

Beleške za predavanja iz Fizike kontinuuma

Sunčica Elezović-Hadžić

23. februar 2012

Radna Verzija
Fizika kontinuuma

©2009 - S. Elezović-Hadžić

Radna verzija
Fizika kontinuuma

Sadržaj

I	Mehanika neprekidnih sredina	7
1	Opisivanje kretanja	9
1.1	Hipoteza kontinuuma	9
1.2	Lagranžev i Ojlerov metod	10
1.3	Supstancijalni izvod	12
1.4	Strujne linije	14
1.5	Jednačina kontinuiteta	15
1.6	Strujna funkcija	18
1.7	Osnovni primeri za polje brzine	21
1.7.1	Linijski izvor	21
1.7.2	Linijski vrtlog (vorteks)	23
1.7.3	Tačkasti izvor	23
1.8	Tenzor brzine deformacije i vektor vrtložnosti	24
1.9	Strujne i vrtložne cevi...	28
2	Sile u fizici neprekidnih sredina	33
2.1	Zapreminske i površinske sile	33
2.2	Tenzor napona	35
2.3	Statika fluida	37
2.4	Osnovni dinamički zakon za kontinuum	43
3	Rešenja zadataka	45
3.1	Opisivanje kretanja	45
3.2	Sile u fizici neprekidnih sredina	45
II	Fluidi	47
4	Viskozni fluidi	49
4.1	Navije-Stoksovi fluidi	49
4.2	Navije-Stoksova jednačina	50
4.3	Osnovni primeri strujanja viskoznog fluida	51
4.3.1	Ravno Kuetovo strujanje	51
4.3.2	Poazejevo strujanje	52
4.3.3	Kuetovo strujanje	54

4.4	Nestacionarno strujanje viskoznog fluida	56
5	Idealan fluid	59
5.1	Ojlerova jednačina	59
5.2	Bernulijev integral	60
6	Potencijalno strujanje	63
6.1	Potencijal brzine	63
6.2	Koši-Lagranžev integral	63
6.3	Potencijalno strujanje nestišljivog fluida	64
6.3.1	Potencijalno strujanje oko cilindra	64
6.3.2	Dalamberov paradoks	67
6.4	Kompleksni potencijal	68
7	Vrtložno strujanje fluida	71
7.1	Helmholcova jednačina	71
7.2	Uopštena Helmholtzova jednačina	72
7.3	Kelvinova teorema	72
7.4	Nastajanje vrtložnog kretanja	74
7.4.1	Bjerknesova teorema	74
7.4.2	Uticaj rotacije Zemlje na stvaranje vrtloga	75
7.4.3	Uticaj viskoznih sila na nastajanje vrtložnog kretanja	76
7.5	Dimenziona analiza	76
7.6	Difuzija vrtloga	78
8	Pogranični sloj	81
9	Talasi u fluidima	85
9.1	Jednodimenzionalno prostiranje malih poremećaja u idealnom barotropnom fluidu van polja zapreminskih sila	85
9.2	Talasi u nestišljivoj tečnosti	85
III	Termodinamika neprekidnih sredina	91
10	Prvi princip termodinamike u kontinualnoj sredini	93
10.1	Rad površinskih sila	93
10.2	Rad zapreminskih sila	95
10.3	Promena kinetičke energije ΔE_k	96
10.4	Vektor \vec{q} gustine fluksa toplote	96
10.5	Jednačina gustine unutrašnje energije	96
11	Termodinamika fluida	99
11.1	Disipacija energije u idealnom nestišljivom fluidu	99
11.2	Stoksov fluid	100
11.3	Adijabatsko strujanje stišljivog idealnog fluida	100

11.4 Barometarska formula	103
-------------------------------------	-----

©2009 - S. Elezović-Hadžić

Radna verzija
Fizika kontinuuma

Deo I

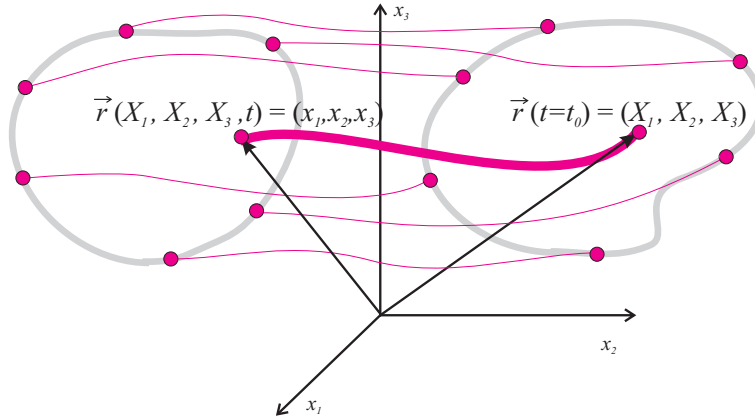
Mehanika neprekidnih sredina

Glava 1

Opisivanje kretanja

1.1 Hipoteza kontinuuma

Supstanca se sastoji od molekula, koji se sastoje od atoma i subatomske čestice. Ona, dakle, nije kontinualna. Pa ipak, postoje mnogi aspekti ponašanja raznih materijala, kao što je, npr, istezanje čelične šipke pod delovanjem neke sile ili postojanje sile otpora pri kretanju tela kroz vazduh i slično, koji se mogu opisati i predvideti pomoću teorija koje ne uzimaju u obzir diskretnu prirodu supstance. U osnovi tih teorija leži tzv. *hipoteza kontinuuma*, po kojoj su materijali beskonačno deljivi. U skladu sa hipotezom kontinuuma moguće je uočiti infinitezimalno malu zapreminu supstance, koja se naziva delić kontinuuma, pri čemu u svakoj okolini tog delića postoji supstanca. Da li je hipoteza kontinuuma opravdana ili ne zavisi od posmatrane situacije: npr. u mnogim slučajevima moguće je čelik smatrati kontinualnim materijalom, ali ne i ako se posmatra prostiranje talasa izuzetno malih talasnih dužina kroz njega. S druge strane, osobine razređenog gasa pod određenim okolnostima mogu se odlično opisati smatrajući gas neprekidnom sredinom. U svakom slučaju, nije dobro opravdavati kontinualni pristup brojem čestica u određenoj zapremini (tj. gustinom). Na kraju krajeva, infinitezimalno mala zapremina u limesu ili sadrži elementarnu česticu ili ne sadrži ništa. U tom smislu treba imati u vidu da matematički gledano delić predstavlja tačku, ali sa stanovišta fizike, to je mala zapremina (mnogo manja od ukupne zapremine razmatranog sistema) u kojoj se još uvek nalazi puno čestica $N \gg 1$, ali mnogo manje od ukupnog broja čestica u sistemu. Takva mala zapremina naziva se *fizički* beskonačno mala zapremina. Takođe, vrednosti fizičkih veličine „u tački” \vec{r} i „u trenutku” t , zapravo predstavljaju *lokalne vrednosti*, tj. vrednosti razmatrane veličine usrednjene po fizički beskonačno maloj zapremini, u kratkom vremenskom intervalu. Ovaj kratki vremenski interval, može se slično uvesti kao *fizički* beskonačno kratak, tj. to je interval mnogo kraći od ukupnog vremena razmatranja sistema, u toku kog se pri merenju ta veličina ne menja toliko da bi se promenila njena srednja vrednost, ali dovoljno dugačak da mikroskopske promene unutar delića ne dođu do izražaja. Samo ako je u razmatranoj situaciji moguće na takav način uvesti delić, koji dalje može da se tretira kao čestica, hipoteza kontinuuma ima smisla. Konačan odgovor na pitanje da li je hipoteza kontinuuma opravdana u nekoj situaciji ili nije daje samo eksperimentalna provera. Ono što će u okviru ovog kursa biti razmatrano u praksi je već veoma dugo potvrđivano u raznim situacijama, pa ćemo u daljem toku kursa uvek smatrati da se to što radimo odnosi na slučajeve kada su zadovoljeni uslovi za primenu hipoteze kontinuuma.



Slika 1.1: U supstancijalnom metodu prati se kretanje delića sredine.

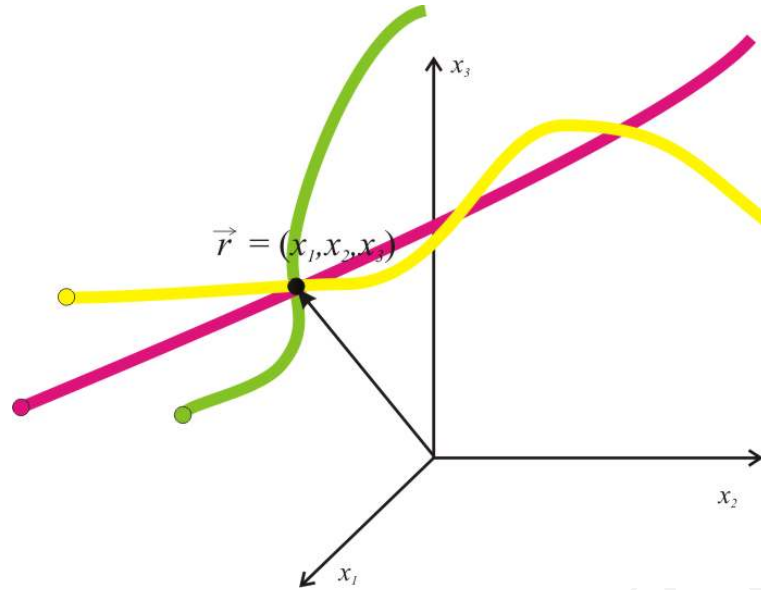
1.2 Lagranžev i Ojlerov metod

Postoje dva osnovna pristupa prilikom proučavanja kontinualne sredine: (1) Lagranžev ili supstancijalni i (2) Ojlerov ili metod polja.

1. **Lagranžev metod.** Kod ovog metoda uoči se položaj svih delića u nekom početnom trenutku $t = t_0$ i dalje se prati kretanje svakog od tih delića. Ako se neki delić u početnom trenutku nalazio u tački $\vec{r}_0 = X_1\vec{e}_1 + X_2\vec{e}_2 + X_3\vec{e}_3$, onda možemo da kažemo da će se u proizvoljnom sledećem trenutku on nalaziti u tački $\vec{r}(\vec{r}_0, t)$, čiji položaj zavisi kako od početnog položaja $\vec{r}_0 = (X_1, X_2, X_3)$, tako i trenutka t (slika 1). Sve fizičke veličine razmatramo duž putanje delića, dakle u funkciji početnih koordinata (X_1, X_2, X_3) i vremenskog trenutka t . Ako, recimo, sa T označimo temperaturu, onda $T(X_1, X_2, X_3, t)$ predstavlja temperaturu u tački u kojoj se u trenutku t nalazi delić koji se u početnom trenutku nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) . Kolokvijalno bismo mogli da kažemo da se u ovom pristupu razmatraju fizičke veličine i pojave onako kako ih „osećaju” delići, tj. supstanca, pa se zato ovaj pristup zove i supstancijalni, a promenljive (X_1, X_2, X_3) supstancijalne promenljive. Slično, zapremina koja se uvek sastoji od istih delića naziva se „supstancijalna zapremina”. Ilustracija primene Lagranževog metoda je razmatranje pomeranja velikih vazdušnih masa na satelitskim snimcima u realnom vremenu.

2. **Ojlerov metod** odgovara matematičkom metodu polja, tj. sve fizičke veličine razmatraju se u tački prostora $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$, čisto geometrijski, nezavisno od toga koji se delić nalazi u toj tački, u proizvoljnom vremenskom trenutku t (slika 2). U tom metodu bi izraz $T(x_1, x_2, x_3, t)$ predstavljao temperaturu u tački (x_1, x_2, x_3) u trenutku t . Poređenja radi, mogli bismo da kažemo da $T(x_1, x_2, x_3, t)$ predstavlja temperaturu koju „oseća” delić koji se u trenutku t našao na mestu (x_1, x_2, x_3) . U ovom pristupu nas, dakle, ne interesuje šta se sa tim delićem ranije dešavalo, niti šta će se sa njim dešavati posle prolaska kroz tu tačku. Koordinate (x_1, x_2, x_3) nazivaju se Ojlerove promenljive. Beleženje dnevnih vrednosti temperature, pritiska i brzine vetra na jednom mestu predstavlja primer primene Ojlerovog metoda.

Iako u svakoj situaciji i jedan i drugi metod mogu da se primene, Lagranžev metod se češće primenjuje kod čvrstih tela, kod kojih je pokretljivost delića mala, tj. obično čestice osciluju oko



Slika 1.2: U Ojlerovom metodu prati se šta se dešava u fiksiranoj tački prostora.

nekog svog srednjeg položaja, dok se kod fluida, koji se odlikuju velikom pokretljivošću, najčešće primenjuje Ojlerov metod.

Primer 1.2.1. Polje brzine u kontinualnoj sredini definisano je jednačinama: $v_1 = ax_2$, $v_2 = -ax_1$, $v_3 = 0$, gde je a konstanta. Nađimo trajektoriju delića koji se u trenutku $t = 0$ nalazio u tački (X_1, X_2, X_3) . Iz definicije brzine $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ slede jednačine:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_2, \quad (1.1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -ax_1, \quad (1.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = 0. \quad (1.3)$$

Iz poslednje jednačine trivijalno sledi da je $x_3(t) = \text{const} = X_3$. Diferenciranjem jednačine (1.1) po vremenu sledi jednačina

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = a \frac{dx_2}{dt}, \quad (1.4)$$

pa zamenom $\frac{dx_2}{dt}$ iz jednačine (1.2) dobijamo jednačinu

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} = -a^2x_1, \quad (1.5)$$

odnosno

$$\frac{d^2x_1}{dt^2} + a^2x_1 = 0, \quad (1.6)$$

čije opšte rešenje ima oblik

$$x_1(t) = A \cos at + B \sin at. \quad (1.7)$$

Iz uslova da je $x_1(0) = X_1$ sledi da je $A = X_1$, pa zamenom tako dobijenog izraza za x_1 u jednačinu (1.1), direktno sledi izraz za x_2 :

$$x_2(t) = \frac{1}{a} \frac{dx_1}{dt} = -X_1 \sin at + B \cos at. \quad (1.8)$$

Kako je $x_2(0) = X_2$, sledi da je $B = X_2$, pa se konačno dobija $x_2(t) = -X_1 \sin at + X_2 \cos at$. Konačnim jednačinama

$$x_1(t) = X_1 \cos at + X_2 \sin at, \quad x_2(t) = -X_1 \sin at + X_2 \cos at, \quad x_3(t) = X_3 \quad (1.9)$$

opisano je kretanje delića Lagranževom metodom. Eliminacijom vremena iz ovih jednačina lako se dobija i eksplicitna jednačina trajektorije delića: $x_1^2 + x_2^2 = X_1^2 + X_2^2$, $x_3 = X_3$, tj. delići se kreću po kružnicama, koje leže u ravnima normalnim na x_3 osu, sa centrom upravo na x_3 osi.

