 \mathrm{d}z \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = -UR\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos\varphi \mathrm{d}\varphi = -UR\ \sin\varphi|_{\pi/2}^{3\pi/2} = 2UR\,.$$

4. (a) (10 poena) Iz definicione relacije za strujne linije: $\vec{v} = \lambda \mathrm{d}\vec{r}$ u cilindričnim koordinatama u ovom slučaju direktno slede jednačine $\mathrm{d}z = 0$, tj. $z = \mathrm{const}$ (strujne linije leže u ravnima normalnim na z-osu) i

$$\frac{r\mathrm{d}\varphi}{v_\varphi} = \frac{\mathrm{d}r}{v_r} \Rightarrow \frac{r\mathrm{d}\varphi}{\frac{\sin(2\varphi/3)}{r^{1/3}}} = -\frac{\mathrm{d}r}{\frac{\cos(2\varphi/3)}{r^{1/3}}} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}r}{r} = -\frac{\cos(2\varphi/3)\mathrm{d}\varphi}{\sin(2\varphi/3)} = -\frac{3}{2}\frac{\mathrm{d}[\sin(2\varphi/3)]}{\sin(2\varphi/3)}\,,$$

odakle je

$$\mathrm{d}(\ln r) = -\frac{3}{2}\mathrm{d}\{\ln[\sin(2\varphi/3)]\} \Rightarrow r^{-2/3} = K\sin(2\varphi/3)\,,$$

gde je K integraciona konstanta.

(b) (10 poena) Zamenom komponenata brzine u izraz za divergenciju vektora u cilindričnim koordinatama, lako se proverava da je zadovoljen uslov nestišljivosti: $\mathrm{div}\vec{v} = 0$. Kako brzina nema z-komponentu, a v_r i v_φ komponenta ne zavise od z-koordinate, jasno je da se radi o dvodimenzionalnom strujanju, pa je moguće uvesti strujnu funkciju ψ. Iz relacije koja povezuje v_r komponentu brzine i funkciju ψ:

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}$$

sledi

$$-A\frac{\cos(2\varphi/3)}{r^{1/3}} = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \Rightarrow \frac{\partial\psi}{\partial\varphi} = -Ar^{2/3}\cos(2\varphi/3) \Rightarrow$$

$$\psi = -Ar^{2/3}\int \cos(2\varphi/3)\mathrm{d}\varphi + f(r) = -\frac{3}{2}Ar^{2/3}\sin(2\varphi/3) + f(r)\,.$$

Zamenom tako dobijenog izraza za ψ u relaciju koja povezuje v_φ i ψ:

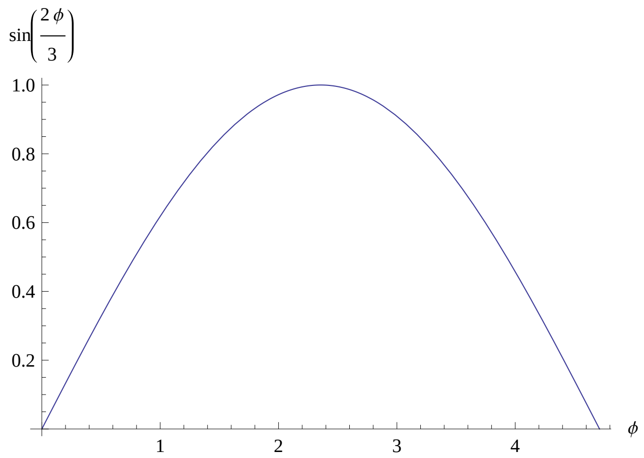
$$v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}$$

dobija se uslov $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}r} = 0$, odakle je $f = \mathrm{const}$, tako da je konačni izraz za strujnu funkciju

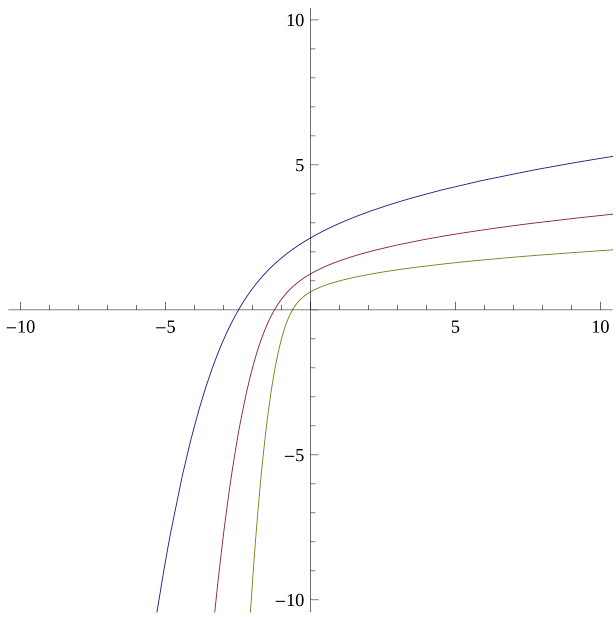
$$\psi = -\frac{3}{2}Ar^{2/3}\sin(2\varphi/3) + \mathrm{const}\,.$$

(c) (3 poena) Izjednačavanjem strujne funkcije sa konstantom, uz uslov $z = \text{const}$, dobija se jednačina strujne linije: $r^{2/3}\sin(2\varphi/3) = \text{const}$, što se, naravno, poklapa sa izrazom dobijenim direktno rešavanjem jednačina koje slede iz definicije strujne linije.

(d) (2 poena) Funkcija $\sin(2\varphi/3)$ u oblasti $0 \le \varphi \le 3\pi/2$ izgleda kao na sledećoj slici:



tj. ima maksimalnu vrednost za $\varphi = 3\pi/4$. Odatle je jasno da će kriva $r = \text{const}/[\sin(2\varphi/3)]^{3/2}$ biti simetrična u odnosu na polupravu $\varphi = 3\pi/4$ i da će r imati minimalnu vrednost upravo za $\varphi = 3\pi/4$. Kada se φ približava vrednosti 0 (ili $3\pi/2$) koordinata r će postajati beskonačno velika i to što je φ manje to će r biti veće, tako da strujna linija za nekoliko vrednosti konstante izgleda kao na sledecoj slici:



Primedba za one koji su pokušali da nacrtaju strujne linije uz pomoć računara:

Prethodna slika dobijena je korišćenjem programskog paketa *Mathematica*, pomoću naredbe

```
PolarPlot[1/(Sin[2 t/3])^(3/2), {t, 0 + 0.1, 3 Pi/2 - 0.1}]
```

Od vas se očekivalo da linije samo skicirate uz pomoć nekoliko karakterističnih tačaka, uzimajući u obzir ono što je gore napisano o simetriji i toku funkcije.

Prvi kolokvijum iz Fizike kontinuuma - 25. mart 2010.

1. (20 poena) Kretanje u nekoj kontinualnoj sredini je u Lagranževom opisu zadato jednačinama:

$$x_1 = X_1\,, \quad x_2 = X_2 + X_1(\mathrm{e}^{-2t} - 1)\,, \quad x_3 = X_3 + X_1(\mathrm{e}^{-3t} - 1)\,.$$

Naći polja brzine i ubrzanja.

2. (80 poena) Polje brzine u cilindričnim koordinatama (r, φ, z) ima oblik $\vec{v} = -r^3\vec{e}_\varphi$. Naći:

(a) polje brzine u Dekartovim koordinatama;

(b) matricu koja odgovara tenzoru brzine deformacije;

(c) vektor vrtložnosti;

(d) strujnu funkciju;

(e) trajektoriju delića koji se u početnom trenutku $t = 0$ nalazio u tački (X_1, X_2, X_3);

(f) strujne linije;

(g) vrtložne linije;

(h) fluks vektora vrtložnosti kroz površinu kruga jediničnog poluprečnika, koji leži u ravni $z = 0$, a centar mu je u koordinatnom početku.

REŠENJA

1. U Lagranževim promenljivim komponente brzine su jednake

$$\begin{aligned} v_1^L &= \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}X_1}{\mathrm{d}t} = 0\,, \\ v_2^L &= \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X_2 + X_1(\mathrm{e}^{-2t} - 1)] = -2X_1\mathrm{e}^{-2t}\,, \\ v_3^L &= \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[X_3 + X_1(\mathrm{e}^{-3t} - 1)] = -3X_1\mathrm{e}^{-3t}\,. \end{aligned} \tag{1}$$

Polje brzine se iz prethodnih izraza dobija tako što se Lagranževe promenljive (X_1, X_2, X_3) zamene Ojlerovim, što se u ovom slučaju svodi samo na zamenu $X_1 = x_1$, tako da je polje brzine

$$\vec{v} = -2x_1\mathrm{e}^{-2t}\vec{e}_2 - 3x_1\mathrm{e}^{-3t}\vec{e}_3\,.$$

Odatle se polje brzine nalazi po formuli za supstancijalni izvod brzine

$$\vec{a} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + v_2\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2} + v_3\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = 4x_1\mathrm{e}^{-2t}\vec{e}_2 + 9x_1\mathrm{e}^{-3t}\vec{e}_3\,.$$

2. **(a)** Pošto je $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2$, $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$ i $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ brzina je

$$\vec{v} = -r^3\vec{e}_\varphi = -r^3(-\sin\varphi\vec{e}_1 + \cos\varphi\vec{e}_2) = -(x_1^2 + x_2^2)(-x_2\vec{e}_1 + x_1\vec{e}_2)\,.$$