Znajući konačne jednačine kretanja delića, lako je naći i vektor brzine u Lagranževom opisu:

$$\vec{v}^L = \left. \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right|_{X_1, X_2, X_3} = a[(-X_1 \sin at + X_2 \cos at)\vec{e}_1 - (X_1 \cos at + X_2 \sin at)\vec{e}_2]. \quad (1.10)$$

Iz prethodnog primera se jasno vidi da je moguće prelaziti iz Lagranževog opisa u Ojlerov (i obrnuto). U opštem slučaju za brzinu važi:

$$\vec{v}^L(X_1, X_2, X_3, t) = \vec{v}^O(\vec{r}(X_1, X_2, X_3, t), t), \quad (1.11)$$

gde je indeksom "L" označen vektor brzine u Lagranževom, a indeksom "O" vektor brzine u Ojlerovom opisu.

1.3 Supstancijalni izvod

Pretpostavimo da razmatramo neku vektorsku fizičku veličinu, zadatu kao polje $\vec{A}(x_1, x_2, x_3, t)$ i uočimo dve njene vrednosti: u tački $\vec{r} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3$ u trenutku t i u infinitezimalno bliskoj tački $\vec{r} + d\vec{r} = (x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3)$ i infinitezimalno bliskom vremenskom trenutku $t + dt$. Primenjujući matematički izraz za diferencijal funkcije više promenljivih, možemo da pišemo da je:

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} dx_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} dt, \quad (1.12)$$

gde je $d\vec{A} = \vec{A}(\vec{r} + d\vec{r}, t + dt) - \vec{A}(\vec{r}, t)$. Ovaj izraz važi za bilo kakve infinitezimalne vrednosti $d\vec{r}$ i dt , međutim, ako nas zanima kako se menja veličina \vec{A} duž trajektorije delića, onda važi $d\vec{r} = \vec{v}(\vec{r}, t)dt$, gde je $\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + v_2\vec{e}_2 + v_3\vec{e}_3$ polje brzine u razmatranoj kontinualnoj sredini (brzina delića). Onda iz formule (1.12) sledi

$$d\vec{A} = \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) dt, \quad (1.13)$$

odnosno

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial x_3} v_3 + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}, \quad (1.14)$$

što uz pomoć Hamiltonovog (nabla)¹ operatora

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3},$$

može da se napiše kao

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (1.15)$$

Izraz $(\vec{v} \cdot \nabla)$ je kraći zapis za

$$v_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$$

i formalno predstavlja skalarni proizvod vektora brzine \vec{v} i nabla operatora ∇ .

Izraz (1.14)² predstavlja brzinu promene vektorske veličine \vec{A} duž trajektorije delića, dakle brzinu promene \vec{A} , kako je „oseća” supstanca, pa se zato naziva **supstancijalni izvod** veličine \vec{A} . Na sličan način bismo mogli da izvedemo i izraz za brzinu promene skalarnog polja $f(\vec{r}, t)$ duž trajektorije delića. Tako bismo dobili

$$\frac{df}{dt} = \vec{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{v} \cdot \text{grad} f + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Vidimo da se supstancijalni izvod, kako vektorske, tako i skalarne veličine, sastoji od dva sabirka: $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{A}(f)$ i $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} (\frac{\partial f}{\partial t})$. Prvi u sebi sadrži polje brzine i parcijalne izvode po prostornim koordinatama, pa se fizički može protumačiti da potiče od toga što delići koji pristižu u uočenu tačku sa sobom donose promenu fizičke situacije, tj. vrednosti razmatrane fizičke veličine. Drugi sabirak predstavlja lokalnu promenu fizičke veličine sa vremenom.

Ubrzanje delića po definiciji predstavlja supstancijalni izvod brzine, pa je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} + \frac{\partial \vec{v}}{\partial t}. \quad (1.17)$$

Primer 1.3.1. Nađimo ubrzanje delića, ako su njihove brzine definisane poljem iz Primera 1.2.1. To ćemo uraditi prvo direktno, koristeći konačne jednačine kretanja koje smo već našli, a zatim pomoću formule (1.17).

Diferenciranjem jednačina (1.9) dva puta po vremenu dobijamo izraze za Dekartove komponente ubrzanja u Lagranževom opisu:

$$a_1(X_1, X_2, X_3, t) = -a^2(X_1 \cos at + X_2 \sin at), \quad (1.18)$$

$$a_2(X_1, X_2, X_3, t) = -a^2(-X_1 \sin at + X_2 \cos at), \quad (1.19)$$

$$a_3(X_1, X_2, X_3, t) = 0, \quad (1.20)$$

iz kojih se lako vidi (poređenjem sa jednačinama (1.9)) da je polje ubrzanja onda dato jednačinama

$$a_1(x_1, x_2, x_3, t) = -a^2 x_1, \quad a_2(x_1, x_2, x_3, t) = -a^2 x_2, \quad a_3(x_1, x_2, x_3, t) = 0. \quad (1.21)$$

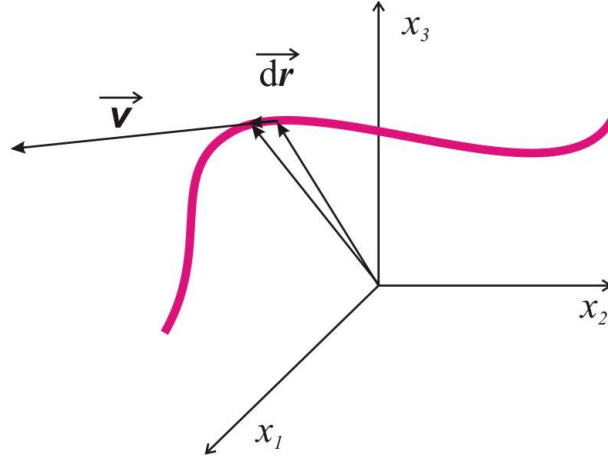
S druge strane, direktnom primenom formule (1.17) na polje $\vec{v} = ax_2 \vec{e}_1 - ax_1 \vec{e}_2$ dobija se

$$\vec{a} = (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = v_1 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_2} = -a^2(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2), \quad (1.22)$$

što je, naravno, ekvivalentno formulama (1.21).

¹Matematički podsetnik: gradijenti, divergencije, rotori...

²U literaturi se ponekad umesto oznake $\frac{d}{dt}$ za supstancijalni izvod koristi oznaka $\frac{D}{Dt}$.



Slika 1.3: Vektor brzine je tangentan na strujnu liniju u svakoj njenoj tački.

1.4 Strujne linije

Za vizualizaciju polja strujanja fluida koriste se tzv. *strujne linije* (slika 1.3). Po definiciji, strujne linije predstavljaju linije koje imaju osobinu da je u svakoj njihovoj tački polje brzine tangento na njih. Drugim rečima, strujne linije predstavljaju linije polja brzine, analogno linijama električnog ili magnetnog polja. Ako sa $d\vec{r}$ označimo element strujne linije, onda se formalno definicija strujne linije zapisuje kao

$$d\vec{r} = \lambda \vec{v}(\vec{r}, t), \quad (1.23)$$

gde je λ neki skalar ili

$$d\vec{r} \times \vec{v}(\vec{r}, t) = 0. \quad (1.24)$$

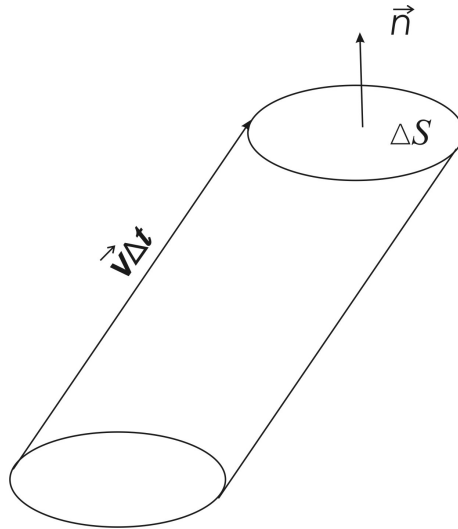
Ako vektore izrazimo preko njihovih Dekartovih komponentata: $d\vec{r} = dx_1\vec{e}_1 + dx_2\vec{e}_2 + dx_3\vec{e}_3$ i $\vec{v} = v_1(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_2 + v_3(x_1, x_2, x_3, t)\vec{e}_3$ onda iz definicionih jednačina slede jednačine:

$$\frac{dx_1}{v_1(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_2}{v_2(x_1, x_2, x_3, t)} = \frac{dx_3}{v_3(x_1, x_2, x_3, t)}, \quad (1.25)$$

što predstavlja sistem diferencijalnih jednačina, čijim rešavanjem se dobijaju jednačine strujnih linija. U tom sistemu funkcije $v_i(x_1, x_2, x_3, t)$ su unapred definisane, kao komponente polja brzine, koje može biti nestacionarno - u tom slučaju vreme se tretira kao parametar. Za nestacionarno polje brzine strujne linije mogu da se menjaju sa vremenom, ali ako je strujanje stacionarno, strujne linije se poklapaju sa trajektorijama.

U tačkama u kojima intenzitet polja brzine ima konačnu vrednost, strujne linije ne mogu da se seku (ukoliko bi se sekle to bi značilo da brzina nije jednoznačno definisana u tim tačkama). Strujne linije mogu da se seku u tačkama u kojima brzina ima nultu vrednost (tzv. tačke stagnacije), kao i tačkama u kojima je brzina beskonačno velika (tzv. izvori ili ponori u zavisnosti od toga da li strujne linije ulaze ili izlaze iz tih tačaka).

Primer 1.4.1. Nađimo jednačinu strujnih linija za polje brzine iz Primera 1. Primenjujući jednačine (1.25), zaključujemo da iz $v_3 = 0$ sledi $x_3 = \text{const}$, odnosno da strujne linije leže u ravnima normalnim



Slika 1.4: Kroz malu površinu ΔS za kratko vreme Δt prođu svi delići koji se nalaze unutar cilindra čija je izvodnica određena vektorom $\vec{v}\Delta t$.

na x_3 osu. Takođe, sledi i uslov:

$$\frac{dx_1}{ax_2} = \frac{dx_2}{-ax_1}, \quad (1.26)$$

čijim množenjem sa ax_1x_2 dobijamo $d(x_1^2 + x_2^2) = 0$, odakle je $x_1^2 + x_2^2 = \text{const}$, što uz dobijenu jednačinu $x_3 = \text{const}$ znači da su strujne linije kružnice, koje leže u ravnima normalnim na x_3 osu, a centar im je upravo na x_3 osi. Strujne linije se, dakle, poklapaju sa trajektorijama delića (nađenim u primeru 1.2.1), što je i trebalo očekivati, pošto polje brzine ne zavisi eksplicitno od vremena.

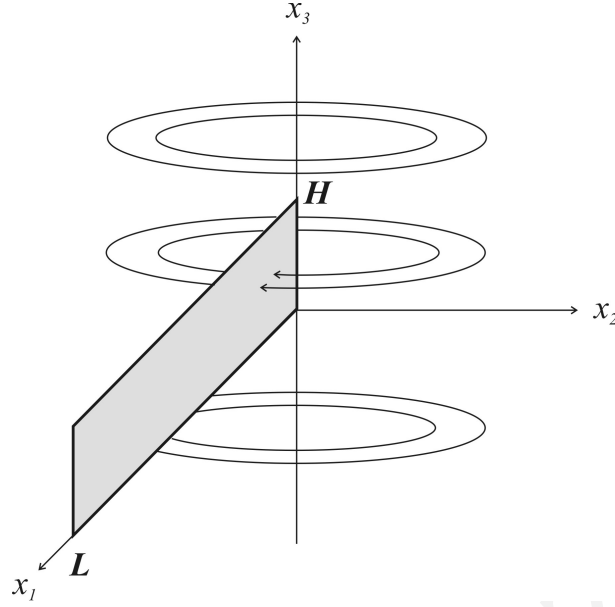
1.5 Jednačina kontinuiteta

Masa supstance koja u jedinici vremena prođe kroz neku površinu (zatvorenu ili otvorenu) naziva se *protok* kroz tu površinu. Izračunaćemo prvo protok kroz malu otvorenu površinu ΔS , čiji je ort normale \vec{n} . Pretpostavićemo da su nam poznati polje brzine \vec{v} i polje gustine ρ . Kroz površinu ΔS za vreme Δt prođu svi delići koji se nalaze unutar cilindra čija se gornja osnova poklapa sa ΔS , a dužina izvodnice (čiji je pravac određen vektorom \vec{v}) mu je jednaka $|\vec{v}|\Delta t$ (slika 1.4). Dakle, kroz uočenu malu površinu će za vreme Δt proći masa Δm koja se nalazi unutar tog cilindra, pa je $\Delta m = \Delta V \rho$, gde je ΔV zapremina cilindra. Ovde smo pretpostavili da je Δt malo (što ne smanjuje opštost izvođenja), pa je i zapremina cilindra mala, što znači da se može smatrati da se gustina unutar njega ne menja značajno. Zapremina cilindra jednaka je $\Delta V = \Delta S h$, gde je h visina cilindra i iznosi $h = (\vec{v}\Delta t) \cdot \vec{n}$, kao projekcija izvodnice na normalu osnove. Imajući sve to u vidu dalje sledi

$$\Delta m = \rho \Delta S (\vec{v}\Delta t) \cdot \vec{n} = \rho (\vec{n}\Delta S) \cdot \vec{v} \Delta t, \quad (1.27)$$

pa je protok ΔQ po definiciji jednak

$$\Delta Q = \frac{\Delta m}{\Delta t} = \rho (\vec{n}\Delta S) \cdot \vec{v}. \quad (1.28)$$



Slika 1.5: Ilustracija izračunavanja protoka, slika uz Primer 1.5.1.

U slučaju infinitezimalno male površine dS , izraz za protok može da se piše kao

$$dQ = \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad (1.29)$$

gde smo sa $d\vec{S} = \vec{n} dS$ označili vektor elementarne površine. Ukoliko se radi o većoj površini S , protok kroz nju može da se izračuna tako što se ona podeli na male površine, za svaku se izračuna protok i na kraju se saberu svi protoci. Ukoliko se površina podeli na infinitezimalno male površine, sumiranje odgovara integraciji po površini, pa izraz za protok Q , imajući u vidu poslednju formulu za protok kroz infinitezimalnu površinu, može da se piše u obliku površinskog integrala:

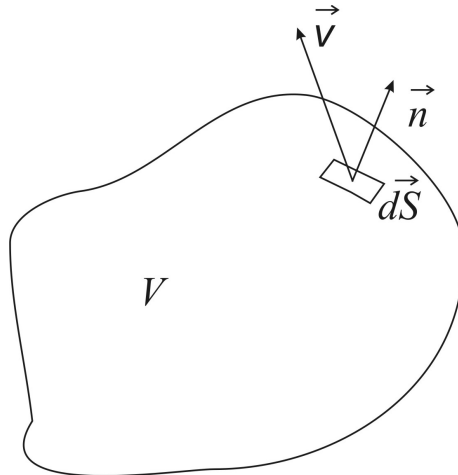
$$Q = \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (1.30)$$

Ukoliko se gustina ne menja, ρ u prethodnom izrazu može da izađe ispred integrala, pa je uobičajeno da se u takvim slučajevima govori o zapreminskom protoku F , koji se definiše kao zapremina fluida koja u jedinici vremena prođe kroz datu površinu i očigledno je jednaka:

$$F = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (1.31)$$

Primer 1.5.1. Ukoliko polje iz Primera 1.2.1 opisuje strujanje fluida konstantne gustine ρ izračunajmo protok fluida kroz površinu pravougaonika koji leži u ravni $x_2 = 0$ i $0 \leq x_1 \leq L$, $0 \leq x_3 \leq H$. Prema formuli (1.30) traženi protok je

$$\begin{aligned} Q &= \rho \int \int_S (ax_2 \vec{e}_1 - ax_1 \vec{e}_2) \cdot (dS \vec{e}_2) = \rho \int_0^L dx_1 \int_0^H dx_2 (-ax_1) \\ &= -a\rho \int_0^L x_1 dx_1 \int_0^H dx_2 = -\frac{1}{2} a\rho L^2 H. \end{aligned}$$



Slika 1.6: Kontrolna zapremina V fiksirana je u prostoru i kroz nju delići prolaze.

Znak minus se pojavio zbog toga što smo ort normale na površinu izabrali u smeru orta e_2 , dok brzina u tačkama uočene površine ima suprotan smer (tj. smer vektora $-ax_1\vec{e}_2$).

Uočimo sada jednu fiksiranu zapreminu V (slika 1.5), koja se u toku vremena ne menja (tzv. kontrolna zapremina). Bez obzira šta se dešava sa delićima kontinualne sredine koju posmatramo, masa m sadržana u zapremini V u svakom trenutku jednaka je

$$m(t) = \int_V \rho(\vec{r}, t) dV \quad (1.32)$$

gde je $\rho(\vec{r}, t)$ polje brzine. Brzina promene mase (promena mase u jedinici vremena) jednaka je

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r}, t) dV = \int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV, \quad (1.33)$$

gde je totalni izvod po vremenu mogao da „prođe” kroz određeni integral po zapremini zahvaljujući tome što je zapremina fiksirana (ne zavisi od vremena), ali se pri tome „pretvorio” u parcijalni izvod po vremenu³, pošto ρ zavisi i od koordinata i vremena. S druge strane, masa unutar zapremine V se u jedinici vremena promeni za onoliko koliko uđe ili izađe kroz ukupnu površinu S koja obuhvata V , tj. brzina promene mase jednaka je protoku kroz graničnu površinu S . Ako ortove normala na S orijentišemo kao spoljne normale (iz unutrašnjosti prema spoljašnjosti) onda prema formuli (1.30) za protok možemo da pišemo da je

$$\frac{dm}{dt} = - \int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}. \quad (1.34)$$

Znak minus na desnoj strani ove jednakosti pojavio se zato što izabrana orijentacija normala zapravo znači da posmatramo protok iz unutrašnjosti V , tj. za koliko se smanji masa unutar V u jedinici vremena. Pošto se poslednji površinski integral odnosi na zatvorenu površinu, na njega možemo da

³Matematička digresija: Ovo eksplicitnije obrazložiti!

primenimo teoremu Gausa-Ostrogradskog⁴, čime dalje dobijamo:

$$\frac{dm}{dt} = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV, \quad (1.35)$$

što u kombinaciji sa (1.33) daje

$$\int_V \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} dV = - \int_V \operatorname{div}(\rho \vec{v}) dV, \quad (1.36)$$

odnosno

$$\int_V \left(\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) \right) dV = 0. \quad (1.37)$$

Poslednja relacija važi za proizvoljnu fiksiranu zapreminu V , a to je moguće jedino ako je u svakoj tački i u svakom trenutku podintegralna funkcija jednaka nuli, tj. ako važi jednačina

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (1.38)$$

Ova jednačina poznata je kao **jednačina kontinuiteta** i predstavlja posledicu klasičnog zakona održanja mase (masa u V može da uđe ili izađe, ne može da se smanji ili poveća bez prolaska čestica kroz S). Alternativno, ona može da se zapiše i kao

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1.39)$$

gde je iskorišćen izraz za supstancijalni izvod funkcije ρ i identitet:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \operatorname{grad} \rho \cdot \vec{v} + \rho \operatorname{div} \vec{v}.$$

Iz ovog drugog oblika jednačine kontinuiteta vidi se da ukoliko je pri kretanju sredina koja se razmatra nestišljiva, tj. ako se duž trajektorije delića gustina ρ ne menja (što znači da je njen supstancijalni izvod $\frac{d\rho}{dt}$ jednak nuli), sledi uslov

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (1.40)$$

Ova jednačina poznata je kao **uslov nestišljivosti**.

Primer 1.5.2. Lako se proverava da polje brzine definisano u primeru 1.2.1 zadovoljava uslov nestišljivosti:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial(ax_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(-ax_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(0)}{\partial x_3} = 0.$$

1.6 Strujna funkcija

Razmotrimo slučaj nestišljivog kretanja kontinualne sredine, pri kome polje brzine ima oblik

$$\vec{v} = v_1(x_1, x_2, t) \vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2, t) \vec{e}_2. \quad (1.41)$$

⁴Matematički podsetnik: teorema Gausa-Ostrogradskog

Ovakvo kretanje nazivamo *dvodimenzionalnim* (2d). U ovom slučaju su potrebne dve veličine v_1 i v_2 da bi se potpuno opisalo kretanje, međutim, zbog uslova nestišljivosti, koji u ovom slučaju dobija oblik:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0, \quad (1.42)$$

jasno je da te dve veličine nisu nezavisne, što u stvari znači da je jedna veličina dovoljna za potpun opis kretanja. To bi mogla da bude jedna komponenta polja brzine, ali je u fizici kontinuuma uobičajeno da se umesto toga uvede tzv. *strujna funkcija* $\psi(x_1, x_2, t)$ (ili funkcija toka), koja je na sledeći način povezana sa komponentama brzine:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (1.43)$$

Lako se proverava da ovakvo polje brzine zadovoljava uslov nestišljivosti:

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial(\frac{\partial \psi}{\partial x_2})}{\partial x_1} + \frac{\partial(-\frac{\partial \psi}{\partial x_1})}{\partial x_2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_2 \partial x_1} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_1 \partial x_2} = 0. \quad (1.44)$$

Uvedimo vektorsku funkciju $\vec{A} = \psi \vec{e}_3$ i potražimo njen rotor:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & 0 & \psi \end{vmatrix} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \vec{e}_1 - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \vec{e}_2 = \vec{v}. \quad (1.45)$$

S druge strane, iz matematičke fizike poznato je da ukoliko neka vektorska funkcija \vec{B} zadovoljava uslov $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ (tzv. *solenoidalno polje*, kao što je npr. magnetno polje), onda sigurno postoji funkcija \vec{A} takva da je $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ (tzv. vektorski potencijal). Odatle direktno sledi da strujna funkcija sigurno postoji: polje brzine je pri nestišljivom kretanju solenoidalno, a njegov vektorski potencijal (koji sigurno postoji) je $\psi \vec{e}_3$.

Kako se strujna funkcija za zadato polje brzine može odrediti, demonstriraćemo na jednostavnom primeru polja brzine: $v_1 = U = \text{const}$, $v_2 = 0$. Iz jednačina (1.43) sledi:

$$U = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}. \quad (1.46)$$

Iz druge jednačine zaključujemo da ψ ne zavisi od x_1 , pa onda prvu jednačinu možemo prepisati u obliku obične diferencijalne jednačine prvog reda:

$$\frac{d\psi}{dx_2} = U,$$

odakle sledi da je $\psi = Ux_2 + \text{const}$. Strujna funkcija je određena do na integracionu konstantu, koja se određuje tako što se u nekoj tački prostora definiše koliko je ψ .

Uočimo linije duž kojih strujna funkcija u nekom fiksiranom trenutku ima konstantnu vrednost $\psi(x_1, x_2) = \text{const}$. Iz matematičke fizike je poznato da je u tom slučaju $\operatorname{grad} \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \vec{e}_2$ ortogonalan na takve linije. Izračunajmo skalarni proizvod vektora brzine \vec{v} i $\operatorname{grad} \psi$:

$$\vec{v} \cdot \operatorname{grad} \psi = v_1 \frac{\partial \psi}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \psi}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi}{\partial x_1} \frac{\partial \psi}{\partial x_2} = 0.$$

Znači, \vec{v} i $\text{grad}\psi$ su međusobno ortogonalni i leže u ravni paralelnoj ravni Ox_1x_2 . Pošto je $\text{grad}\psi$ u nekoj tački ortogonalan na liniju $\psi = \text{const}$ koja sadrži tu tačku, sledi da je vektor \vec{v} tangentan na tu liniju u toj tački. Pošto je \vec{v} istovremeno tangentan i na strujnu liniju (po definiciji), koja zbog dvodimenzionalnosti kretanja leži u istoj ravni, to znači da se strujne linije i linije $\psi = \text{const}$ poklapaju. Dakle, umesto da se strujne linije određuju direktno iz definicije, u slučaju 2d nestišljivog kretanja moguće ih je odrediti i pomoću strujne funkcije, što je često jednostavnije.

Strujna funkcija može da se izrazi i u polarnim (cilindričnim) koordinatama (r, φ) , definisanim u ravni Ox_1x_2 . Naime, polje brzine \vec{v} u tom slučaju ima oblik:

$$\vec{v} = v_r(r, \varphi)\vec{e}_r + v_\varphi(r, \varphi)\vec{e}_\varphi, \quad (1.47)$$

i, kao što je gore pokazano, važi:

$$\vec{v} = \text{rot}(\psi\vec{e}_3) = \text{rot}(\psi\vec{e}_z). \quad (1.48)$$

Koristeći osobine nabla operatora poslednji izraz dalje možemo da pišemo kao

$$\text{rot}(\psi\vec{e}_z) = \nabla \times (\psi\vec{e}_z) = \nabla\psi \times \vec{e}_z = \text{grad}\psi \times \vec{e}_z,$$

pa, pomoću izraza za gradijent u cilindričnim koordinatama:

$$\text{grad}\psi = \frac{\partial\psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}\vec{e}_\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial z}\vec{e}_z, \quad (1.49)$$

dobijamo

$$v_r = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad v_\varphi = -\frac{\partial\psi}{\partial r}. \quad (1.50)$$

Ukoliko je zadato polje brzine, strujnu funkciju $\psi(r, \varphi)$ moguće je naći rešavanjem poslednjeg sistema jednačina.

Iz dve tačke, A i B u ravni Ox_1x_2 povucimo jedinične duži u pravcu i smeru ose x_3 , čime ćemo u ravni $x_3 = 1$ dobiti redom tačke D i C . Zatim između tačaka A i B povucimo proizvoljnu liniju u ravni $x_3 = 0$ i istom takvom linijom, samo u ravni $x_3 = 1$ spojimo tačke C i D . Na taj način smo definisali površinu S ograničenu konturom $ABCD$ (slika 1.7). Izračunajmo zapreminski protok F kroz tako definisanu površinu. Prema formuli (1.31) zapreminski protok kroz S jednak je

$$F = \int \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int \int_S \text{rot}(\psi\vec{e}_3) \cdot d\vec{S},$$

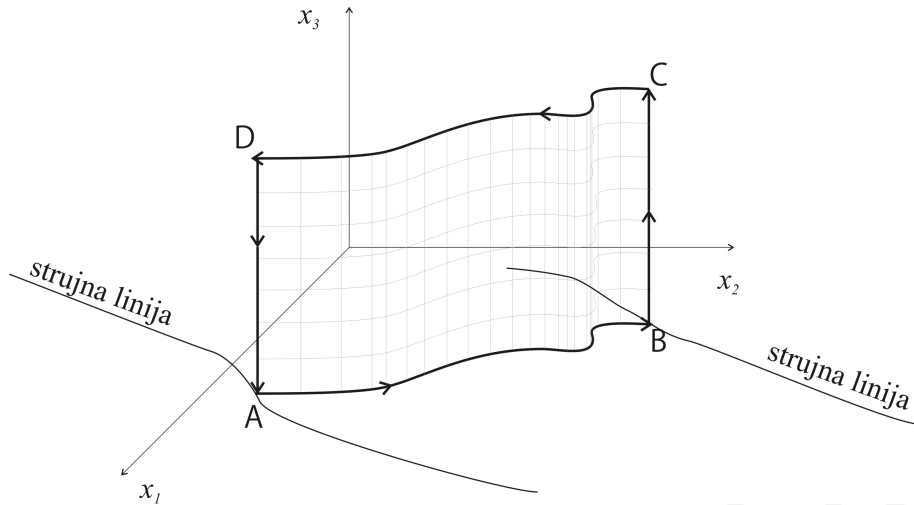
gde smo brzinu izrazili pomoću strujne funkcije. Na poslednji integral možemo da primenimo Stoksovu teoremu⁵, pa tako dalje dobijamo

$$F = \oint_{ABCD} (\psi\vec{e}_3) \cdot d\vec{l},$$

gde je $d\vec{l}$ element konture $ABCD$. Poslednji linijski integral možemo da razložimo na zbir linijskih integrala po delovima konture $ABCD$:

$$F = \int_A^B (\psi\vec{e}_3) \cdot d\vec{l} + \int_B^C (\psi\vec{e}_3) \cdot d\vec{l} + \int_C^D (\psi\vec{e}_3) \cdot d\vec{l} + \int_D^A (\psi\vec{e}_3) \cdot d\vec{l}.$$

⁵Matematički podsetnik: Stoksova teorema



Slika 1.7: Linija CD dobijena je translatorskim pomeranjem linije AB u pravcu x_3 ose za jediničnu dužinu.