(b) Pošto je

$$v_1 = x_2 x_1^2 + x_2^3\,, \quad v_2 = -x_1^3 - x_1 x_2^2\,, \quad v_3 = 0\,,$$

parcijalni izvodi komponenata brzina po koordinatama su:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 2x_1x_2\,, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = x_1^2 + 3x_2^2\,, \quad \frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0\,,$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = -3x_1^2 - x_2^2\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -2x_1x_2\,, \quad \frac{\partial v_2}{\partial x_3} = 0\,,$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial x_1} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0\,,$$

pa je tenzor brzine deformacije u Dekartovim koordinatama reprezentovan matricom

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \mathcal{T}^T) = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_1^2 + 3x_2^2 & 0 \\ -3x_1^2 - x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & -3x_1^2 - x_2^2 & 0 \\ x_1^2 + 3x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

$$= \begin{pmatrix} 2x_1x_2 & -x_1^2 + x_2^2 & 0 \\ -x_1^2 + x_2^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,,$$

gde je iskorišćen tenzor čiji su elementi $\mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

(c) U Dekartovim koordinatama:

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2}\right)\vec{e}_3 = \frac{1}{2}[-3x_1^2 - x_2^2 - (x_1^2 + 3x_2^2)]\vec{e}_3 = -2(x_1^2 + x_2^2)\vec{e}_3 \end{aligned}$$

U cilindričnim koordinatima:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\mathrm{rot}\vec{v} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & -r^4 & 0 \end{vmatrix} = -2r^2\vec{e}_z$$

(d) U Dekartovim koordinatama:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}\,, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}$$

Iz prve od prethodne dve relacije sledi:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_2} = x_2 x_1^2 + x_2^3 \;\Rightarrow\; \psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4}x_2^4 + F(x_1)\,,$$

pa se zamenom tako nađenog izraza za strujnu funkciju u drugu relaciju dobija

$$v_2 = -x_1 x_2^2 - \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}x_1} \Rightarrow -x_1^3 - x_1 x_2^2 = -x_1 x_2^2 - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_1} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_1} = x_1^3 \Rightarrow F = \frac{1}{4}x_1^4 + \mathrm{const}\,,$$

tako da je strujna funkcija jednaka

$$\psi(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^2 x_2^2 + \frac{1}{4}x_2^4 + \frac{1}{4}x_1^4 + \mathrm{const} = \frac{1}{4}(x_1^2 + x_2^2)^2 + \mathrm{const}\,.$$

U cilindričnim koordinatama je

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\,,$$

odakle sledi da ψ ne zavisi od φ (pošto je $v_r = 0$), tj. $\psi = \psi(r)$. Pošto je

$$v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}\,, \quad v_\varphi = -r^3\,,$$

dalje se dobija

$$\psi = \frac{1}{4}r^4 + \mathrm{const}\,,$$

što se poklapa sa izrazom dobijenom u Dekartovim koordinatama, ako se uzme u obzir da je $r^2 = x_1^2 + x_2^2$.

(e), (f) Pošto je polje brzine stacionarno, trajektorije delića se poklapaju sa strujnim linijama, koje se najlakše dobijaju iz jednačine $\psi = \mathrm{const}$. Poslednja jednačina, uz prethodno nađeni izraz za ψ, daje uslov $r^4 = \mathrm{const}$, odnosno $r = \mathrm{const}$. Uz uslov $z = \mathrm{const}$ (koji sledi iz $v_z = 0$), to znači da su strujne linije kružnice koje leže u ravnima ortogonalnim na z-osu, a centar im je upravo na z-osi. Tražena trajektorija je onda kružnica određena jednačinama $r = \sqrt{X_1^2 + X_2^2}$, $z = X_3$.

(g) Iz definicije vrtložne linije $\vec{\omega} = \lambda \mathrm{d}\vec{r}$ i nađenog izraza za $\vec{\omega}$ sledi

$$-2r^2\vec{e}_z = \lambda(\mathrm{d}r\vec{e}_r + r\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi + \mathrm{d}z\vec{e}_z) \Rightarrow \mathrm{d}r = 0\,, \quad \mathrm{d}\varphi = 0 \Rightarrow r = \mathrm{const},\ \varphi = \mathrm{const}\,.$$

Pošto jednačina $r = \mathrm{const}$ predstavlja cilindričnu površinu, a $\varphi = \mathrm{const}$ jednačinu poluravni koja sadrži z-osu, presek ove dve površine je prava pralelna z-osi i ona upravo predstavlja vrtložnu liniju.

Slično bi se u Dekartovim koordinatama dobili uslovi $\mathrm{d}x_1 = 0$ i $\mathrm{d}x_2 = 0$, tj. jednačine koordinatnih ravni $x_1 = \mathrm{const}$ i $x_2 = \mathrm{const}$, čiji presek je ponovo prava paralelna x_3-, tj. z-osi.

(h) Fluks vektora vrtložnosti jednak je

$$\int\int_S \vec{\omega}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\,, \quad \mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S\vec{e}_z = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\vec{e}_z\,,$$

pa je

$$\int\int_S \vec{\omega}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \int_0^1\int_0^{2\pi}\omega r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = -2\int_0^1\int_0^{2\pi} r^3\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi = -2\int_0^1 r^3\mathrm{d}r\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = -\pi$$

Drugi način:

$$\int\int_S \vec{\omega}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\int\int_S \mathrm{rot}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{2}\oint_{r=1}\vec{v}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{1}{2}\oint_{r=1}(-r^3\vec{e}_\varphi)\cdot(r\mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi) = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = -\pi$$

Drugi domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 1. april 2010.

1. (30 poena) Razmotriti šolju u kojoj se nalazi kafa sa šlagom. Šolja ima približno konusni oblik i u cilindričnim kooridinatama njena jednačina je $r(z) = a + z$, pri čemu je $0 \leq z \leq h$ (h je visina šolje). Gustine kafe i šlaga su ρ_{k} i ρ_{s} respektivno i važi da je gustina šlaga manja od gustine kafe ($\rho_s < \rho_k$). Na početku, kafu i šlag možemo da posmatramo kao dva odvojena fluida, sloj kafe je dole $z \in (0, \frac{9}{10}h)$ a sloj šlaga je iznad kafe $z \in (\frac{9}{10}h, h)$. Pritisak na vrhu gornje tečnosti je jednak atmosferskom p_0 a ubrzanje sile teže je g.
a) Naći masu kafe i masu šlaga koje se nalaze u šolji.
b) Odrediti silu koja deluje na donju površinu šolje.
c) Pretpostaviti da su kafa i šlag promešani i da sada čine homogen fluid. Kolika je u tom slučaju sila koja deluje na donju površinu šolje. Uporediti ovu silu sa silom koja je dobijena pod b). Objasniti zašto postoji razlika.

2. (10 poena) Tenzor napona unutar sredine u kojoj nema zapreminskih sila zadat je matricom

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 & T_{12}(x_1, x_2) & 0 \\ T_{12}(x_1, x_2) & x_1 - 2x_2 & 0 \\ 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix}.$$

Znajući da su delići fluida u ravnoteži, kao i da je napon koji deluje na ravan $x_1 = 1$ jednak $\vec{P} = (1 + x_2)\vec{e}_1 + (5 - x_2)\vec{e}_2$ odrediti $T_{12}(x_1, x_2)$.

3. (25 poena) Stoksov fluid koeficijenta viskoznosti μ i gustine ρ stacionarno protiče između dva beskonačna, koaksijalna cilindra. Unutrašnji cilindar poluprečnika a rotira konstantnom ugaonom brzinom ω a spoljašnji poluprečnika b miruje. Osa cilindara se poklapa sa z-osom. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_z$. Pretpostavljajući da je brzina delića fluida oblika $\vec{v}(r) = v_\varphi(r)\vec{e}_\varphi + v_z(r)\vec{e}_z$ odrediti profil brzine.

4. (35 poena) Dva Stoksova fluida nalaze se na strmoj ravni nagibnog ugla α u homogenom gravitacionom polju $\vec{g}$. Oba fluida imaju istu gustinu ρ, ali su koeficijenti viskoznosti različiti μ_1 i μ_2. Donji fluid ima visinu h_1 a gornji h_2. Zanemarujući viskoznu silu vazduha iznad gornjeg fluida, uzimajući da je pritisak na slobodnu površ konstantan i da je polje brzine u fluidima oblika $\vec{v}_i = v_i(y)\vec{e}_x$, odrediti polje brzine oba fluida.