Duž linija AB i CD (koje leže u ravnima ortogonalnim na osu x_3) skalarni proizvod odgovarajućeg elementa $d\vec{l}$ i orta \vec{e}_3 jednak je nuli, tako da prvi i treći sabirak u poslednjem izrazu otpadaju. S druge strane, duž linija BC i DA je $d\vec{l} = dx_3 \vec{e}_3$ i $\psi(x_1, x_2) = \text{const}$ (s obzirom na način na koji su ove duži konstruisane), pa konačno dobijamo

$$F = \psi(B) \int_B^C dx_3 + \psi(A) \int_D^A dx_3 = \psi(B) x_3|_0^1 + \psi(A) x_3|_1^0 = \psi(B) - \psi(A). \quad (1.51)$$

Znači, pomoću strujne funkcije se na jednostavan način izračunava protok kroz površine konstruisane na ovakav način, kao razlika vrednosti strujne funkcije u krajnjoj i početnoj tački linije nad kojom se konstruiše kontura koja ograničava površinu.

Zapamtiti: Ukoliko je pri nekom stacionarnom dvodimenzionalnom kretanju sredina nestišljiva ($\vec{v} = v_1(x_1, x_2)\vec{e}_1 + v_2(x_1, x_2)\vec{e}_2$ i $\text{div}\vec{v} = 0$), jednačine trajektorije, strujne linije i linije zadate jednačinom $\psi = \text{const}$ se poklapaju.

1.7 Osnovni primeri za polje brzine

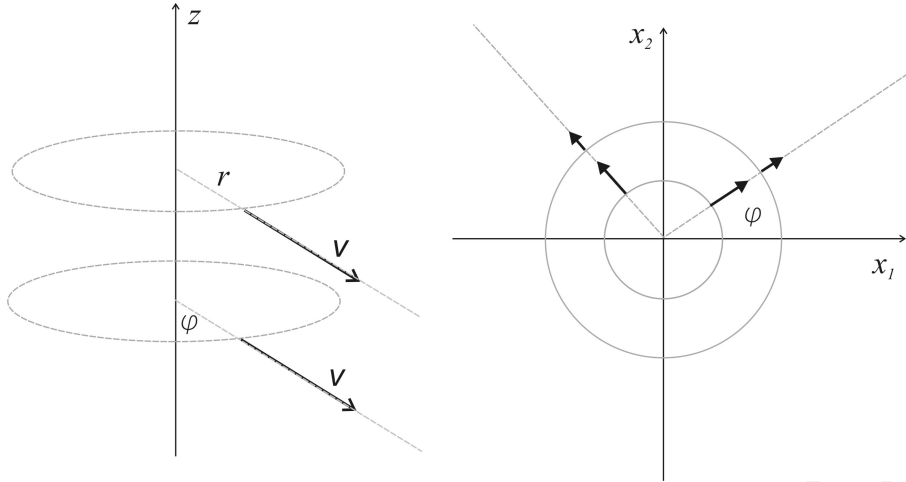
1.7.1 Linijski izvor

Pod linijskim izvorom podrazumeva se strujanje fluida kod kojeg polje brzine u cilindričnim koordinatama ima sledeći oblik:

$$\vec{v} = \frac{C}{r} \vec{e}_r, \quad (1.52)$$

gde je C konstanta (slika 1.8). Kretanje zadato ovakvim poljem je očigledno dvodimenzionalno, a lako se, pomoću izraza za divergenciju u cilindričnim koordinatama:

$$\text{div}\vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (1.53)$$



Slika 1.8: Linijski izvor.

proverava da je i nestišljivo, što znači da je moguće uvesti strujnu funkciju. Pomoću jednačina (1.50) dobijamo:

$$\frac{C}{r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad 0 = -\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

odakle prvo (iz druge jednačine) zaključujemo da ψ ne zavisi od r , a zatim iz prve dobijamo običnu diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{1}{r} \frac{d\psi}{d\varphi} = \frac{C}{r},$$

odnosno

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = C \Rightarrow \psi = C\varphi + \text{const}. \quad (1.54)$$

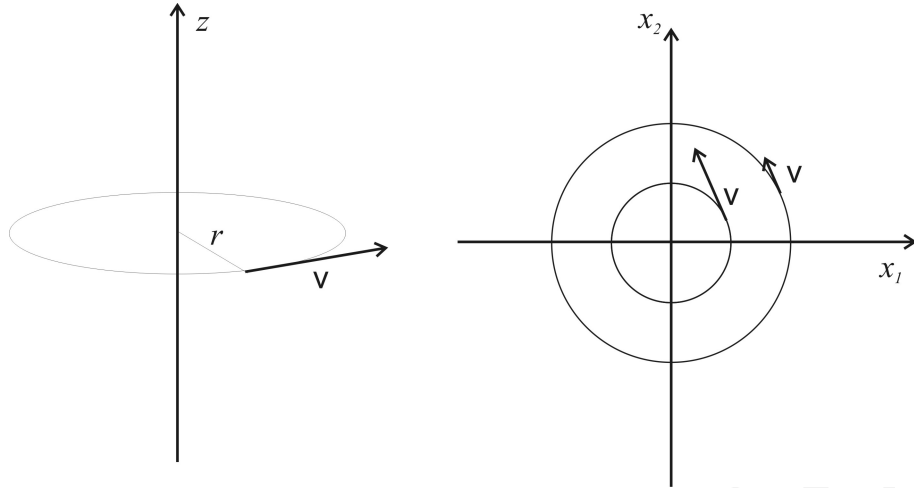
Takođe, ovo strujanje je i stacionarno, pa gustina ne zavisi ni od položaja ni od vremena, tj. $\rho = \text{const}$. To znači da masa fluida koja prođe kroz omotač cilindra čija osa se poklapa sa z -osom ne zavisi od poluprečnika osnove takvog cilindra, niti od toga na kojem delu z -ose se uoči takav cilindar. Zato ima smisla uvesti tzv. *jačinu linijskog izvora*, koja se definiše kao zapremina fluida koja u jedinici vremena isteče sa jedinične dužine izvora (tj. z -ose). Označimo tu veličinu sa m i izračunajmo je. Očigledno, m će biti jednako zapreminskom protoku F kroz omotač cilindra jedinične visine, poluprečnika osnove R , pa po formuli za zapreminski protok (1.31) sledi:

$$m = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^1 dz \frac{C}{R} R d\varphi dz = C2\pi,$$

gde smo iskoristili izraz za elementarnu površinu na cilindru: $d\vec{S} = R d\varphi dz \vec{e}_r$. Iz dobijenog izraza možemo da izrazimo konstantu C kao $m/2\pi$, pa da polje brzine linijskog izvora konačno napišemo u obliku:

$$\vec{v} = \frac{m}{2\pi r} \vec{e}_r, \quad (1.55)$$

kako je uobičajeno u fizici fluida.



Slika 1.9: Linijski vrtlog (vorteks).

1.7.2 Linijski vrtlog (vorteks)

Linijskom vrtlogu odgovara polje brzine, koje u cilindričnim koordinatama ima oblik:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi, \quad (1.56)$$

gde je Γ konstanta (slika 1.9). Ovo polje je dvodimenzionalno, a lako se proverava da važi i $\text{div} \vec{v} = 0$, tj. strujanje linijskog vrtloga je i nestišljivo, pa se može uvesti strujna funkcija ψ :

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi}, \quad \frac{\Gamma}{2\pi r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Iz prve jednačine sledi da ψ zavisi samo od r , a iz druge

$$\psi(r) = - \int \frac{\Gamma}{2\pi r} dr = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r + \text{const}.$$

Izjednačavanjem strujne funkcije sa konstantom dobijamo jednačinu strujne linije:

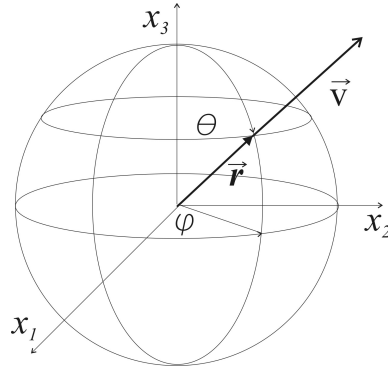
$$r = \text{const}, \quad (1.57)$$

što je, zbog stacionarnosti ovog strujanja, istovremeno i jednačina trajektorije delića fluida. Delići u ovom slučaju, dakle, kruže oko z -ose, u ravninama normalnim na tu osu. Brzina svakog delića je pri tome konstantna, utoliko veća ukoliko je delić bliže osi, a na jako malim rastojanjima neograničeno velika. Na beskonačno velikim rastojanjima od ose brzine delića teže nuli.

1.7.3 Tačkasti izvor

Tačkasti izvor predstavlja model za stacionarno nestišljivo strujanje fluida, pri kome delići fluida iz fiksirane tačke prostora kontinuirano i sferno-simetrično izleću na sve strane (slika 1.10). Polje brzine u tom slučaju mora biti oblika

$$\vec{v} = f(r) \vec{e}_r, \quad (1.58)$$



Slika 1.10: Tačkasti izvor.

gde je r rastojanje od te fiksirane tačke (izvora), a $\vec{e}_r = \vec{r}/r$ ort pravca radijus-vektora \vec{r} . Ako na ovakvo polje primenimo uslov nestišljivosti u sfernim koordinatama

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (1.59)$$

dobijamo jednačinu

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 f(r)) = 0,$$

iz koje sledi da je

$$f(r) = \frac{C}{r^2}. \quad (1.60)$$

Zapremina fluida F koja u jedinici vremena izađe iz izvora ne zavisi od vremena i jednaka je protoku kroz sferu prizvoljnog poluprečnika opisanu oko izvora, pa je uobičajeno da se konstanta C izrazi preko F . Prema formuli (1.31) za zapreminski protok, F je jednako

$$F = \int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = C \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = C 4\pi,$$

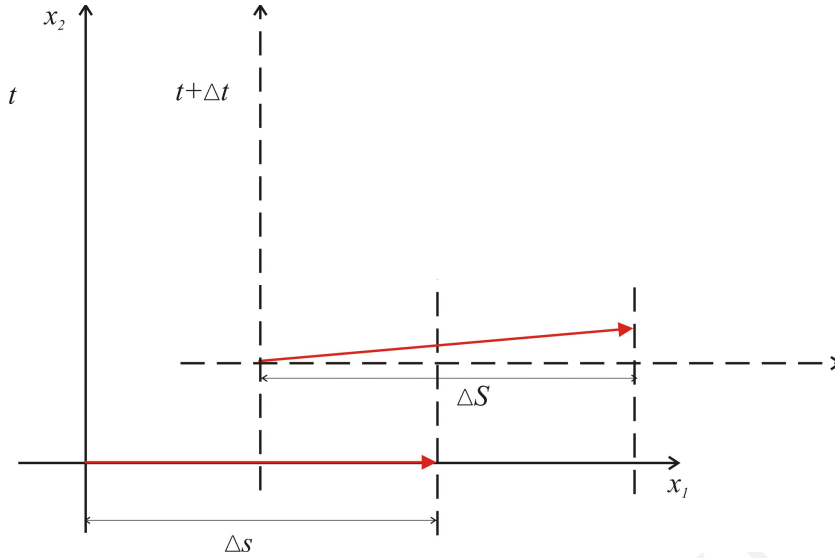
gde smo iskoristili izraz $d\vec{S} = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$ za elementarnu površinu na sferi poluprečnika r . Odatle je $C = F/(4\pi)$, pa polje brzine u slučaju tačkastog izvora konačno možemo da napišemo kao:

$$\vec{v} = \frac{F}{4\pi r^2} \vec{e}_r. \quad (1.61)$$

1.8 Tenzor brzine deformacije i vektor vrtložnosti

Neka je zadato polje brzine $\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = \vec{v}(\vec{x}, t)$. Za dve infinitezimalno bliske tačke u prostoru \vec{x} i $\vec{x} + d\vec{x}$ važi

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) - \vec{v}(\vec{x}, t) = d\vec{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i} dx_i, \quad (1.62)$$



Slika 1.11: Kratka supstancijalna duž $\Delta\vec{x} = \Delta s \vec{e}_1$ u trenutku t i njena projekcija na ravan x_1x_2 u bliskom sledećem trenutku $t + \Delta t$ (crveni vektori). Za kratko vreme Δt duž je promenila samo svoju orijentaciju i dužinu.

odakle se vidi da su komponente vektora $d\vec{v}$ linearne homogene funkcije komponentata vektora $d\vec{x}$, tj. prethodnu relaciju možemo da napišemo u sledećem matricinom obliku:

$$\begin{pmatrix} dv_1 \\ dv_2 \\ dv_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ dx_3 \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

Ovo znači da postoji linearni operator (ili tenzor) \tilde{T} , koji je u sistemu $Ox_1x_2x_3$ reprezentovan matricom

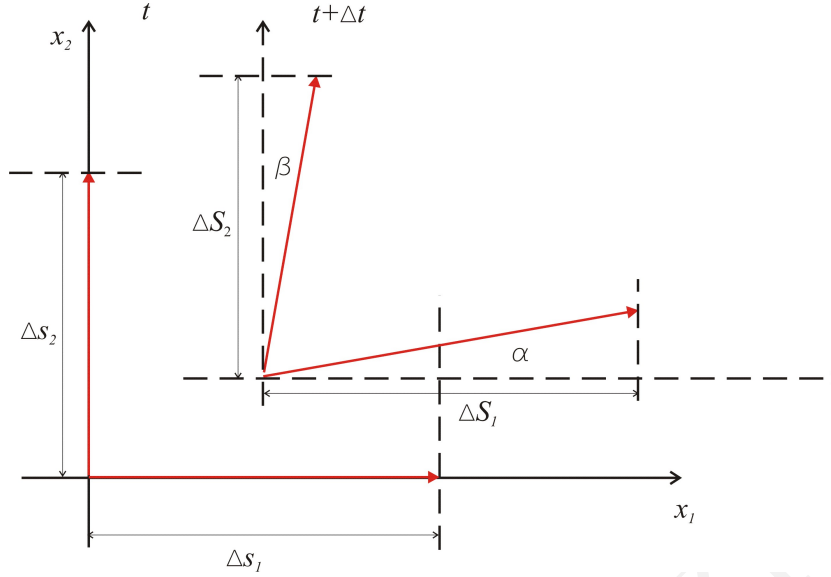
$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T}_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (1.64)$$

Tenzor \tilde{T} možemo da napišemo u obliku zbira njegovog simetričnog $\tilde{\mathcal{S}}$ i antisimetričnog dela $\tilde{\mathcal{R}}$ kao:

$$\tilde{T} = \tilde{\mathcal{S}} + \tilde{\mathcal{R}}, \quad \mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \quad \mathcal{R}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.65)$$

Simetrični tenzor $\tilde{\mathcal{S}}$ nazivamo **tenzorom brzine deformacije**. Da bismo videli kakav fizički smisao ima ovaj tenzor uočimo kratku supstancijalnu duž (tj. duž koja se sastoji od delića kontinualne sredine koju razmatramo) $\Delta\vec{x}$, koja u trenutku t ima pravac ose x_1 i dužinu Δs (slika 1.11). Za kratko vreme Δt , ova duž se pomeri, pri čemu joj se dužina i orijentacija takođe promene. Ako su Δs i Δt dovoljno mali možemo da pretpostavimo da su te promene male. Početna tačka uočene duži se u pravcu x_1 za vreme Δt pomeri za $v_1(\vec{x}, t)\Delta t$, a krajnja za $v_1(\vec{x} + \Delta\vec{x}, t)\Delta t = (v_1(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta s)\Delta t$, tako da projekcija ove duži na x_1 osu u trenutku $t + \Delta t$ ima dužinu

$$\Delta S = \left(\Delta s + \left(v_1(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta s \right) \Delta t \right) - v_1(\vec{x}, t)\Delta t = \Delta s \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1}\Delta t \right). \quad (1.66)$$



Slika 1.12: Dve kratke supstancijalne duži u trenutku t i njihova projekcija na ravan x_1x_2 u trenutku $t + \Delta t$.

Odatle direktno sledi

$$\frac{\Delta S - \Delta s}{\Delta t \Delta s} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = \mathcal{S}_{11}, \quad (1.67)$$

što znači da dijagonalni element \mathcal{S}_{11} tenzora brzine deformacije ima smisao relativne promene dužine u jedinici vremena supstancijalnih duži u pravcu ose x_1 . Sličnim postupkom bi se moglo pokazati da i preostala dva dijagonalna elementa imaju smisao brzine relativne promene dužine u odgovarajućem pravcu. Još opštije, može se pokazati da veličina $\vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{S}} \cdot \vec{n}$, gde je \vec{n} ort proizvoljnog pravca, ima fizički smisao brzine promene dužine infinitezimalnih supstancijalnih duži u pravcu orta \vec{n} .

Vandijagonalni elementi tenzora brzine deformacije su u vezi sa promenama uglova. Da bismo se u to uverili uočimo dve male supstancijalne duži sa zajedničkim početkom: $\Delta \vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ i $\Delta \vec{x}^2 = \Delta s_2 \vec{e}_2$, u trenutku t . Nakon kratkog vremenskog intervala Δt ove dve duži promene pravac, tako da projekcija prve duži na ravan x_1x_2 zaklapa mali ugao α sa osom x_1 , a projekcija druge mali ugao β sa osom x_2 (slika 1.12). Zajednička tačka ovih duži u pravcu x_2 za vreme Δt pređe put $v_2(\vec{x}, t) \Delta t$, a drugi kraj duži $\Delta \vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ se u pravcu x_2 pomeri za $v_2(\vec{x} + \Delta s_1 \vec{e}_1, t) \Delta t = (v_2(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta s_1) \Delta t$. Ugao α je onda jednak

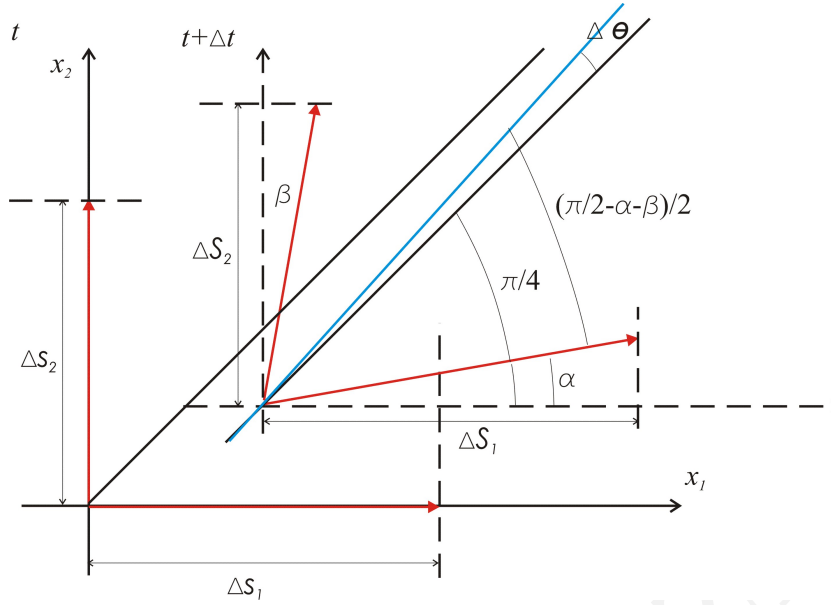
$$\alpha \approx \text{tg} \alpha = \frac{(v_2(\vec{x}, t) + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta s_1) \Delta t - v_2(\vec{x}, t) \Delta t}{\Delta s_1 \left(1 + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Delta t\right)} \approx \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \Delta t. \quad (1.68)$$

Slično, ugao β je jednak

$$\beta \approx \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \Delta t, \quad (1.69)$$

pa je vandijagonalni element \mathcal{S}_{12} jednak

$$\mathcal{S}_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = \frac{\alpha + \beta}{2 \Delta t}. \quad (1.70)$$



Slika 1.13: Projekcija (na ravan x_1x_2) simetrane ugla koji zaklapaju dve male supstancijalne duži za kratko vreme Δt zaokrene se za mali ugao $\Delta\Theta$.

Drugim rečima, vandijagonalni element \mathcal{S}_{12} ima smisao polovine promene ugla između supstancijalnih duži koje imaju pravac osa x_1 i x_2 , u jedinici vremena. Slično se pokazuje da je veličina $\vec{n} \cdot \vec{\mathcal{S}} \cdot \vec{m}$ jednaka polovini brzine promene ugla između infinitezimalnih supstancijalnih duži u pravcu međusobno ortogonalnih ortova \vec{n} i \vec{m} .

Vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ definiše se kao

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}, \quad (1.71)$$

odakle sledi da je antisimetrični tenzor $\tilde{\mathcal{R}}$ reprezentovan matricom

$$\tilde{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.72)$$

pa se lako pokazuje da je

$$\tilde{\mathcal{R}} d\vec{x} = \vec{\omega} \times d\vec{x}. \quad (1.73)$$

Ako ponovo uočimo male supstancijalne duži $\Delta \vec{x}^1 = \Delta s_1 \vec{e}_1$ i $\Delta \vec{x}^2 = \Delta s_2 \vec{e}_2$, u trenutku t i simetralu ugla između ovih duži, a zatim simetralu ugla koji projekcije ovih duži zaklapaju u trenutku $t + \Delta t$, sa slike 1.13 se vidi da je ugao $\Delta\theta$ za koji se simetrala zaokrene za vreme Δt jednak

$$\Delta\theta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \Delta t = \omega_3 \Delta t, \quad (1.74)$$

pa je

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega_3, \quad (1.75)$$

tj. komponenta ω_3 vektora vrtložnosti ima smisao ugaone brzine rotacije simetrale ugla između supstancijalnih duži koje se kreću u ravni Ox_1x_2 . Slično se može pokazati i za preostale komponente vektora vrtložnosti $\vec{\omega}$, što znači da se deo promene brzine $d\vec{v}$ (1.62) koji odgovara antisimetričnom delu tenzora \tilde{T} može interpretirati kao brzina pri rotaciji ugaonom brzinom jednakom vektoru vrtložnosti $\vec{\omega}$. Konačno, iz relacije

$$\vec{v}(\vec{x} + d\vec{x}, t) = \vec{v}(\vec{x}, t) + \vec{\omega} \times d\vec{x} + \tilde{S}d\vec{x} \quad (1.76)$$

možemo da zaključimo da je kretanje infinitezimalnih delova unutar kontinualne sredine može opisati kao kombinacija translacionog, rotacionog i deformacionog kretanja, kojima redom odgovaraju brzine $\vec{v}(\vec{x}, t)$, $\vec{\omega} \times d\vec{x}$ i $\tilde{S}d\vec{x}$ u prethodnom izrazu.

Primer 1.8.1. Polju brzine iz Primera 1.2.1 odgovaraju matrice

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} + \mathcal{T}^T) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{2}(\mathcal{T} - \mathcal{T}^T) = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

tj. tenzor \mathcal{T} je antisimetričan i jednak tenzoru vrtložnosti \mathcal{R} , a tenzor brzine deformacije je nulti tenzor $\mathcal{S} = 0$. Ovo je u skladu sa već donetim zaključkom da ovakvo polje brzine opisuje kretanje pri kome delići rotiraju oko x_3 ose ugaonom brzinom a , pa se prilikom ovakvog kretanja sredina ne deformiše.

Primer 1.8.2. Polje brzine oblika $\vec{v} = kx_2\vec{e}_1$ opisuje kretanje pri kome se delići kreću po pravim linijama paralelnim osi x_1 . Tenzorima brzine deformacije i vrtložnosti u ovom slučaju odgovaraju matrice

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R} = \frac{1}{2}k \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

što znači da se infinitezimalne supstancijalne duži koje imaju pravac koordinatnih osa ne deformišu, ali se uglovi između dve takve duži, jedne u pravcu ose x_1 , a druge u pravcu ose x_2 menjaju. Drugim rečima, pri ovakvom kretanju dolazi do deformacija iskošenja, tj. do promene oblika malih delova ovakve sredine koje se u toku kretanja sastoje od istih čestica (supstancijalne zapremine), ali ne i do promene ukupne zapremine takvih delova. Zaista, sredina je pri ovakvom kretanju nestišljiva, pošto je $\text{div}\vec{v} = \text{Tr}\mathcal{S} = 0$. Činjenica da su tenzor i vektor vrtložnosti različiti od nule može se na prvi pogled učiniti čudnom, s obzirom na to da se delići kreću pravolinijski. Međutim, ovde nikakvog apsurdna nema, pošto $\vec{\omega} \neq 0$ ukazuje samo na činjenicu da postoje mali supstancijalni delovi sredine koji rotiraju. U ovom slučaju to su, recimo, supstancijalne duži koje su u nekom trenutku postavljene u pravcu ose x_2 .

1.9 Strujne i vrtložne cevi. Jačina vrtloga. Cirkulacija brzine.

Uočimo zatvorenu konturu u prostoru. Ako kroz svaku njenu tačku povučemo strujnu liniju, objekat koji dobijamo nazivamo **strujna cev**. Strujne cevi imaju osobinu neprobojnosti, tj. delići

fluida ne mogu da prolaze kroz nju. Naime, delić koji se nađe na površini strujne cevi ima brzinu koja je tangenta na cev (pošto se cev po definiciji sastoji od strujnih linija), pa nema komponentu brzine normalnu na cev, tj. ne može da prođe kroz zid cevi.

Analogno strujnim cevima mogu se konstruisati i tzv. **virtložne cevi**, ako se prethodno definišu **virtložne linije** kao linije koje imaju osobinu da je u svakoj njihovoj tački vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ tangentan na njih. Vrtložnu cev onda dobijamo tako što kroz svaku tačku neke zatvorene konture u prostoru provučemo odgovarajuću vrtložnu liniju. Same vrtložne linije nalaze se analogno strujnim linijama. Ako sa $d\vec{r}$ označimo element vrtložne linije, onda važi jednačina $d\vec{r} \times \vec{\omega} = 0$, čijim rešavanjem dobijamo jednačine vrtložnih linija.

Pošto se vektor vrtložnosti definiše kao

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v},$$

nalaženjem njegove divergencije dobijamo:

$$\text{div} \vec{\omega} = \nabla \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0. \quad (1.77)$$

Znači, direktno iz definicije sledi da je uvek zadovoljen uslov $\text{div} \vec{\omega} = 0$, tj. polje vrtložnosti je po definiciji solenoidalno. Ako uočimo proizvoljnu zatvorenu površinu S i izračunamo fluks vektora $\vec{\omega}$ kroz tu površinu dobijamo:

$$\oint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \vec{\omega} dV = 0,$$

gde smo iskoristili teoremu Gausa-Ostrogradskog. Ako vrtložne linije crtamo tako da broj linija koji prođe kroz jediničnu površinu bude proporcionalan intenzitetu vrtložnosti u tački kroz koju smo povukli elementarnu površinu, onda dalje sledi da broj vrtložnih linija koje uđu u bilo koju zapreminu, mora biti jednak broju linija koje izađu iz te zapremine (uočiti analogiju sa magnetnim poljem \vec{B} , koje je takođe uvek solenoidalno).

Osobina solenoidalnosti polja vrtložnosti omogućava uvođenje pojma **jačine vrtloga**. Naime, uočimo neku vrtložnu cev i „odsecimo” jedan njen deo, tj. uočimo zapreminu V unutar neke konačne dužine vrtložne cevi (slika 1.14). Time smo izdvojili jedan „cilindar” na vrtložnoj cevi. Fluks vrtložnosti kroz ukupnu površinu koja ograničava zapreminu V mora biti jednak nuli. S druge strane, taj fluks možemo računati nezavisno kao zbir flukseva kroz osnove S_1 i S_2 i omotač S_o cilindra, pa je

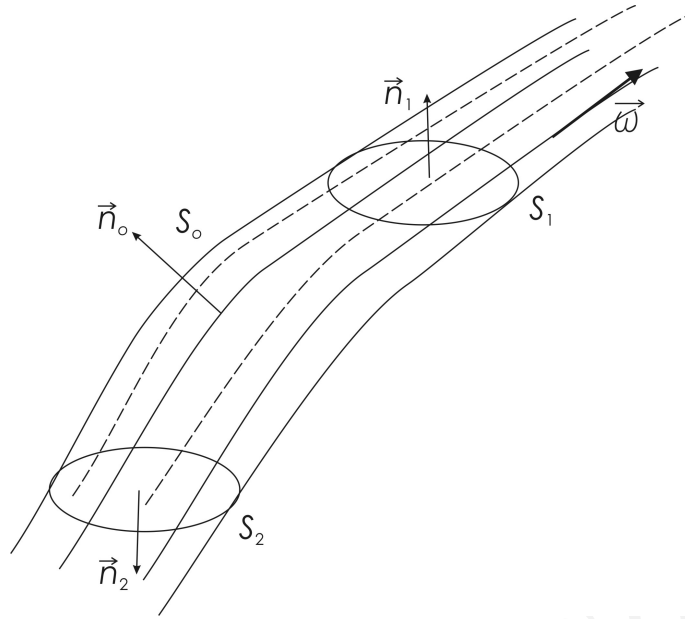
$$0 = \oint_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \int_{S_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} + \int_{S_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} + \int_{S_o} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}. \quad (1.78)$$

Integral po omotaču mora biti jednak nuli, pošto je $\vec{\omega}$ tangentan na vrtložne linije koje ga čine, pa je $\vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$. Iz prethodne relacije onda sledi:

$$\int_{S_1} \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = - \int_{S_2} \vec{\omega} \cdot d\vec{S}, \quad (1.79)$$

pri čemu su normale na površine osnova orijentisane u suprotnim pravcima, kao spoljašnje normale u odnosu na zapreminu V . Ako sada na jednoj od osnova promenimo smer normale, tako da obe normale imaju isti smer (u odnosu na neki izabrani smer vrtložnih linija) i ako iskoristimo činjenicu da ovo izvođenje važi za bilo koje poprečne preseke vrtložne cevi, možemo da zaključimo da je

$$\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \text{const}, \quad (1.80)$$



Slika 1.14: Vrtložna cev.

duž vrtložne cevi. Veličinu $\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ nazivamo jačinom vrtloga i ona je očigledno karakteristika vrtložne cevi.