Rešenje:

1. a) Na početku, kafa zauzima deo šolje koje se najlakše može opisati u cilindričnim koordinatama $V_{\mathrm{k}} = \{(r, \varphi, z) | 0 < r \leq a + z, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0 \leq z \leq 0.9h\}$. Zbog toga je masa kafe u šolji jednaka:

$$m_{\mathrm{k}} = \int \rho_{\mathrm{k}} \mathrm{d}V = \rho_{\mathrm{k}} \int_0^{0.9h} \int_0^{a+z} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = \frac{9\pi h \rho_{\mathrm{k}}}{1000} \left(100a^2 + 90ah + 27h^2\right).$$

Slično zaključujemo da šlag zauzima deo prostora $V_{\mathrm{s}} = \{(r, \varphi, z) | 0 < r \leq a + z, 0 \leq \varphi < 2\pi, 0.9h \leq z \leq h\}$, pa se dobija da je masa šlaga u šolji:

$$m_{\mathrm{s}} = \int \rho_{\mathrm{s}} \mathrm{d}V = \rho_{\mathrm{s}} \int_{0.9h}^{h} \int_0^{a+z} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}z r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = \frac{\pi h \rho_{\mathrm{s}}}{3000} \left(300a^2 + 570ah + 271h^2\right).$$

b) Sila na donju površinu šolje nastaje usled pritiska kojim fluid deluje na šolju $\vec{F} = \int p\mathrm{d}S\vec{n}$. Ovde je $\vec{n} = -\vec{e}_z$ ort normale na površinu tečnosti, p je pritisak tečnosti na šolju, a $\mathrm{d}S = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$ element granične površi (u ovom slučaju $r \in (0, a)$). Pošto se tečnost nalazi u homogenom gravitacionom polju, imamo da je $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho g$, pri čemu se gustina menja na sledeći način: $\rho(z) = \begin{cases} \rho_\mathrm{s}, & z \in (\frac{9}{10}h, h) \\ \rho_\mathrm{k}, & z \in (0, \frac{9}{10}h) \end{cases}$ i još znamo da je na granici šlag-vazduh pritisak jednak atmosferskom $p(z = h) = p_0$. Pritisak u šlagu nalazimo integraleći jednačinu $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}z} = -\rho_\mathrm{s} g$ iz čega se dobija $p = -\rho_\mathrm{s} g z + c_1$. Konstantu c_1 dobijamo iz uslova $p(z = h) = p_0$, tako da je $p = p_a + \rho_\mathrm{s} g(h - z)$. Na granici šlag-kafa, pritisak je jednak $p(z = \frac{9}{10}h) = p_a + \frac{1}{10}\rho_\mathrm{s} g h$. U kafi pritisak je $p = -\rho_\mathrm{k} g z + c_2$. Konstanta c_2 se određuje iz uslova neprekidnosti pritiska na granici kafe sa šlagom, tako da se dobija $p = p_a + \frac{1}{10}gh(\rho_\mathrm{s} + 9\rho_\mathrm{k}) - \rho_\mathrm{k} g z$. Sad vidimo da je pritisak tečnosti na šolju jednak $p = p_a + \frac{1}{10}gh(\rho_\mathrm{s} + 9\rho_\mathrm{k})$, pa je sila koja deluje na donju površinu šolje jednaka

$$\vec{F}_b = -a^2\pi \left(p_a + \frac{1}{10} gh(\rho_\mathrm{s} + 9\rho_\mathrm{k}) \right) \vec{e}_z.$$

c) Nakon mešanja, nastaje homogeni fluid, koji ispunjava čitavu šolju, zapremine $V = \frac{h^3 + 3h^2 a + 3ha^2}{3}\pi$. Gustina tog fluida je $\rho_\mathrm{m} = \frac{m_\mathrm{k} + m_\mathrm{s}}{V} = \frac{27(100a^2 + 90ah + 27h^2)\rho_\mathrm{k} + (300a^2 + 570ah + 271h^2)\rho_\mathrm{s}}{1000(h^2 + 3ha + 3a^2)}$. Pritisak na donju površinu šolje se određuje na sličan način kao u delu pod b) (samo sad imamo jedan fluid) i dobija se $p = p_a + \rho_\mathrm{m} gh$, pa je odgovarajuća sila na donju površinu šolje jednaka:

$$\vec{F}_c = -a^2\pi \left(p_a + \frac{27(100a^2 + 90ah + 27h^2)\rho_\mathrm{k} + (300a^2 + 570ah + 271h^2)\rho_\mathrm{s}}{1000(h^2 + 3ha + 3a^2)} gh \right) \vec{e}_z.$$

Razlika između sile koja deluje pre mešanja i posle mešanja je u drugom sabirku u zagradi. Pretpostavimo da je intenzitet sile koju pravi mešavina na šolju veća. To je ekvivalentno sa uslovom: $\frac{27(100a^2 + 90ah + 27h^2)\rho_\mathrm{k} + (300a^2 + 570ah + 271h^2)\rho_\mathrm{s}}{1000(h^2 + 3ha + 3a^2)} gh > \frac{1}{10}gh(\rho_\mathrm{s} + 9\rho_\mathrm{k})$, što je ekvivalentno sa $9((279a^2 + 267ah + 80h^2)\rho_\mathrm{k} + 3(11a^2 + 21ah + 10h^2)\rho_\mathrm{s}) > 0$ a to je sigurno tačno. Dakle, $F_c > F_b$. Sila koja deluje u slučaju mešavine je veća, jer je tada fluid gušći na većim visinama.

2. Ako se delići fluida nalaze u ravnoteži unutar sredine u kojoj nema zapreminskih sila, tenzor napona zadovoljava sledeću jednačinu $\mathrm{div}\mathcal{P} = 0$. U našem slučaju, ovaj uslov daje dve jednačine

$$1 + \frac{\partial T_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial T_{12}}{\partial x_1} - 2 = 0.$$

Rešavanjem ovig parcijalnih diferencijalnih jednačina, dobija se nepoznata funkcija do na konstantu $T_{12}(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + C$. Konstantu C određujemo iz uslova da je vektor napona na ravan $x_1 = 1$ jednak $\vec{P} = (1 + x_2)\vec{e}_1 + (5 - x_2)\vec{e}_2$. Naime, ort normale na ravan $x_1 = 1$ je $\vec{n} = \vec{e}_1$, pa je napon jednak $\vec{P} = \mathcal{P}\vec{e}_1 = (1 + x_2)\vec{e}_1 + (2 - x_2 + C)\vec{e}_2$. Izjednačavajući ovaj izraz sa datom vrednošću za $\vec{P}$, dobija se da je $C = 3$, pa je tražena funkcija

$$T_{12}(x_1, x_2) = 2x_1 - x_2 + 3.$$

3. Profil brzine se dobija resavanjem Navije-Stoksove (NS) jednačine

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{v}.$$

Za pretpostavljeni oblik brzine, leva strana jednačine je $\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -\frac{v_\varphi^2}{r}\vec{e}_r$. Koristeći poznatu formulu $\Delta\vec{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{v}$ i simetriju posmatranog sistema, dobija se:

$$-\frac{v_\varphi^2}{r}\vec{e}_r = -g\vec{e}_z - \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{\partial p}{\partial z}\vec{e}_z\right) + \frac{\mu}{\rho}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rv_\varphi)}{\mathrm{d}r}\right)\vec{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right)\vec{e}_z\right].$$

Traženi profil brzine se dobija množenjem ove jednačine s ortovima cilindričnog koordinatnog sistema. Tako se množenjem s $\vec{e}_\varphi$ dobija

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}(rv_\varphi)}{\mathrm{d}r}\right) = 0,$$

čijim rešavanjem se dobija $v_\varphi(r) = A_1 r + \frac{A_2}{r}$. Nepoznate konstante A_1 i A_2 se dobijaju iz graničnih uslova $v_\varphi(r = a) = \omega a$ i $v_\varphi(r = b) = 0$, tako da se konačno dobija da je

$$v_\varphi(r) = \frac{\omega a^2}{r}\frac{b^2 - r^2}{b^2 - a^2}.$$

Množeći NS jednačinu s $\vec{e}_z$ dobija se

$$0 = -g - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\mu}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right),$$

što je ekvivalentno sa

$$\frac{\mu}{\rho}\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}r}\right) = g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Koristeći projekciju NS jednačine na $\vec{e}_r$, pokazuje se da je desna strana poslednje jednačine jednaka konstanti $C = g + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}$. Sad je moguće integraliti gornju jednačinu i dobija se $v_z(r) = \frac{C\rho}{\mu}\frac{r^2}{4} + B_1 \ln r + B_2$. Konstante B_1 i B_2 se dobijaju iz graničnih uslova $v_z(r = a) = v_z(r = b) = 0$, tako da je konačno:

$$v_z(r) = \frac{C\rho}{4\mu}\left(r^2 - a^2 - (b^2 - a^2)\frac{\ln\frac{r}{a}}{\ln\frac{b}{a}}\right).$$

4. Navije-Stoksova (NS) jednačina glasi

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \frac{\mu}{\rho}\Delta\vec{v}.$$

Gustina u oba sloja je ρ, ali se koeficijenti viskoznosti razlikuju: u prvom sluju je μ_1 a u drugom μ_2. Za pretpostavljeni oblik brzine, leva strana NS jednačine je nula. Zapreminska sila jednaka je gravitacionom ubrzanju $\vec{f} = \vec{g}$. Kada se NS jednačina prvog sloja projektuje na ose Dekartovog koordinatnog sistema dobija se:

$$\mathrm{NS}\cdot\vec{e}_y \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_1}{\partial y} - g\cos\alpha \Rightarrow p_1 = -\rho g y\cos\alpha + f_1(x).$$

$$\mathrm{NS}\cdot\vec{e}_x \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} + g\sin\alpha + \frac{\mu_1}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2 v_1}{\mathrm{d}y^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = c_1.$$

Slično se za drugi sloj dobija

$$\mathrm{NS}\cdot\vec{e}_y \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_2}{\partial y} - g\cos\alpha \Rightarrow p_1 = -\rho g y\cos\alpha + f_2(x).$$

$$\mathrm{NS}\cdot\vec{e}_x \Rightarrow 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} + g\sin\alpha + \frac{\mu_2}{\rho}\frac{\mathrm{d}^2 v_2}{\mathrm{d}y^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = c_2.$$

Pritisak na slobodnoj površi $y = h_1 + h_2$ je p_0:

$$p_0 = -\rho g(h_1+h_2)\cos\alpha + f_2(x) \Rightarrow f_2(x) = p_0 + \rho g(h_1+h_2)\cos\alpha \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x} = 0.$$