Jačina vrtloga može se povezati sa cirkulacijom brzine Γ , koju definišemo kao linijski integral brzine \vec{v} po zatvorenoj konturi C :

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}, \quad (1.81)$$

gde smo sa $d\vec{r}$ označili element uočene konture. Ako primenimo Stoksovu teoremu, linijski integral u izrazu za cirkulaciju možemo da pretvorimo u površinski na sledeći način:

$$\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S}, \quad (1.82)$$

gde je S površina ograničena konturom C . Ako dalje iskoristimo definiciju vektora vrtložnosti sledi:

$$\Gamma = 2 \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}. \quad (1.83)$$

Znači, cirkulacija brzine po zatvorenoj konturi, jednaka je dvostrukoj vrednosti fluksa vrtložnosti kroz površinu obuhvaćenu konturom. Ako sada konturu izaberemo da leži na vrtložnoj cevi tako da je obuhvata (tj. ograničava poprečni presek cevi), zaključujemo da je i cirkulacija brzine duž vrtložne cevi konstantna.

U slučaju kada je proticanje fluida takvo da se njegova gustina ρ ne menja ni u toku vremena ni u prostoru, tj. kada je $\rho = \text{const}$, sigurno je zadovoljen uslov nestišljivosti $\text{div} \vec{v} = 0$, tj. i polje brzine je nestišljivo. Jasno je da tada možemo ponoviti sličnu priču, tj. ako odsečemo jedan deo strujne cevi i potražimo fluks brzine kroz ukupnu površinu koja ga ograničava, na isti način kako smo to uradili za vrtložnu cev, došli bismo do zaključka da je $\int_S \vec{v} \cdot d\vec{S} = \text{const}$ duž strujne cevi. Ako je cev dovoljno tanka, tako da možemo da smatramo da se brzina unutar jednog preseka ne menja,

onda sledi da se Sv , tj. proizvod površine poprečnog preseka cevi S i komponente brzine normalne na presek v , ne menja duž strujne cevi⁶.

Primer 1.9.1. Izračunajmo vektor vrtložnosti za linijski vrtlog:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \left(\frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \right) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \Gamma/2\pi & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Iako u ovom slučaju delići kruže oko z ose, vektor vrtložnosti je jednak nuli u svim tačkama u kojima je polje brzine definisano ($r > 0$), što znači da na lokalnom nivou mali supstancijalni delovi sredine ne rotiraju. Ako izračunamo cirkulaciju brzine oko proizvoljne zatvorene krive koja jedanput obilazi z osu, dobijamo

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \oint_C \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi \cdot (dr \vec{e}_r + r d\varphi \vec{e}_\varphi + dz \vec{e}_z) = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi} d\varphi = \Gamma,$$

odakle vidimo da oznaka Γ nije slučajno upotrebljena pri definisanju polja linijskog vrtloga. Rezultat koji smo dobili nije u suprotnosti sa činjenicom da je $\vec{\omega} = 0$, što bi moglo da se pomisli ako bismo primenili Stoksovu teoremu. Naime, pošto polje brzine, pa onda ni vektor vrtložnosti, nisu definisani za $r = 0$, tj. za tačku unutar konture C , ovde Stoksova teorema ne može da se primeni.

ZADACI

⁶U elementarnim udžbenicima iz fizike fluida upravo ova jednačina, $Sv = \text{const}$, naziva se jednačinom kontinuiteta.

©2009 - S. Elezović-Hadžić

Radna verzija
Fizika kontinuuma

Glava 2

Sile u fizici neprekidnih sredina

2.1 Zapreminske i površinske sile

U fizici kontinuuma sile se dele na zapreminske i površinske. Pod **zapreminskim silama** podrazumevaju se sile koje na sve deliće unutar kontinualne sredine deluju na isti način. Za takve sile kao osnovna kvantitativna karakteristika uvodi se **masena gustina sile** \vec{f} na sledeći način: ako je ukupna zapreminska sila koja deluje na infinitezimalno malu zapreminu mase Δm unutar posmatrane sredine jednaka $\Delta \vec{F}$, onda je \vec{f} po definiciji jednako

$$\vec{f} = \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta m}. \quad (2.1)$$

Primer za zapreminsku silu je sila gravitacije, a odgovarajuća masena gustina je

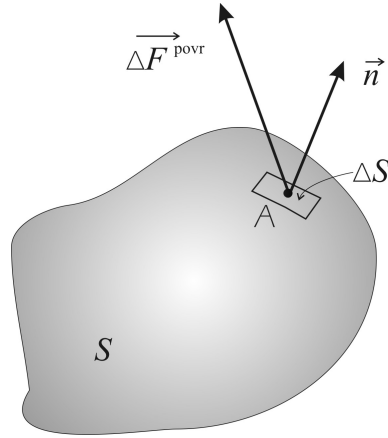
$$\vec{f} = \vec{g},$$

gde je \vec{g} gravitaciono ubrzanje.

Površinske sile su sile koje se javljaju usled interakcije između čestica unutar kontinualne sredine. Ispostavlja se da se delovanje tih sila ispoljava na graničnim površinama između pojedinih delova kontinualne sredine, a osnovna veličina kojom se ovakve sile opisuju je **vektor napona**. Uočimo u nekom trenutku tačku A u kontinualnoj sredini i neku malu površinu ΔS unutar koje se ta tačka nalazi (slika 2.1). Površinu ΔS možemo da shvatimo kao deo neke veće zatvorene površine S . Deliće unutar zapremine obuhvaćene površinom S , koji se nalaze dublje u njoj, zbog gustog „pakovanja” delića i brzog opadanja sile interakcije između molekula sa rastojanjem, praktično ne „osećaju” silu koja potiče od supstance koja se nalazi van S . To je razlog što se ta sila ispoljava samo na graničnoj površini. Označimo sa $\Delta \vec{F}^{povr}$ ukupnu površinsku silu koja deluje na deliće koji se nalaze na ΔS . Vektor napona $\vec{P}_{\vec{n}}(A)$ koji deluje u tački A se onda definiše kao

$$\vec{P}_{\vec{n}}(A) = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \vec{n} = \text{const}}} \frac{\Delta \vec{F}^{povr}}{\Delta S}, \quad (2.2)$$

gde smo sa \vec{n} označili ort normale na ΔS (koji je istovremeno i spoljašnji ort normale na zamišljenu zatvorenu površinu S). Dakle, prilikom traženja gornje granične vrednosti orijentacija površine ΔS (tj. \vec{n}) se ne menja. Ovaj zahtev je u skladu sa eksperimentalno utvrđenom činjenicom da



Slika 2.1: Zamišljeni deo unutar kontinualne sredine, obuhvaćen površinom S . Sila kojom preostali deo sredine deluje na uočeni ispoljava se samo duž granične površine S .

površinska sila koja deluje na neku malu površinu oko fiksirane tačke zavisi od toga kako je ta površina postavljena, tj. može da se menja sa orijentacijom površine. Jasno je da vektor napona ima dimenzije pritiska, a sam pritisak onda predstavlja intenzitet normalne komponente vektora napona. Znači, u opštem slučaju u kontinualnoj sredini i ta normalna komponenta vektora napona, tj. pritisak, u jednoj te istoj tački može da se menja sa orijentacijom površine.

Vektor napona je, dakle, funkcija kako položaja, tako i orijentacije površine postavljene kroz uočenu tačku. Ispostavlja se da je veza između vektora napona i orta normale na površinu tenzorskog tipa. Da bismo se u to uverili pokazaćemo prvo da je u svakoj tački kontinualne sredine zadovoljena sledeća relacija:

$$\vec{P}_{\vec{n}}(A) = -\vec{P}_{-\vec{n}}(A). \quad (2.3)$$

Uočimo tačku A u kontinualnoj sredini i opišimo oko nje malu zapreminu ΔV . Neka je ΔS površina koja sadrži tačku A i deli zapreminu ΔV na dva dela, I i II, kao na slici 2.2. Zbog prirode površinskih sila, možemo reći da je sila $\Delta \vec{F}_{I,II}$ kojom deo I deluje na deo II približno jednaka

$$\Delta \vec{F}_{I,II} = \vec{P}_{\vec{n}}(A) \Delta S. \quad (2.4)$$

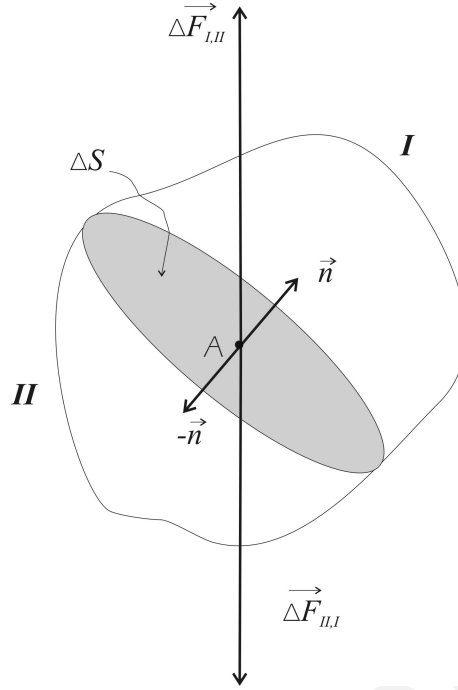
S druge strane, po definiciji vektora napona je

$$\vec{P}_{-\vec{n}}(A) = \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ -\vec{n} = \text{const}}} \frac{\Delta \vec{F}_{II,I}}{\Delta S}. \quad (2.5)$$

Ako sada iskoristimo III Njutnov zakon, zakon akcije i reakcije, možemo da napišemo da je $\Delta \vec{F}_{II,I} = -\Delta \vec{F}_{I,II}$, pa zamenom u prethodnu jednačinu dobijamo dalje

$$\vec{P}_{-\vec{n}}(A) = - \lim_{\substack{\Delta S \rightarrow 0 \\ \vec{n} = \text{const}}} \frac{\Delta \vec{F}_{I,II}}{\Delta S} = -\vec{P}_{\vec{n}}(A), \quad (2.6)$$

što je i trebalo dokazati.



Slika 2.2: Za sile kojima delovi I i II međusobno interaguju mora da važi Njutnov zakon akcije-reakcije.

2.2 Tenzor napona

Uočimo malu supstancijalnu zapreminu ΔV , u obliku piramide, kao na slici 2.3 Neka je masa sadržana unutar ove zapremine jednaka Δm . Pošto se radi o maloj zapremini, možemo da smatramo da se gustina ρ unutar nje ne menja bitno, tako da je

$$\Delta m = \rho \Delta V = \frac{1}{6} \rho \Delta a \Delta b \Delta c. \quad (2.7)$$

Ako je ubrzanje ovog tela u trenutku u kome smo ga uočili jednako \vec{a} , onda prema drugom Njutnovom zakonu važi:

$$\Delta m \vec{a} = \Delta \vec{F}^{zapr} + \Delta \vec{F}^{povr}, \quad (2.8)$$

gde je

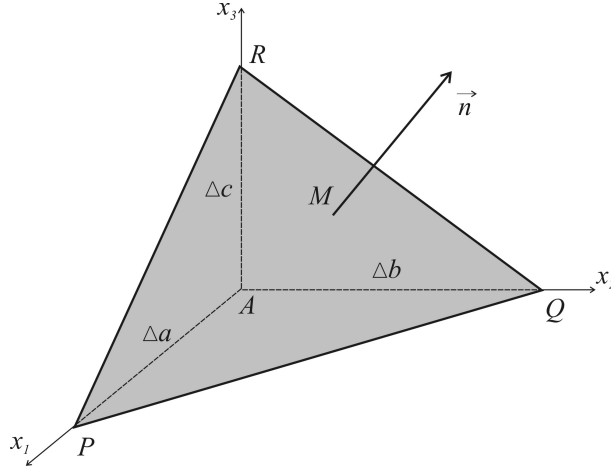
$$\Delta \vec{F}^{zapr} = \Delta m \vec{f}$$

ukupna zapreminska sila koja deluje na telo, a ukupnu površinsku silu $\Delta \vec{F}^{povr}$ koja deluje na telo možemo da napišemo u obliku zbira površinskih sila koje deluju na granične površine tela kao:

$$\Delta \vec{F}^{povr} = \Delta \vec{F}_{APR} + \Delta \vec{F}_{AQR} + \Delta \vec{F}_{AQP} + \Delta \vec{F}_{QPR}.$$

Površinske sile koje deluju na strane piramide paralelne koordinatnim ravnima mogu da se izraze preko odgovarajućih vektora napona na sledeći način:

$$\Delta \vec{F}_{AQR} = \frac{1}{2} \vec{P}_{-\vec{e}_1}(A) \Delta b \Delta c,$$



Slika 2.3: Mala supstancijska zapremina u obliku piramide unutar neprekidne sredine.

$$\Delta \vec{F}_{APR} = \frac{1}{2} \vec{P}_{-\vec{e}_2}(A) \Delta a \Delta c, \quad \Delta \vec{F}_{APQ} = \frac{1}{2} \vec{P}_{-\vec{e}_3}(A) \Delta a \Delta b,$$

gde smo opet zbog činjenice da su površine strana male pretpostavili da se unutar jedne strane vektor napona ne menja bitno, pa može da se računa u bilo kojoj tački, npr. A . Površinska sila koja deluje na preostalu stranu piramide jednaka je

$$\Delta \vec{F}_{PQR} = \vec{P}_{\vec{n}}(M) \Delta S_{PQR},$$

gde je \vec{n} ort normale na tu površinu, a M neka tačka u njoj (opet proizvoljno izabrana). Ako ort \vec{n} izrazimo preko njegovih Dekartovih komponenta kao $\vec{n} = n_1 \vec{e}_1 + n_2 \vec{e}_2 + n_3 \vec{e}_3$ i primetimo da svaki od trouglova APR , AQR i AQP predstavlja projekciju trougla PQR na odgovarajuću koordinatnu ravan, onda možemo da napišemo sledeće relacije

$$\frac{1}{2} \Delta a \Delta b = (\Delta S_{PQR} \vec{n}) \cdot \vec{e}_3 = n_3 \Delta S_{PQR},$$

$$\frac{1}{2} \Delta b \Delta c = \Delta n_1 S_{PQR}, \quad \frac{1}{2} \Delta a \Delta c = \Delta n_2 S_{PQR}.$$

Tada svaku od površinskih sila možemo da izrazimo preko površine ΔS_{PQR} kao:

$$\Delta \vec{F}_{AQR} = \vec{P}_{-\vec{e}_1}(A) n_1 \Delta S_{PQR},$$

$$\Delta \vec{F}_{APR} = \vec{P}_{-\vec{e}_2}(A) n_2 \Delta S_{PQR}, \quad \Delta \vec{F}_{APQ} = \vec{P}_{-\vec{e}_3}(A) n_3 \Delta S_{PQR},$$

a ukupnu površinsku silu koja deluje na telo kao:

$$\Delta \vec{F}^{povr} = (\vec{P}_{-\vec{e}_1}(A) n_1 + \vec{P}_{-\vec{e}_2}(A) n_2 + \vec{P}_{-\vec{e}_3}(A) n_3 + \vec{P}_{\vec{n}}(M)) \Delta S_{PQR}.$$

Zamenom izraza dobijenih za ukupnu zapreminsku (2.2) i ukupnu površinsku (2.2) silu koje deluju na uočeno malo telo u osnovnu jednačinu dinamike (2.8) dobijamo

$$\Delta m \vec{a} = \Delta m \vec{f} + (\vec{P}_{-\vec{e}_1}(A) n_1 + \vec{P}_{-\vec{e}_2}(A) n_2 + \vec{P}_{-\vec{e}_3}(A) n_3 + \vec{P}_{\vec{n}}(M)) \Delta S_{PQR},$$

odnosno

$$\rho(\vec{a} - \vec{f}) \frac{\Delta V}{\Delta S_{PQR}} = \vec{P}_{-\vec{e}_1}(A)n_1 + \vec{P}_{-\vec{e}_2}(A)n_2 + \vec{P}_{-\vec{e}_3}(A)n_3 + \vec{P}_{\vec{n}}(M).$$

Pustimo sada da uočeno telo postaje sve manje, tako što napravimo granični proces u kome se trougao PQR sve više približava tački A , ali tako da sve vreme ostaje paralelan sam sebi, tj. \vec{n} ostaje konstantan. Pri tome će $\frac{\Delta V}{\Delta S_{PQR}}$ postajati sve manje, a u limesu teži nuli. To znači da leva strana poslednje jednačine teži nuli, pa onda to mora da važi i za desnu stranu. Drugim rečima, dobijamo

$$0 = \vec{P}_{-\vec{e}_1}(A)n_1 + \vec{P}_{-\vec{e}_2}(A)n_2 + \vec{P}_{-\vec{e}_3}(A)n_3 + \vec{P}_{\vec{n}}(A),$$

gde smo iskoristili i činjenicu da u ovom graničnom procesu tačka M prelazi u tačku A . Ako sada primenimo i prethodno pokazanu osobinu (2.3) direktno sledi relacija

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \vec{P}_{\vec{e}_1}n_1 + \vec{P}_{\vec{e}_2}n_2 + \vec{P}_{\vec{e}_3}n_3, \quad (2.9)$$

čijim projektovanjem na koordinatne ose dobijamo

$$\begin{pmatrix} (\vec{P}_{\vec{n}})_1 \\ (\vec{P}_{\vec{n}})_2 \\ (\vec{P}_{\vec{n}})_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\vec{P}_{\vec{e}_1})_1 & (\vec{P}_{\vec{e}_2})_1 & (\vec{P}_{\vec{e}_3})_1 \\ (\vec{P}_{\vec{e}_1})_2 & (\vec{P}_{\vec{e}_2})_2 & (\vec{P}_{\vec{e}_3})_2 \\ (\vec{P}_{\vec{e}_1})_3 & (\vec{P}_{\vec{e}_2})_3 & (\vec{P}_{\vec{e}_3})_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix},$$

gde smo sa $(\vec{P}_{\vec{e}_i})_j$ označili j -tu Dekartovu komponentu vektora napona $\vec{P}_{\vec{e}_i}$. Drugim rečima, između komponentata vektora napona $\vec{P}_{\vec{n}}$ i komponentata orta \vec{n} postoji linearna homogena veza, tj. ova dva vektora su povezana tzv. **tenzorom napona** $\tilde{\mathcal{P}}$ kao

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \tilde{\mathcal{P}}\vec{n}. \quad (2.10)$$

Normalna komponenta vektora napona koji deluje u nekoj tački na elementarnu površinu čiji je ort normale \vec{n} jednaka je $\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}} = \vec{n} \cdot \tilde{\mathcal{P}}\vec{n}$, odakle je jasno da dijagonalni elementi tenzora napona imaju smisao normalnih komponentata napona. Slično, vandijagonalni elementi tenzora napona imaju smisao odgovarajućih tangencijalnih komponentata vektora napona.

Može se pokazati da je za najveći broj kontinualnih sredina tenzor napona simetričan, tj. $\tilde{\mathcal{P}}^\dagger = \tilde{\mathcal{P}}$ ili $\mathcal{P}_{ij} = \mathcal{P}_{ji}$. U daljem tekstu ćemo uvek pretpostavljati da to važi.

2.3 Statika fluida

U opštem slučaju, tenzor napona nije unapred zadata veličina, već se za konkretnu sredinu njegovi elementi povezuju sa drugim karakterističnim veličinama kojima se opisuje kretanje te sredine, recimo sa pritiskom, elementima tenzora brzine deformacije i slično (vrši se tzv. modeliranje sredine). Na primer, poznato je da u fluidima koji miruju postoje samo normalni naponi (fluidi se ne opiru tangencijalnim naponima, tj. kreću se sve dok tangencijalni naponi ne postanu jednaki nuli). Drugim rečima, matrica koja odgovara tenzoru napona ima oblik:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{P}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{P}_{33} \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Vektor napona koji u nekoj tački deluje na elementarnu površinu čiji je ort $\vec{n} = n_1\vec{e}_1 + n_2\vec{e}_2 + n_3\vec{e}_3$ u tom slučaju je jednak

$$\vec{P}_{\vec{n}} = \tilde{\mathcal{P}}\vec{n} = \mathcal{P}_{11}n_1\vec{e}_1 + \mathcal{P}_{22}n_2\vec{e}_2 + \mathcal{P}_{33}n_3\vec{e}_3,$$

ali takođe i izrazu

$$\vec{P}_{\vec{n}} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) \vec{n} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_1\vec{e}_1 + (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_2\vec{e}_2 + (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}) n_3\vec{e}_3,$$

pa izjednačavanjem tih izraza zaključujemo da je

$$\mathcal{P}_{11} = \mathcal{P}_{22} = \mathcal{P}_{33} = (\vec{n} \cdot \vec{P}_{\vec{n}}).$$

Ispostavlja se, dakle, da ne samo što tenzor napona ima samo dijagonalne elemente, već su oni i međusobno jednaki i upravo imaju smisao negativne vrednosti hidrostatickog pritiska p , tj. za fluide koji miruju tenzor napona ima oblik

$$\mathcal{P} = -p(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Drugim rečima, pritisak (kao normalna komponenta napona) u proizvoljnoj tački fluida koji miruje ne zavisi od orijentacije površine na koju deluje - ovaj stav poznat je i kao **Paskalov zakon**.

Sila potiska

Ukupna površinska sila \vec{F}^{povr} koja deluje na proizvoljnu supstancijalnu zapreminu V unutar fluida koji miruje (*sila potiska*) može se izračunati na sledeći način. Prema definiciji vektora napona, ta sila je jednaka

$$\vec{F}^{povr} = \oint_S \vec{P}_{\vec{n}} dS = \oint_S (-p)\vec{n} dS = - \oint_S p d\vec{S}, \quad (2.13)$$

gde je S granična površina zapremine V , a $d\vec{S} = \vec{n}dS$. Neka je $\vec{I} = \oint_S p d\vec{S}$. Ovaj integral može da se izračuna na sledeći način. Ako pomnožimo \vec{I} skalarno sa konstantnim, ali proizvoljnim vektorom \vec{a} dobijamo relaciju

$$\vec{a} \cdot \vec{I} = \oint_S (p\vec{a}) \cdot d\vec{S},$$

u kojoj novodobijeni površinski integral može da se transformiše pomoću teoreme Gausa-Ostrogradskog, pa je

$$\vec{a} \cdot \vec{I} = \int_V \text{div}(p\vec{a}) dV = \vec{a} \cdot \int_V \text{grad}p dV.$$

U poslednjem koraku iskorišćena je relacija $\text{div}(p\vec{a}) = (\text{grad}p) \cdot \vec{a}$. Jasno je da odavde sledi

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{I} - \int_V \text{grad}p dV \right) = 0.$$

Pošto je vektor \vec{a} proizvoljan, konačno može da se zaključi da je

$$\vec{I} = \oint_S p d\vec{S} = \int_V \text{grad} p dV.$$

Prilikom izvođenja ove relacije nigde nisu korišćene nikakve specijalne osobine pritiska p , što znači da ista relacija važi za bilo koju skalarnu funkciju, tj. na ovaj način smo izveli jedan specijalan slučaj (posledicu) teoreme Gausa-Ostrogradskog. Ako se sada vratimo u izraz (2.13) za silu potiska konačno dobijamo izraz

$$\vec{F}^{povr} = - \int_V \text{grad} p dV. \quad (2.14)$$

Jednačina ravnoteže

Uočimo sada neku malu supstancijalnu zapreminu ΔV u fluidu koji miruje. Ako je ΔV dovoljno malo, možemo da pretpostavimo da se gustina ρ unutar te zapremine malo menja, pa je masa ovog malog tela jednaka $\Delta m = \rho \Delta V$. Pošto fluid miruje, svi njegovi delovi se nalaze u ravnoteži, pa je ukupna sila koja deluje na svaki takav deo jednaka nuli. Ukupna sila koja deluje na uočeno malo telo jednaka je zbiru zapreminskih i površinskih sila koje deluju na njega, pa je

$$0 = \Delta m \vec{f} - \int_{\Delta V} \text{grad} p dV$$

gde je \vec{f} masena gustina zapreminskih sila. Takođe, pošto je ΔV mala zapremina, možemo da smatramo da se ni gradijent pritiska unutar nje bitno ne menja, pa je

$$\int_{\Delta V} \text{grad} p dV = \text{grad} p \Delta V.$$

Iz svega ovoga direktno sledi jednačina

$$\rho \vec{f} = \text{grad} p, \quad (2.15)$$

koja u hidrostatičkom slučaju uvek mora da bude zadovoljena.

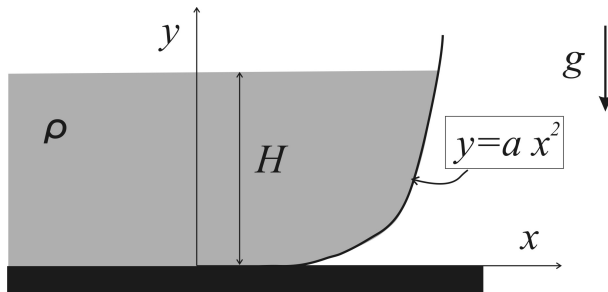
Fluid koji miruje u homogenom gravitacionom polju

Pomoću jednačine (2.15) lako možemo da nađemo kako se pritisak menja u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. U tom slučaju je $\vec{f} = \vec{g}$, pa projektovanjem jednačine na ose Dekartovog koordinatnog sistema dobijamo sledeće skalarne jednačine

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x_1}, \quad 0 = \frac{\partial p}{\partial x_2}, \quad -\rho g = \frac{\partial p}{\partial x_3}.$$

Iz prve dve dobijene jednačine sledi da pritisak zavisi samo od koordinate x_3 , pa onda iz treće sledi:

$$p(x_3) = p(0) - \int_0^{x_3} \rho g dx_3,$$



gde je $p(0)$ vrednost pritiska na nivou $x_3 = 0$. Znači, pritisak se sa povećavanjem visine smanjuje za težinu stuba fluida jediničnog poprečnog preseka, što je fizički smisao integrala dobijenog u izrazu za pritisak. Naravno, ako možemo da smatramo da se gustina ne menja, onda se za hidrostatički pritisak dobija jednostavna formula:

$$p(x_3) = p(0) - \rho g x_3.$$

Primer 2.3.1. Tečnost gustine ρ nalazi se u rezervoaru, čiji je poprečni presek prikazan na slici. Naći ukupnu silu pritiska na zakrivljeni deo zida rezervoara, širine L (duž z -ose).

Na uočeni deo zida deluje tečnost sa unutrašnje strane i atmosfera sa spoljašnje strane rezervoara. Neka je atmosferski pritisak jednak p_0 . Pritisak u tečnosti jednak je $p(y) = \text{const} - \rho g y$, gde konstantu određujemo iz uslova da je na površini tečnosti $y = H$ pritisak jednak atmosferskom:

$$p(H) = \text{const} - \rho g H = p_0 \Rightarrow \text{const} = p_0 + \rho g H \Rightarrow p(y) = p_0 + \rho g (H - y).$$

Sila kojom tečnost deluje na zid jednaka je

$$\vec{F}^t = - \int_S p d\vec{S} = - \int_S (p_0 + \rho g (H - y)) \vec{n} dS,$$

a sila kojom atmosfera spolja deluje je

$$\vec{F}^a = - \int_S p_0 (-\vec{n}) dS,$$

tako da je ukupna površinska sila koja deluje na zid:

$$\vec{F} = \vec{F}^t + \vec{F}^a = - \int_S \rho g (H - y) \vec{n} dS.$$

Element površine jednak je

$$dS = dz dl = dz \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = dz dx \sqrt{1 + (y')^2} = dz dx \sqrt{1 + 4a^2 x^2},$$

a ort normale

$$\vec{n} = \frac{\text{grad}(y - ax^2)}{|\text{grad}(y - ax^2)|} = \frac{\vec{e}_y - 2ax\vec{e}_x}{\sqrt{1 + 4a^2 x^2}},$$

pa je

$$\begin{aligned}\vec{F} &= - \int_z^{z+L} dz \int_0^{\sqrt{H/a}} dx \rho g (H - ax^2) (\vec{e}_y - 2ax\vec{e}_x) \\ &= -\rho g L \int_0^{\sqrt{H/a}} dx (H - ax^2) (\vec{e}_y - 2ax\vec{e}_x).\end{aligned}$$

Projekcija ove sile na x -osu jednaka je

$$F_x = 2\rho g L a \int_0^{\sqrt{H/a}} dx (H - ax^2)x = \frac{1}{2} L \rho g H^2,$$

a na osu y :

$$F_y = -\rho g L \int_0^{\sqrt{H/a}} dx (H - ax^2) = -\frac{2}{3} L \rho g H \sqrt{\frac{H}{a}}.$$

Pomoću jednačine (2.15) i izraza za površinsku silu (2.14) možemo da izvedemo *Arhimedov zakon*. Naime, ako zamislimo čvrsto telo zapremine V i površine S , koje je potopljeno (lebd) u fluidu koji miruje, i ako pretpostavimo da to telo ne menja gravitaciono polje, pa time ni polje pritiska u fluidu (što je prihvatljivo ako telo nije ogromno), onda je sila potiska kojom fluid deluje na telo ista kao i površinska sila koja bi delovala na površinu S da se u njoj nalazi fluid, tj.

$$\vec{F}^{potiska} = - \int_V \text{grad} p \, dV.$$

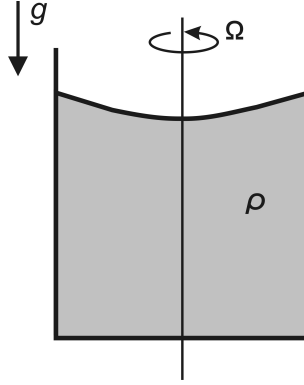
Pošto zbog ravnoteže važi

$$\rho \vec{g} = \text{grad} p,$$

zamenom u izraz za silu potiska dobijamo

$$\vec{F}^{potiska} = - \int_V \rho \vec{g} \, dV.$$

Kako je $\rho \vec{g} \, dV = \vec{g} \, dm$ težina fluida koji bi se nalazio u zapremini dV da nema čvrstog tela, integral dobijen u izrazu za silu potiska ima smisao težine fluida koji bi se nalazio u zapremini V da tu nema tela. Drugim rečima, pokazali smo da je *intenzitet sile potiska kojom fluid deluje na telo koje lebdi u njemu jednak težini telom istisnute tečnosti, a smer suprotan smeru gravitacione sile*, što zaista i tvrdi Arhimedov zakon.