Pritisak je neprekidan i na granici $y = h_1$

$$p_0 + \rho g h_2\cos\alpha = -\rho g h_1\cos\alpha + f_1(x) \Rightarrow f_1(x) = p_0 + \rho g(h_1+h_2)\cos\alpha \Rightarrow \frac{\mathrm{d}f_1}{\mathrm{d}x} = 0,$$

tako je da pritisak:

$$p(x) = p_0 + \rho g(h_1+h_2-y)\cos\alpha.$$

Projekcije NS jednačine na x-osu sad postaju:

$$0 = \rho g\sin\alpha + \mu_i\frac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}y^2}, \qquad (i = 1,2),$$

čijim se integracijama dobija:

$$v_1(y) = -\frac{\rho g}{2\mu_1}y^2\sin\alpha + c_{11}y + c_{12},$$

$$v_2(y) = -\frac{\rho g}{2\mu_2}y^2\sin\alpha + c_{21}y + c_{22}.$$

Konstante određujemo na osnovu graničnih uslova, brzina na donjoj ploči je nula $v_1(y=0) = 0$; neprekidnost brzine na granici između slojeva $v_1(y=h_1) = v_2(y=h_1)$; balans viskoznih sila na granici $y = h_1$ se svodi na $\mu_1\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=h_1} = \mu_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=h_1}$; ne postojanje viskozne sile na slobodnoj površi $y = h_1 + h_2$ što daje $\mu_2\frac{\mathrm{d}v_2}{\mathrm{d}y}\Big|_{y=h_1+h_2} = 0$. Ovi granični uslovi daju vrednosti konstanti

$$c_{12} = 0, \qquad c_{21} = \frac{\rho g}{\mu_2}(h_1+h_2)\sin\alpha, \qquad c_{11} = \frac{\rho g}{\mu_1}(h_1+h_2)\sin\alpha,$$

$$c_{22} = \rho g\sin\alpha\left(\frac{h_1^2}{2} - (h_1+h_2)h_1\right)\left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right),$$

pa je konačno polje brzine:

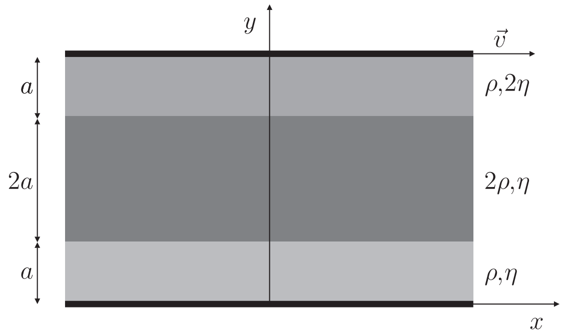
$$v_1(y) = \frac{\rho g}{\mu_1}\sin\alpha\left((h_1+h_2)y - \frac{y^2}{2}\right),$$

$$v_2(y) = \rho g\sin\alpha\left(\frac{1}{\mu_2}\left((h_1+h_2)y - \frac{y^2}{2}\right) + \left(\frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1}\right)\left(\frac{h_1^2}{2} - (h_1+h_2)h_1\right)\right).$$

Drugi kolokvijum iz FIZIKE KONTINUUMA
13. maj 2010.

Prostor između dve ploče ispunjen je sa tri sloja Stoksovih tečnosti. Na donjoj ploči, koja miruje, nalazi se fluid visine a, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η. Iznad ovog sloja je fluid debljine $2a$, gustine 2ρ i koeficijenta viskoznosti η. Na srednji sloj je stavljen poslednji sloj debljine a, gustine ρ i koeficijenta viskoznosti 2η. Poslednji sloj je pokriven beskonačnom pločom koja se kreće brzinom v u svojoj ravni.

1. (70 poena) Naći profil brzine unutar fluida ako je poznato da je gradijent pritiska nula i da se zapreminske sile mogu zanemariti.
2. (15 poena) Odrediti kolikom silom po jedinici površine je potrebno vući gornju ploču da bi se ona kretala brzinom v.
3. (15 poena) Izračunati moment sile kojom fluid deluje na zamišljeni krug poluprečnika a čiji se centar u početnom trenutku nalazi iznad koordinatnog početka, na gornjoj ploči.



Rešenje

Neka je brzina u najnižem sloju $\vec{v}_1$, u srednjem $\vec{v}_1$, a u gornjem sloju označimo je sa $\vec{v}_3$. Fluidi se kreću usled pomeranja gornje ploče (kao kod Kuetovog proticanja) pa možemo da zaključimo da u svim fluidima brzina ima oblik $\vec{v}_1 = v_1(y)\vec{e}_x$.

1. Za pretpostavljeni oblik brzine, Navije-Stoksova jednačina se u svim slojevima svodi na isti oblik $\frac{\mathrm{d}^2 v_i}{\mathrm{d}y^2} = 0$. Integracija ove jednačine daje kako izgledaju brzine u pojedinim slojevima:

$$v_1(y) = A_1 y + A_2, \quad v_2(y) = B_1 y + B_2, \quad v_3(y) = C_1 y + C_2.$$

Konstante A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 i C_2 određujemo na osnovu graničnih uslova. Neprekodnost brzine na granicama daje sledeće granične uslove:

$$v_1(y=0) = 0, \quad v_1(y=a) = v_2(y=a), \quad v_2(y=3a) = v_3(y=3a), \quad v_3(y=4a) = v,$$

što dalje:

$$A_2 = 0, \quad A_1 a = B_1 a + B_2, \quad 3aB_1 + B_2 = 3aC_1 + C_2, \quad 4aC_1 + C_2 = v.$$

Dodatna dva granična uslova dobijaju se iz činjenice da su vektori napona na granicama slojeva suprotni vektori:

$$\vec{P}^1_{\vec{e}_y}\Big|_{y=a} = -\,\vec{P}^2_{-\vec{e}_y}\Big|_{y=a}, \quad \vec{P}^2_{\vec{e}_y}\Big|_{y=3a} = -\,\vec{P}^3_{-\vec{e}_y}\Big|_{y=3a}.$$

Tenzor napona je $\mathcal{P}_i = -p_i\mathcal{I} + 2\eta_i\mathcal{S}$, tako da u našem slučaju dobijamo:

$$\mathcal{P}_1 = \begin{pmatrix} -p_1 & \eta A_1 & 0 \\ \eta A_1 & -p_1 & 0 \\ 0 & 0 & -p_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_2 = \begin{pmatrix} -p_2 & \eta B_1 & 0 \\ \eta B_1 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{P}_3 = \begin{pmatrix} -p_3 & 2\eta C_1 & 0 \\ 2\eta C_1 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix},$$

pa se traženi granični uslovi lako nalaze:

$$\eta A_1 = \eta B_1, \quad \eta B_1 = 2\eta C_1.$$

Tražene konstante su:

$$A_1 = B_1 = \frac{2v}{7a}, \quad A_2 = B_2 = 0, \quad C_1 = \frac{v}{7a}, \quad C_2 = \frac{3v}{7},$$

pa je brzina jednaka:

$$v(y) = \begin{cases} \frac{2v}{7a}y, & y \in (0,a) \\ \frac{2v}{7a}y, & y \in (a,3a) \\ \frac{v}{7a}y + \frac{3v}{7}, & y \in (3a,4a) \end{cases}.$$

2. Da bi se gornja ploča kretala brzinom v potrebno je na nju delovati silom F koja je po intenzitetu jednaka viskoznoj sili (kojom fluid deluje na ploču). Zato je potrebno da odredimo viskoznu silu koja deluje na jedinicu površine. Pošto je vektor napona na gornju ploču jednak

$$\vec{P} = \mathcal{P}_3 \vec{e}_y = \begin{pmatrix} -p_3 & 2\eta C_1 & 0 \\ 2\eta C_1 & -p_3 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2\eta v}{7a} \\ -p_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dobijamo da je viskozna sila po jedinici površine jednaka

$$\frac{F}{S} = \frac{2\eta v}{7a}.$$

Ova sila ima isti pravac i smer kao i vektor brzine gornje ploče.

3. Položaj tačke na krugu može da prikaže kao $\vec{r} = r\vec{e}_r = \cos\varphi \vec{e}_x + r\sin\varphi \vec{e}_y$. Pošto je $\mathrm{d}\vec{F} = \mathcal{P}_3 \vec{e}_y \mathrm{d}S = \frac{2\eta v}{7a}\vec{e}_x - p_3\vec{e}_y$ infinitezimalni moment sile je

$$\mathrm{d}\vec{L} = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r\cos\varphi & r\sin\varphi & 0 \\ \frac{2\eta v}{7a} & -p_3 & 0 \end{vmatrix} \mathrm{d}S = -(p_3 r\cos\varphi + \frac{2\eta v}{7a}\sin\varphi)\vec{e}_z,$$

dok je ukupni moment sile jednak

$$\vec{L} = -\vec{e}_z \int_0^a \int_0^{2\pi} (p_3 r\cos\varphi + \frac{2\eta v}{7a}\sin\varphi) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\varphi = 0.$$

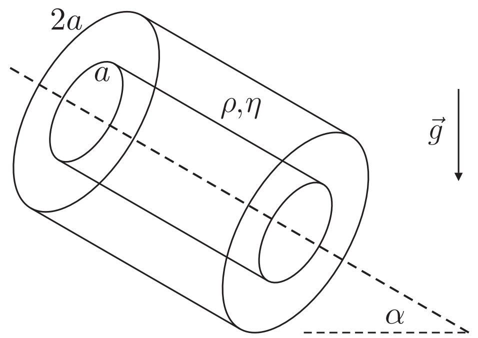
Drugi kolokvijum iz FIZIKE KONTINUUMA

drugi pokušaj

1. jun 2010.

Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η stacionarno protiče između dve koncentrične cevi poluprečnika a i $2a$. Ose cevi sa horizontalom zaklapaju ugao α. Fluid protiče paralelno osama cevi (paralelan tok), a intenzitet brzine zavisi samo od udaljenosti od graničnih cilindara. Sistem se nalazi u homogenom gravitacionom polju.

1. (25 poena) Pokazati da je projekcija gradijenta pritiska na osu cilindra konstantna.
2. (45 poena) Ako je ta projekcija poznata, naći profil brzine.
3. (30 poena) Odrediti viskoznu silu kojom fluid deluje na jedinicu dužine spoljašnjeg cilindra.



Rešenje

Koordinatni sistem postavimo tako da se z-osa poklapa sa osom cilindara, a y-osa je normalna na ravan vertikale.

1. Polje brzine u ovom sistemu onda ima oblik $\vec{v} = v(x,y)\vec{e}_z = v(r)\vec{e}_z$, tako da je Stoksova jednačina:
$$0 = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \vec{g} + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}.$$
Pošto je $\vec{g} = -g\cos\alpha\vec{e}_x + g\sin\alpha\vec{e}_z$, dobijamo da su projekcije Stoksove jednačine na ose Dekartovog koordinatnog sistema:
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - g\cos\alpha, \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad 0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g\sin\alpha + \frac{\eta}{\rho}\Delta v.$$
Projekcija pritiska na osu cilindra je $\frac{\partial p}{\partial z} = g\rho\sin\alpha + \eta\Delta v$. Potrebno je pokazati da je ova veličina konstantna. Koristeći prvu jednačinu, dobija se da je $\frac{\partial^2 p}{\partial x\partial z} = 0$, dok se iz druge dobija $\frac{\partial^2 p}{\partial y\partial z} = 0$, iz čega sledi da $\frac{\partial p}{\partial z}$ ne zavisi od x i y. Iz treće jednačine se dobija da je $\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$, tako da zaključujemo da $\frac{\partial p}{\partial z}$ ne zavisi ni od z koordinate, odnosno da je konstanta:
$$\frac{\partial p}{\partial z} = K.$$

2. Koristeći dobijeni rezultat, z-projekcija Stoksove jednačine može se napisati $\Delta v = \frac{K-\rho g\sin\alpha}{\eta}$. Desna strana jednačine je konstanta koju ćemo označiti sa $C = \frac{K-\rho g\sin\alpha}{\eta}$ tako da je $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = C$. Integracija ove jednačine daje
$$v(r) = \frac{C}{4}r^2 + D_1\ln r + D_2.$$

Konstante D_1 i D_2 određujemo na osnovu graničnih uslova $v(r=a)=0$ i $v(r=2a)=0$:

$$0=\frac{C}{4}a^2+D_1\ln a+D_2,\quad 0=\frac{C}{4}4a^2+D_1\ln 2a+D_2,$$

tako da su

$$D_1=-\frac{3Ca^2}{4\ln 2},\quad D_2=-\frac{Ca^2}{4}\left(1-\frac{3\ln a}{\ln 2}\right),$$

pa je traženo polje brzine

$$\vec{v}(r)=\left[\frac{C}{4}\left(r^2-a^2\right)-\frac{3Ca^2}{4\ln 2}\ln\frac{r}{a}\right]\vec{e}_z.$$

3. Viskoznu silu dobijamo iz viskoznog tenzora napona: $\mathcal{P}'=2\eta\mathcal{S}$. Tenzor brzine deformacije se nalazi iz polja brzine i jednak je

$$\mathcal{S}=\begin{pmatrix}0 & 0 & \frac{x}{2r}G\\ 0 & 0 & \frac{y}{2r}G\\ \frac{x}{2r}G & \frac{y}{2r}G & 0\end{pmatrix},$$

gde je $G=\frac{\partial v}{\partial r}=\frac{Cr}{2}-\frac{3Ca^2}{4r\ln 2}$, pa je

$$\mathcal{P}'=\begin{pmatrix}0 & 0 & \eta\cos\varphi G\\ 0 & 0 & \eta\sin\varphi G\\ \eta\cos\varphi G & \eta\sin\varphi G & 0\end{pmatrix}.$$

Ort normale na spoljašnji cilindar je $\vec{n}=\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\\ 0\end{pmatrix}$, iz čega sledi da je vektor viskoznog napona na spoljašnji cilindar

$$\vec{P}'=\mathcal{P}'\vec{n}|_{r=2a}=\eta G(r=2a)\cos^2\varphi\vec{e}_z+\eta G(r=2a)\sin^2\varphi\vec{e}_z=Ca\eta\left(1-\frac{3}{8\ln 2}\right)\vec{e}_z,$$

tako da je viskozna sila po jedinici dužine

$$\vec{F}'=\int_0^{2\pi}\int_z^{z+1}\vec{P}'2a\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=4\pi Ca^2\eta\left(1-\frac{3}{8\ln 2}\right)\vec{e}_z.$$

Treći domaći zadatak iz Fizike kontinuuma - 13. maj 2010.

1. (32 poena) Stacionarno strujanje idealnog nestišljivog fluida, gustine ρ, opisano je kompleksnim potencijalom

$$W(z) = Uz + \frac{Ua^2}{z} ,$$

gde je $W(z) = \Phi + i\psi$, $z = x_1 + ix_2$, a U i a pozitivne konstante. (a) Odrediti potencijal Φ i strujnu funkciju ψ u Dekartovim i polarnim koordinatama. (b) Uzimajući da zapreminske sile mogu da se zanemare, kao i da je pritisak jednak p_0 kada $r \to \infty$, izračunati silu koja deluje na cilindričnu površinu $x_1^2 + x_2^2 = a^2$, $0 \leq x_3 \leq H$.

2. (34 poena) Pod Tejlorovim vorteksom podrazumeva se strujanje Stoksovog fluida, koje je u cilindričnim koordinatama zadato poljem brzine

$$\vec{v} = \tau \frac{r}{t^2} \mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)} \vec{e}_\varphi$$

gde je τ konstanta, a ν kinematički koeficijent viskoznosti. (a) Uveriti se eksplicitnim računom da ovakvo polje brzine zadovoljava Stoksovu jednačinu u slučaju kada zapreminske sile mogu da se zanemare. (b) Skicirati profil brzine $v(r,t)$ za nekoliko zgodno izabranih vremenskih trenutaka t. (c) Ako je gustina fluida jednaka ρ, izračunati ukupni moment impulsa fluida koji se nalazi u oblasti $0 < z < 1$ i pokazati da on ne zavisi od vremena. (d) Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ i eksplicitnim računom se uveriti da $\vec{\omega}$ zadovoljava uopštenu Helmholcovu jednačinu.

3. (34 poena) Fluid konstantne gustine ρ miruje. Temperatura T fluida u trenutku $t = 0$ u sfernim koordinatama (r, θ, φ) ima oblik

$$T(r, \theta, \varphi, t = 0) = T_0 + \Theta \exp\left(-\frac{r^2}{a^2}\right) ,$$

gde su T_0, Θ i a pozitivne konstante. Ako je gustina unutrašnje energije u fluida linearna funkcija temperature T: $u = cT$, i ako važi Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa\, \mathrm{grad} T$, pokazati da u bilo kom trenutku temperatura ima oblik

$$T(r, \theta, \varphi, t) = T_0 + \Theta \left(\frac{a^2}{a^2 + 4\beta t}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{r^2}{a^2 + 4\beta t}\right) ,$$

pri čemu treba odrediti konstantu β. Izračunati količinu toplote koja u jedinici vremena prođe kroz sfernu površinu $r = R$, kao i ukupnu količinu toplote koja prođe kroz tu površinu od $t = 0$ do $t = \infty$.

Rešenja

1. Videti rešenje drugog domaćeg iz 2008.

2. **(a)** Pošto polje brzine ima oblik $\vec{v} = v(r,t)\vec{e}_\varphi$, lako se pokazuje da je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v}{\partial t}\vec{e}_\varphi - \frac{v^2}{r}\vec{e}_r ,$$

kao i da je

$$\nabla\times(\nabla\times\vec{v}) = -\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right]\vec{e}_\varphi\,,$$

tako da Stoksova jednačina u ovom slučaju može da se napiše u obliku:

$$\frac{\partial v}{\partial t}\vec{e}_\varphi - \frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}p + \nu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right]\vec{e}_\varphi\,.$$

Izjednačavanjem onoga što stoji uz isti ort sa leve i sa desne strane ove jednačine slede skalarne jednačine:

$$\begin{aligned} -\frac{v^2}{r} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\,,\\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \nu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right] - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}\,,\\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}\,. \end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine sledi da pritisak ne zavisi od z koordinate. Pretposlednja jednačina može da se prepiše kao

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi} = r\left\{\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right]\right\}\,,$$

gde desna strana ne zavisi od φ, pa ni $\frac{\partial p}{\partial \varphi}$ ne zavisi od φ i

$$p(r,\varphi,t) = -\rho r\left\{\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right]\right\}\varphi + F(r)\,.$$

Pošto pritisak treba da bude periodična funkcija po φ, iz poslednjeg izraza zaključujemo da je

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \nu\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right] = 0\,.$$

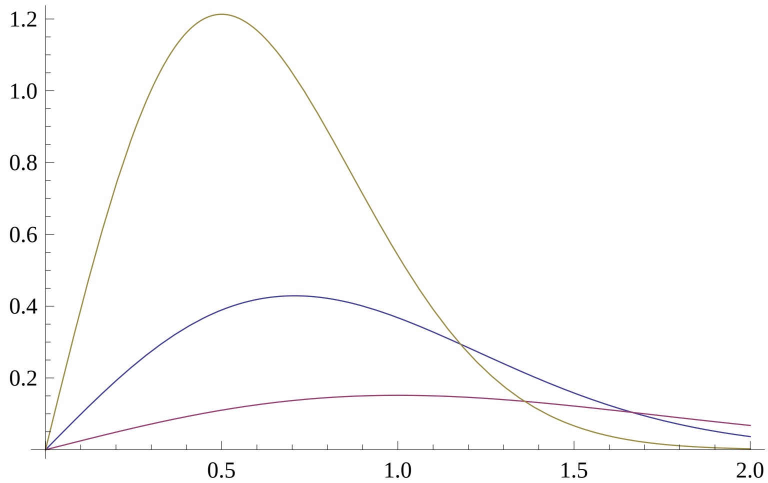
Kako je za zadato $v(r,t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\tau r}{t^4}\left(\frac{r^2}{4\nu} - 2t\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\,,\\ \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\right] &= \frac{\tau r}{\nu t^4}\left(\frac{r^2}{4\nu} - 2t\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\,, \end{aligned}$$

vidi se da je poslednja jednačina zaista identički zadovoljena. Iz jednačine $-\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}$ onda sledi da je pritisak jednak

$$p = \rho\int\frac{v^2}{r}\,\mathrm{d}r\,.$$

(b) Na sledećoj slici skiciran je profil brzine $v(r,t)$ za tri trenutka: siva boja odgovara najmanjoj vrednosti t, plava srednjoj, a ljubičasta najvećoj.



(c) Traženi moment impulsa $\vec{L}$ po definiciji je jednak

$$\vec{L} = \int_m \vec{r} \times \mathrm{d}m\vec{v} = \rho \int_V \vec{r} \times \vec{v}\,\mathrm{d}V$$

gde se integracija vrši po masi m fluida unutar uočenog sloja, odnosno po zapremini V tog sloja. Pošto je $\vec{r} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$ dalje sledi

$$\vec{L} = \rho \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^1 r\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\, v(r,t)[r\vec{e}_z - z(\cos\varphi\vec{e}_x + \sin\varphi\vec{e}_y)]\,,$$

odakle je $L_x = L_y = 0$ (pošto su odgovarajući integrali proporcionalni sa $\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\varphi = 0$, odnosno $\int_0^{2\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi = 0$) i

$$L_z = \rho \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^2\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}z\, v(r,t) = 2\pi\rho \int_0^\infty r^2 v(r,t)\mathrm{d}r = 2\pi\rho\frac{\tau}{t^2}\int_0^\infty r^3 \mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\,\mathrm{d}r\,.$$

Uvođenjem smene $w = r^2/(4\nu t)$, dalje se dobija

$$L_z = 16\pi\rho\tau\nu^2 \int_0^\infty w\mathrm{e}^{-w}\mathrm{d}w = 16\pi\nu^2\rho\tau\,,$$

gde se poslednji integral lako izračunava parcijalnom integracijom.

(d) Vektor vrtložnosti jednak je

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{2r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)\vec{e}_z = \frac{\tau}{t^2}\left(1 - \frac{r^2}{4\nu t}\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}\vec{e}_z\,.$$

Ako se zapreminske sile zanemare, uopštena Helmholcova jednačina dobija oblik

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} - (\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} = \nu\Delta\vec{\omega}\,.$$

Pošto $\vec{\omega}$ ima samo z komponentu, a $\vec{v}$ ne zavisi od z sledi da je $(\vec{\omega}\cdot\nabla)\vec{v} = 0$, a takođe je i

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \vec{e}_z\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = \vec{e}_z\left(\frac{\partial\omega}{\partial t} + \vec{v}\cdot\nabla\omega\right)\vec{e}_z = \frac{\partial\omega}{\partial t}\vec{e}_z\,, \quad \Delta\vec{\omega} = -\nabla\times(\nabla\times\vec{\omega}) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\omega}{\partial r}\right)\vec{e}_z\,,$$

gde je $\omega = \frac{\tau}{t^2}\left(1-\frac{r^2}{4\nu t}\right)\mathrm{e}^{-r^2/(4\nu t)}$. Dalje se eksplicitnim izračunavanjem izraza $\frac{\partial \omega}{\partial t}$ i $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \omega}{\partial r}\right)$ i njihovom zamenom u uopštenu Helmholcovu jednačinu direktno pokazuje da je ona identički zadovoljena.

3. Na predavanjima je pokazano da u slučaju fluida konstante gustine koji miruje, ako važi Furijeov zakon provođenja toplote i $u = cT$, temperatura zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c}\Delta T\,,$$

pa u ovom zadatku treba pokazati da dato $T(r,t)$ zadovoljava ovu jednačinu. Pošto je

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{2\beta\Theta}{a^2+4\beta t}\left(\frac{a^2}{a^2+4\beta t}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2+4\beta t}\right)\left(3-\frac{2r^2}{a^2+4\beta t}\right)$$

i

$$\Delta T = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial T}{\partial r}\right) = -\frac{2\Theta}{a^2+4\beta t}\left(\frac{a^2}{a^2+4\beta t}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2+4\beta t}\right)\left(3-\frac{2r^2}{a^2+4\beta t}\right)\,,$$

vidi se da za svako r i t važi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \beta\Delta T\,,$$

odakle direktno sledi da je $\beta = \kappa/(\rho c)$.

Pošto je u uslovima ovog zadatka

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial r}\vec{e}_r$$

i

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \Theta\left(\frac{a^2}{a^2+4\beta t}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{r^2}{a^2+4\beta t}\right)\left(-\frac{2r}{a^2+4\beta t}\right)\,,$$

sledi da je količina toplote koja u jedinici vremena prođe kroz površinu $r = R$ (čiji je element površine $\mathrm{d}\vec{S} = R^2\sin\theta\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\vec{e}_r$) jednaka

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} &= -\oint_{r=R}\vec{q}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \kappa\oint_{r=R}\nabla T\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \kappa R^2\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R} = 4\pi\kappa R^2\left.\frac{\partial T}{\partial r}\right|_{r=R}\\ &= \frac{8\pi\kappa\Theta R^3a^3}{(a^2+4\beta t)^{5/2}}\exp\left(-\frac{R^2}{a^2+4\beta t}\right)\end{aligned}$$

Ukupna količina toplote koja prođe kroz ovu površinu je

$$Q = \int_0^{\infty}\mathrm{d}t\,\frac{8\pi\kappa\Theta R^3a^3}{(a^2+4\beta t)^{5/2}}\exp\left(-\frac{R^2}{a^2+4\beta t}\right) = 2\pi\Theta a^3\rho c\int_0^{R^2/a^2}w^{1/2}\mathrm{e}^{-w}\,\mathrm{d}w\,,$$

gde je iskorišćena smena $w = R^2/(a^2+4\beta t)$. Dobijeni integral ne može da se izrazi preko elementarnih funkcija.

Pismeni ispit iz Fizike kontinuuma (III kolokvijum)
21. jun 2010.

Bezvrtložno strujanje Stoksovog fluida zadato je poljem brzine, čije komponente u Dekartovim koordinatama imaju oblik

$$v_1 = -A\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2}\,, \quad v_2 = A\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2}\,, \quad v_3 = 0\,,$$

gde je A zadata konstanta.

1. (50 poena) Naći kompleksni potencijal $W(z) = \Phi + i\psi$ koji odgovara ovakvom strujanju ($\vec{v} = \mathrm{grad}\Phi = \mathrm{rot}(\psi\vec{e}_3)$, $z = x_1 + ix_2$).

2. (50 poena) Naći parcijalnu diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava temperatura T, pretpostavljajući da je $T = T(x_1, x_2)$. Uzeti da je kalorička jednačina stanja oblika $u = cT$, kao i da važi Furijeov zakon: $\vec{q} = -\kappa\,\mathrm{grad}T$, gde su c i κ zadate konstante. Gustina fluida je ρ, a koeficijent viskoznosti η. Dobijenu jednačinu NE rešavati!

Rešenje:

1. Određivanje Φ:

$$v_1 = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1} \;\Rightarrow\quad \Phi = -Ax_2\int\frac{\mathrm{d}x_1}{x_1^2 + x_2^2} + F(x_2)$$

$$= -A\int\frac{\mathrm{d}(x_1/x_2)}{1 + (x_1/x_2)^2} + F(x_2) = -A\mathrm{arctg}(x_1/x_2) + F(x_2) \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; v_2 = A\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(-A\mathrm{arctg}(x_1/x_2) + F(x_2)\right) = A\frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} + \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_2} \;\Rightarrow$$

$$F(x_2) = \mathrm{const} \;\Rightarrow\quad \Phi = -A\mathrm{arctg}(x_1/x_2) + \mathrm{const}$$

Određivanje ψ:

$$v_1 = \frac{\partial\psi}{\partial x_2} = -A\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} \;\Rightarrow\quad \psi = -A\int\frac{x_2\,\mathrm{d}x_2}{x_1^2 + x_2^2} + F(x_1)$$

$$= -\frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x_1^2+x_2^2)}{x_1^2+x_2^2} + F(x_1) = -\frac{A}{2}\ln(x_1^2+x_2^2) + F(x_1)$$

$$v_2 = A\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\frac{A}{2}\ln(x_1^2+x_2^2) + F(x_1)\right) = A\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2} - \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x_1}$$

$$F(x_1) = \mathrm{const} \Rightarrow \quad \psi = -\frac{A}{2}\ln(x_1^2+x_2^2) + \mathrm{const}$$

Određivanje kompleksnog potencijala:

$$W(z) = \Phi + i\psi = -A\mathrm{arctg}(x_1/x_2) - i\frac{A}{2}\ln(x_1^2+x_2^2) = -A\left[\mathrm{arctg}(x_1/x_2) + i\ln\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right]$$

$$= -A\left[\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\varphi) + i\ln r\right] = -A\left[\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}(\pi/2-\varphi)) + i\ln r\right] = -A(-\varphi + i\ln r) + \mathrm{const}$$

$$= -Ai(i\varphi + \ln r) + \mathrm{const} = -iA(\ln \mathrm{e}^{i\varphi} + \ln r) + \mathrm{const} = -iA\ln(r\mathrm{e}^{i\varphi}) + \mathrm{const} = -iA\ln z + \mathrm{const}$$

2. Pod pretpostavkama iz formulacije zadatka iz jednačine unutrašnje energije sledi jednačina

$$c\rho\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = 2\eta\mathrm{Tr}\tilde{\mathcal{S}}^2 + \kappa\Delta T\,.$$

Iz polja brzine se nalazi da je

$$\mathcal{S} = \frac{A}{(x_1^2+x_2^2)^2}\begin{pmatrix} 2x_1x_2 & x_2^2-x_1^2 & 0 \\ x_2^2-x_1^2 & -2x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

odakle je $\mathrm{Tr}\tilde{\mathcal{S}}^2 = 2A^2/(x_1^2+x_2^2)^2$. Pošto je $T = T(x_1, x_2)$ takođe je i

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v}\mathrm{grad}T = v_1\frac{\partial T}{\partial x_1} + v_2\frac{\partial T}{\partial x_2}\,, \quad \Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\,,$$

pa konačno tražena jednačina ima oblik

$$\frac{Ac\rho}{x_1^2+x_2^2}\left(-x_2\frac{\partial T}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial T}{\partial x_2}\right) = \frac{4\eta A^2}{(x_1^2+x_2^2)^2} + \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}\right)\,.$$

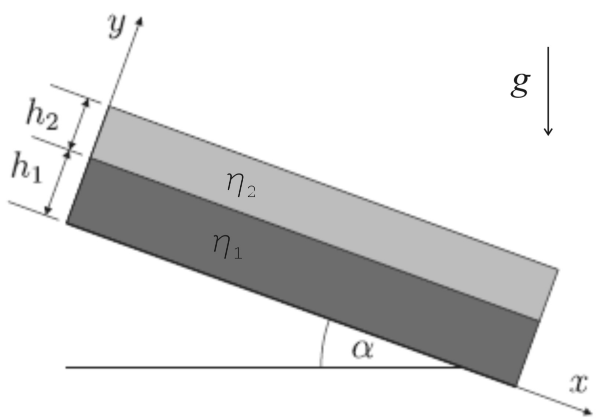
Pismeni ispit iz Fizike kontinuuma - 3. jun 2009.

1. (33 poena) Polje brzine u Dekartovim koordinatama ima oblik

$$v_1 = a(x_1^2 x_2 + x_2^3)\,, \quad v_2 = -a(x_1^3 + x_1 x_2^2)\,, \quad v_3 = 0\,,$$

gde je a zadata konstanta. Naći: **(a)** trajektoriju delića koji se u početnom trenutku nalazio u tački (A, B, C); **(b)** supstancijalni izvod funkcije $\lambda(x_1, x_2, x_3, t) = K(\cos 3t)/\sqrt{x_1^2 + x_2^2}$; **(c)** relativnu promenu dužine u jedinici vremena male supstancijalne duži, čiji se jedan kraj nalazi u tački $(1, 2, 3)$, a pravac joj je određen ortom $\vec{n} = (\vec{e}_1 - 2\vec{e}_2 + 2\vec{e}_3)/3$; **(d)** vektor vrtložnosti i jednačinu vrtložne linije koja prolazi kroz tačku $(0, 0, 0)$.

2. (33 poena) Niz strmu ravan nagibnog ugla α, u homogenom gravitacionom polju $\vec{g}$, stacionarno teku dva sloja Stoksovih fluida, iste gustine ρ, ali različitih koeficijenata viskoznosti η_1 i η_2 (videti sliku). Fluidi se ne mešaju u toku strujanja, niti se menjaju njihove debljine slojeva, koje su redom jednake h_1 i h_2. Zanemarujući viskoznu silu vazduha iznad gornjeg fluida, uzimajući da je pritisak na slobodnu površ konstantan, kao i da je polje brzine u fluidima oblika $\vec{v}_i = v_i(y)\vec{e}_x$ $(i = 1, 2)$, odrediti $v_i(y)$ i naći silu viskoznosti koja deluje na jedinicu površine strme ravni.



3. (34 poena) Naći jednačinu koju zadovoljava temperatura T u slučaju Poazejevog proticanja Stoksovog fluida (gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η) kroz cev poluprečnika R, pod delovanjem konstantnog gradijenta $\mathrm{grad}p = K\vec{e}_z$ u pravcu ose cevi. Pretpostaviti da kalorička jednačina stanja ima oblik $u = cT$, gde je c konstanta, da važi Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa \mathrm{grad}T$, kao i da je $T = T(r)$. Ako je temperatura fluida neposredno uz cev jednaka T_0, rešavanjem nađene jednačine naći $T(r)$ i izračunati količinu toplote koja u jedinici vremena prođe kroz jediničnu dužinu cevi.

REŠENJE

3. Kao što je pokazano na predavanjima, rešavanjem Stoksove jednačine se u slučaju Poazejevog strujanja dobija da je polje brzine

$$\vec{v} = -\frac{K}{4\eta}[R^2 - (x_1^2 + x_2^2)]\vec{e}_3\,,$$

odakle je tenzor brzine deformacije

$$\mathcal{S} = \frac{K}{4\eta}\begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \\ x_1 & x_2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$

Pošto gustina unutrašnje energije u u slučaju Stoksovog fluida zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$\rho \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = 2\eta \mathrm{Tr}\mathcal{S}^2 - \mathrm{div}\vec{q},$$

uzimajući u obzir sve ostale pretpostavke date u formulaciji zadatka, sledi da temperatura zadovoljava jednačinu

$$\Delta T = -\frac{K^2}{4\eta\kappa} r^2 .$$

Rešavanjem ove jednačine dobija se:

$$T(r) = -\frac{K^2}{64\eta\kappa} r^4 + C_1 \ln r + C_2 ,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Konstanta $C_1 = 0$, što sledi iz uslova da temperatura treba da bude konačna na osi cevi, dok se konstanta C_2 određuje iz uslova $T(R) = T_0$, tako da se konačno za temperaturu dobija izraz

$$T(r) = T_0 + \frac{K^2}{64\eta\kappa}(R^4 - r^4) .$$

Količina toplote koja u jedinici vremena prođe kroz jediničnu dužinu cevi jednaka je

$$\int\int \vec{q} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\kappa \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \, R \, \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\bigg|_{r=R} = \frac{\pi K^2 R^4}{8\eta} .$$

Pismeni ispit iz Fizike kontinuuma - 30. jun 2008.

1. (33 poena) Polje brzine u nekom fluidu ima oblik

$$\vec{v}(\vec{r},t) = \frac{A}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{Bt}}\right)\vec{e}_\varphi\,,$$

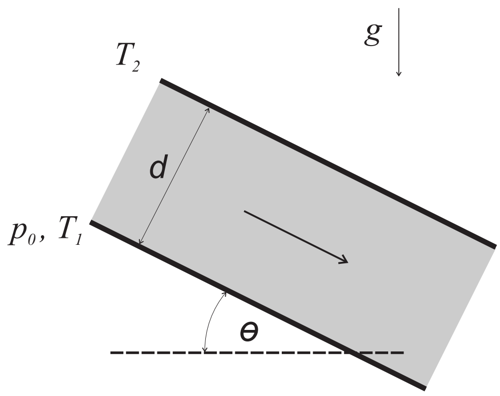
gde su r, φ i z cilindrične koordinate, a A i B zadate konstante. **(a)** Ispitati da li je fluid nestišljiv. **(b)** Izračunati vektor vrtložnosti $\vec{\omega}(\vec{r},t)$. **(c)** Naći polje ubrzanja $\vec{a}(\vec{r},t)$. **(d)** Izračunati cirkulaciju brzine Γ u početnom trenutku $t=0$ po proizvoljnoj konačnoj zatvorenoj liniji koja obuhvata z osu (jedanput).

2. (33 poena) Potencijalnom strujanju idealnog nestišljivog fluida odgovara kompleksni potencijal

$$W(z) = \Phi(x,y) + i\psi(x,y) = U\left(z^{4/3} + \left(\frac{a^2}{z}\right)^{4/3}\right)\,,$$

gde su U i a realne i pozitivne konstante ($z = x + iy$, $\vec{v} = \mathrm{grad}\Phi = \mathrm{rot}(\psi\vec{e}_z)$). Naći brzinu i pritisak u proizvoljnoj tački fluida. Uzeti da je pritisak u tački ($x = a$, $y = 0$) jednak p_0, a zapreminske sile zanemariti.

3. (34 poena) Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η, u homogenom gravitacionom polju stacionarno protiče kroz prostor između dve beskonačno velike ravne paralelne ploče, koje sa horizontalnom ravni zaklapaju ugao θ. Ploče miruju, a rastojanje između njih je d. **(a)** Uzimajući da brzina delića zavisi samo od njegove udaljenosti od ploča, kao i da je pritisak neposredno uz donju ploču konstantan i jednak p_0, naći profil brzine u fluidu, kao i silu kojom fluid deluje na jediničnu površinu donje ploče. **(b)** Ako je gustina unutrašnje energije u fluida oblika $u = cT$, gde je c zadata konstanta, a za vektor gustine fluksa toplote važi Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa\,\mathrm{grad}T$, odrediti polje temperature T u fluidu. Pretpostaviti da temperatura zavisi samo od udaljenosti od ploča, pri čemu je uz donju ploču jednaka T_1, a uz gornju T_2.



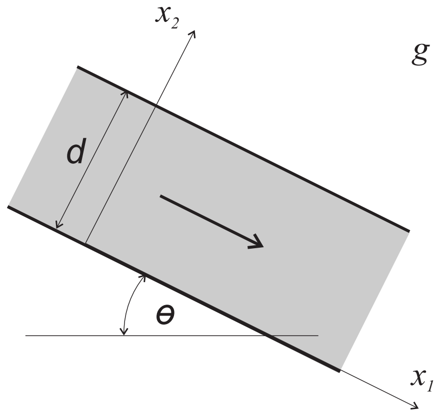
Formule koje mogu biti od koristi

$$(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v} = \mathrm{grad}\left(\frac{1}{2}v^2\right) - \vec{v}\times\mathrm{rot}\vec{v}\,,\quad \Delta\vec{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\vec{v} - \mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\vec{v}\,,\quad \mathrm{div}\vec{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\mathrm{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix}\,,\quad \mathrm{grad}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z\,,\quad \Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

REŠENJA

3. **(a)** Uvodeći koordinatni sistem kao što je naznačeno na sledećoj slici:



po pretpostavci zadatka brzinu treba tražiti u obliku $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$, pa se nakon projektovanja Stoksove jednačine na koordinatne ose, dobijaju jednačine:

$$0 = g\sin\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \frac{\eta}{\rho}\Delta v \tag{1}$$

$$0 = -g\cos\theta - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2} \tag{2}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_3}\,. \tag{3}$$

Iz treće od ovih jednačina se zaključuje da pritisak ne zavisi od x_3 koordinate, a iz druge onda sledi da pritisak ima oblik

$$p(x_1, x_2) = F(x_1) - \rho g\cos\theta x_2\,,$$

gde je $F(x_1)$ funkcija koju treba odrediti. Pošto je, prema uslovu zadatka, pritisak uz donju ploču konstantan i jednak p_0, sledi da je $p(x_1, x_2 = 0) = p_0$, odnosno $F(x_1) = p_0$, pa je konačni izraz za pritisak

$$p(x_1, x_2, x_3) = p_0 - \rho g\cos\theta x_2\,. \tag{4}$$

Onda iz jednačine (1) sledi

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{dx_2^2} = -\frac{g\rho}{\eta}\sin\theta \;\Rightarrow\quad v(x_2) = -\frac{g\rho}{2\eta}\sin\theta x_2^2 + C_1 x_2 + C_2\,,$$

gde se integracione konstante C_1 i C_2 dobijaju iz graničnih uslova $v(0) = v(d) = 0$, tako da je konačni izraz za brzinu

$$v(x_2) = \frac{g\rho}{2\eta}\sin\theta x_2(d - x_2)\,. \tag{5}$$

Ukupna sila kojom fluid deluje na jediničnu površinu donje ploče jednaka je

$$\vec{P}_{\vec{e}_2} = \tilde{\mathcal{P}}\Big|_{x_2=0}\vec{e}_2\,,$$

gde je tenzor napona $\tilde{\mathcal{P}}$ dat izrazom

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}} + 2\eta\tilde{\mathcal{S}}\,.$$

Na osnovu dobijenog izraza za brzinu, lako se nalazi da tenzoru brzine deformacije $\tilde{\mathcal{S}}$ odgovara matrica

$$\mathcal{S} = \frac{g\rho}{4\eta}\sin\theta(d-2x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ,$$

pa je tražena sila po jedinici površine jednaka

$$\vec{P}_{\vec{e}_2} = -p_0\vec{e}_2 + \frac{1}{2}\rho g d \sin\theta \vec{e}_1 \,.$$

(b) Jednačina unutrašnje energije

$$\rho\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \mathrm{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) - \mathrm{div}\vec{q},$$

se u ovom slučaju svodi na

$$0 = \frac{\rho^2 g^2}{4\eta}\sin^2\theta(d-2x_2)^2 + \kappa\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}x_2^2} ,$$

odakle sledi

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x_2} = K_1 - \frac{C}{\kappa}\left(d^2x_2 - 2dx_2^2 + \frac{4}{3}x_2^3\right) , \quad C = \frac{\rho^2 g^2}{4\eta}\sin^2\theta \,,$$

odnosno

$$T = \frac{C}{\kappa}x_2^2\left(-\frac{d^2}{2} + \frac{2}{3}dx_2 - \frac{1}{3}x_2^2\right) + K_1x_2 + K_2 \,.$$

Integracione konstante dobijaju se iz graničnih uslova $T(x_2=0) = T_1$ i $T(x_2=d) = x_2$:

$$K_2 = T_1 \,, \quad K_1 = \frac{T_2 - T_1}{d} + \frac{Cd^3}{6\kappa} \,.$$

PISMENI ISPIT IZ FIZIKE KONTINUUMA - 25. JUN 2007.

1. Dekartove komponente polja brzine u fluidu date su izrazima: $v_1 = A[-\sin(x_1/a) + \cos(x_1/a)]$, $v_2 = A[(x_2/a) + (x_3/a)]\sin(x_1/a)$, $v_3 = A[(x_2/a) + (x_3/a)]\cos(x_1/a)$, gde su A i a konstante.

(a) (15 poena) Naći polje ubrzanja.

(b) (9 poena) Pokazati da se strujne i vrtložne linije poklapaju.

(c) (9 poena) Izračunati cirkulaciju brzine po kvadratu koji leži u ravni $x_2 = 0$, a ograničena je linijama $x_1 = \pm a$, $x_3 = \pm a$.

2. Potencijalnom strujanju idealnog nestišljivog fluida odgovara kompleksni potencijal

$$W(z) = \Phi(x, y) + i\psi(x, y) = U\left(z^{4/3} + \left(\frac{a^2}{z}\right)^{4/3}\right),$$

gde su U i a realne i pozitivne konstante ($z = x + iy$, $\vec{v} = \mathrm{grad}\Phi = \mathrm{rot}(\psi\vec{e}_z)$).

(a) (15 poena) Naći brzinu fluida u tački ($x = a$, $y = 0$).

(b) (18 poena) Ako je gustina fluida ρ, a pritisak u tački ($x = a$, $y = 0$) jednak p_0, naći pritisak u proizvoljnoj tački fluida. Zapreminske sile zanemariti.

3. Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η stacionarno protiče kroz prostor između dva beskonačna koaksijalna cilindra, poluprečnika a i b ($a < b$). Fluid se kreće samo usled toga što se unutrašnji cilindar kreće u pravcu zajedničke ose cilindra brzinom v_a, dok spoljašnji cilindar miruje. Zapreminske sile mogu da se zanemare. Delići fluida kreću se u pravcu ose cilindara, pri čemu intenzitet brzine zavisi samo od rastojanja od ose.

(a) (17 poena) Naći profil brzine.

(b) (17 poena) Naći temperaturu unutar fluida, ako je poznato da se spoljašnji cilindar održava na temperaturi T_b, a unutrašnji na temperaturi T_a, pri čemu važi Furijeov zakon $\vec{q} = -\kappa\,\mathrm{grad}\,T$, gustina unutrašnje energije u je linearna funkcija temperature, tj. $u = cT$, a temperatura zavisi samo od rastojanja od ose cilindara.

REŠENJA

3. (a) Ako za z-osu uzmemo osu cilindara, i u odnosu na nju uvedemo cilindrične koordinate, onda je $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$, a Stoksova jednačina se pod uslovima zadatka svodi na jednačinu $\Delta v(r) = 0$, odnosno

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial v}{\partial r}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad v(r) = C_1 \ln r + C_2\,.$$

Konstante se određuju iz graničnih uslova $v(a) = v_a$, $v(b) = 0$, tako da se konačno dobija

$$\vec{v} = \frac{v_a}{\ln\frac{b}{a}}(\ln b - \ln r)\vec{e}_z\,. \tag{1}$$

(b) Tenzor brzine deformacije za nađeno polje brzine ima oblik

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{pmatrix},$$

pa iz jednačine unutrašnje energije sledi jednčina

$$-\frac{\eta}{\kappa}\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^2 = \Delta T(r)\,,$$

odnosno

$$-\frac{\eta v_a^2}{\kappa \ln\frac{b}{a}}\frac{\mathrm{d}r}{r} = \mathrm{d}\left(r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\right),$$

odakle je

$$-\frac{\eta v_a^2}{\kappa \ln\frac{b}{a}}\ln r + K_1 = r\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}\,.$$

Konačno se iz poslednje jednačine dobija

$$-\frac{\eta v_a^2}{\kappa \ln\frac{b}{a}}\ln r\mathrm{d}(\ln r) + K_1\mathrm{d}(\ln r) = \mathrm{d}T\,,$$

odnosno

$$T = -\frac{\eta v_a^2}{2\kappa \ln\frac{b}{a}}\ln^2 r + K_1\ln r + K_2\,.$$

Iz graničnih uslova $T(a) = T_a$ i $T(b) = T_b$ nalaze se konstante:

$$K_1 = \frac{T_b - T_a + \frac{\eta v_a^2}{2\kappa}\ln(ba)}{\ln ba}, \quad K_2 = \frac{T_a\ln b - T_b\ln a - \frac{\eta v_a^2}{2\kappa}\ln b\ln a}{\ln ba}\,.$$