Slika 2.4: Fluid, zajedno sa čašom u kojoj se nalazi, rotira oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω .

Fluid koji se kreće kao kruto telo

U fluidu koji se kreće kao kruto telo, delići se ne pomeraju jedan u odnosu na drugi, pa takođe važi da nema tangencijalnih napona, tj. tenzor napona ima oblik $\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}}$, gde je $\tilde{\mathcal{I}}$ jedinični tenzor. Površinska sila se onda računa na isti način kao i u slučaju fluida koji miruje. S druge strane, ako uočimo malu supstancijalnu zapreminu unutar ovakvog fluida, onda drugi Njutnov zakon primenjen na takvo telo ima oblik:

$$\Delta m \vec{a} = \Delta m \vec{f} + \Delta \vec{F}^{povr},$$

gde je \vec{a} ubrzanje tela. Lako se onda pokazuje da odatle sledi jednačina

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{f} - \text{grad} p. \quad (2.16)$$

Primer 2.3.2. Razmotrimo kretanje tečnosti u cilindričnoj posudi (čaši), koja u homogenom gravitacionom polju rotira oko svoje ose, postavljene vertikalno, kao na slici 2.4. Pretpostavljamo da je gustina ρ tečnosti konstantna, a da ona, zajedno sa posudom, rotira kao kruto telo, konstantnom ugaonom brzinom ω . Pošto se svaki delić fluida kreće po kružnici normalnoj na osu, ako je poluprečnik kružnice r , onda je intenzitet brzine delića $v = \omega r$, a ubrzanje je usmereno prema centru kružnice (koji se nalazi na osi rotacije). To je tzv. centripetalno ubrzanje i jednako je $\omega^2 r$. U cilindričnim koordinatama, gde je osa čase izabrana za z -osu, ubrzanje kao vektor može da se napiše u obliku $\vec{a} = -\omega^2 r \vec{e}_r$, a, pošto je $\vec{f} = -g \vec{e}_z$, projektovanjem jednačine na pravce cilindričnih ortova dobijaju se sledeće skalarne jednačine:

$$\begin{aligned} -\rho \omega^2 r &= -\frac{\partial p}{\partial r}, \\ 0 &= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\ 0 &= -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Iz druge od ovih jednačina sledi da pritisak ne zavisi od ugla φ , što se iz simetrije i očekuje. Iz treće jednačine se zaključuje da je $p(r, z) = -\rho g z + F(r)$, gde je $F(r)$ neka funkcija od r , koja se određuje zamenom dobijenog izraza za p u prvu jednačinu. Na taj način se dobija jednačina

$$\rho \omega^2 r = \frac{dF}{dr},$$

odakle je $F(r) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 + C$, gde je C integraciona konstanta, tako da je konačno pritisak unutar tečnosti jednak

$$p(r, z) = \frac{1}{2}\omega^2 r^2 - \rho g z + C.$$

Na graničnoj površini između tečnosti i vazduha pritisak ne sme da se promeni prilikom prelaska iz jedne u drugu sredinu (jer bi u tom slučaju postojala sila koja bi dovođila do promene oblika granične površine, što nije dozvoljeno pošto smo pretpostavili da se tečnost kreće kao kruto telo). To znači da je $p(r, z = z_G(r)) = p_0$, gde smo sa $z = z_G(r)$ označili jednačinu granične površine, a sa p_0 atmosferski pritisak. Odatle je

$$p_0 = \dots$$

2.4 Osnovni dinamički zakon za kontinuum

Ako uočimo malu supstancijalnu zapreminu unutar proizvoljne kontinualne sredine, onda osnovna jednačina dinamike za takvo telo ima oblik

$$\Delta m \vec{a} = \Delta m \vec{f} + \Delta \vec{F}^{povr}, \quad (2.17)$$

gde je Δm masa unutar uočene zapremine ΔV , \vec{a} ubrzanje tela, a \vec{f} srednja gustina zapreminske sile koja deluje na telo. Ako je ΔS ukupna površina koja ograničava uočeno telo, ukupna površinska sila $\Delta \vec{F}^{povr}$ koja deluje na telo jednaka je

$$\begin{aligned} \Delta \vec{F}^{povr} &= \oint_{\Delta S} \vec{P}_{\vec{n}} dS = \oint_{\Delta S} \tilde{\mathcal{P}} \cdot \vec{n} dS = \oint_{\Delta S} \tilde{\mathcal{P}} \cdot d\vec{S} \\ &= \oint_{\Delta S} \tilde{\mathcal{P}} \cdot \left(\sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \vec{e}_i \right) = \oint_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \tilde{\mathcal{P}} \vec{e}_i \\ &= \oint_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (\vec{e}_i \cdot d\vec{S}) \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j P_{ji} = \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \oint_{\Delta S} \sum_{i=1}^3 (P_{ji} \vec{e}_i) \cdot d\vec{S} \\ &= \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \int_{\Delta V} \operatorname{div} \left(\sum_{i=1}^3 P_{ji} \vec{e}_i \right) dV \\ &= \int_{\Delta V} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_j \operatorname{div} (\tilde{\mathcal{P}}^\dagger \cdot \vec{e}_j) dV, \end{aligned} \quad (2.18)$$

gde smo iskoristili oznaku za divergenciju tenzora, koja se u opštem slučaju za proizvoljni tenzor $\tilde{\mathcal{A}}$ u trodimenzionalnom prostoru definiše kao

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{A}} = \nabla \tilde{\mathcal{A}} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div} (\tilde{\mathcal{A}} \vec{e}_i). \quad (2.19)$$

Zbog simetričnosti tenzora napona dalje imamo

$$\Delta \vec{F}^{povr} = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}^\dagger dV = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} dV, \quad (2.20)$$

odakle je

$$\Delta \vec{F}^{povr} = \Delta V \langle \text{div} \tilde{\mathcal{P}} \rangle, \quad (2.21)$$

gde smo sa $\langle \text{div} \tilde{\mathcal{P}} \rangle$ označili srednju vrednost divergencije tenzora napona u uočenoj supstancijalnoj zapremini. Vraćanjem ovog izraza u jednačinu (2.17), njenim deljenjem sa Δm , konačno u limesu $\Delta V \rightarrow 0$ dobijamo **osnovni dinamički zakon** za kontinualnu sredinu:

$$\vec{a} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{\mathcal{P}}. \quad (2.22)$$

Pošto je

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}, \quad (2.23)$$

eksplicitnije ova jednačina ima oblik

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{\mathcal{P}}. \quad (2.24)$$

To je vektorska parcijalna diferencijalna jednačina u kojoj su nezavisne promenljive prostorne koordinate i vreme, a nepoznata funkcija brzina. U opštem slučaju, međutim, ni gustina ρ ni elementi tenzora napona nisu poznati, tako da je svaku konkretnu sredinu potrebno modelirati, tj. na neki način dovesti tenzor napona u vezu sa brzinom dodatnim jednačinama (tzv. konstitutivne jednačine). Što se zapreminskih sila tiče, one su u ovom kontekstu po pravilu poznate.

Glava 3

Rešenja zadataka

3.1 Opisivanje kretanja

Rešenje.

3.2 Sile u fizici neprekidnih sredina

Rešenje.

Deo II

Fluidi

Radna Verzija
Fizika kontinuuma

Glava 4

Viskozni fluidi

Pri kretanju fluida realno postoje tangencijalni naponi i oni su u vezi sa **viskoznošću**, tj. unutrašnjim trenjem. Usled uzajamne interakcije brže čestice fluida teže da povuku sporije, tako da se javljaju tangencijalni naponi između slojeva fluida koji se kreću različitim brzinama. Takođe, usled toplotnog kretanja pri sudaru čestica iz slojeva različitih brzina ili pri prelasku čestica iz jednog u drugi sloj dolazi do razmene impulsa, što se takođe manifestuje kroz postojanje tangencijalnih napona. Prvi mehanizam nastajanja viskoznosti je dominantan kod tečnosti, a drugi kod gasova. Jasno je da u oba slučaja viskoznost zavisi od temperature. Kako se sa porastom temperature povećava rastojanje među česticama, kod tečnosti se viskoznost smanjuje sa porastom temperature. Kod gasova se, naprotiv, usled intenziviranja toplotnog kretanja, sa porastom temperature povećava razmena impulsa između slojeva, a samim tim sa temperaturom se povećava i viskoznost.

4.1 Navije-Stoksovi fluidi

U opštem slučaju, postojanje tangencijalnih napona znači da tenzor napona ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{E}} + \tilde{\mathcal{P}}', \quad (4.1)$$

gde je $\tilde{\mathcal{P}}'$ tzv. *tenzor viskoznosti*. Mi ćemo ovde detaljnije razmotriti samo slučaj **Navije-Stoksovih fluida**, kod kojih tenzor viskoznosti ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}}' = 2\eta\tilde{\mathcal{K}}_1 + \xi\tilde{\mathcal{K}}_2, \quad (4.2)$$

gde su η i ξ **dinamički koeficijenti viskoznosti** (koje smatramo konstantama), a

$$\tilde{\mathcal{S}} = \tilde{\mathcal{K}}_1 + \tilde{\mathcal{K}}_2, \quad \tilde{\mathcal{K}}_2 = \frac{1}{3}(\nabla\vec{v})\tilde{\mathcal{E}}. \quad (4.3)$$

Iz definicije tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_2$ sledi da on predstavlja deo tenzora brzine deformacije koji je u vezi sa deformacijama pri kojima ne dolazi do iskošenja, tj. promena oblika (pošto nema vandijagonalnih elemenata), već samo do promena zapremine (tzv. *izotropne* deformacije), pri čemu je

$$\text{Tr}\tilde{\mathcal{K}}_2 = \nabla\vec{v} = \text{Tr}\tilde{\mathcal{S}}.$$

Ako pri kretanju ne dolazi do promena zapremine, onda je $\tilde{\mathcal{K}}_2 = 0$, pa se tenzor brzine deformacije svodi na tenzor $\tilde{\mathcal{K}}_1$, tj. $\tilde{\mathcal{K}}_1$ predstavlja onaj deo tenzora brzine deformacije koji je u vezi

sa deformacijama pri kojima dolazi samo do promene oblika, a ne i zapremine (tzv. *ekvivolumne* deformacije).

Razmotrimo kako izgleda tenzor viskoznosti u slučaju jednostavnog polja brzine oblika $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$. Lako se proverava da je pri ovakvom kretanju fluid nestišljiv, što znači da je

$$\tilde{\mathcal{P}}' = 2\eta\tilde{\mathcal{S}} = \frac{1}{2}\frac{dv}{dx_2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je sila viskoznosti $d\vec{F}^{visk}$ koja deluje na elementarnu površinu $d\vec{S} = dS\vec{e}_2$, koja razdvaja dva sloja sa istom brzinom, jednaka

$$d\vec{F}^{visk} = \tilde{\mathcal{P}}'d\vec{S} = dS\eta\frac{dv}{dx_2}\vec{e}_1,$$

tj. njen intenzitet je

$$|d\vec{F}^{visk}| = \eta dS \left| \frac{dv}{dx_2} \right|.$$

Ovaj rezultat poznat je kao Njutnov zakon viskoznosti.

Primer 4.1.1. Zadatak 5.1 iz Zbirke

Primer 4.1.2. Zadatak 5.2 iz Zbirke

4.2 Navije-Stoksova jednačina

Da bismo dobili eksplicitan oblik osnovnog dinamičkog zakona za Navije-Stoksove fluide potrebno je da izračunamo divergenciju tenzora viskoznosti, odnosno divergencije tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_1$ i $\tilde{\mathcal{K}}_2$. Divergencija tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_2$ jednaka je

$$\nabla\tilde{\mathcal{K}}_2 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3\vec{e}_i\text{div}((\text{div}\vec{v})\vec{e}_i) = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^3\vec{e}_i\frac{\partial}{\partial x_i}(\text{div}\vec{v}) = \frac{1}{3}\text{graddiv}\vec{v}, \quad (4.4)$$

a divergencija tenzora $\tilde{\mathcal{K}}_1$:

$$\nabla\tilde{\mathcal{K}}_1 = \nabla\tilde{\mathcal{S}} - \nabla\tilde{\mathcal{K}}_2 = \sum_{i=1}^3\vec{e}_i\text{div}(\tilde{\mathcal{S}}\vec{e}_i) - \frac{1}{3}\text{graddiv}\vec{v}. \quad (4.5)$$

Pošto je

$$\tilde{\mathcal{S}}\vec{e}_i = \sum_{j=1}^3\mathcal{S}_{ji}\vec{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_j, \quad (4.6)$$

sledi da je

$$\begin{aligned} \text{div}(\tilde{\mathcal{S}}\vec{e}_i) &= \frac{1}{2}\text{div}\sum_{j=1}^3\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)\vec{e}_j = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^3\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^3\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \sum_{j=1}^3\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\text{div}\vec{v} + \Delta v_i\right), \end{aligned} \quad (4.7)$$

pa je

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{S}} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 \vec{e}_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \vec{v} + \Delta v_i \right) = \frac{1}{2} (\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \Delta \vec{v}), \quad (4.8)$$

odnosno

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{K}}_1 = \frac{1}{6} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{1}{2} \Delta \vec{v}. \quad (4.9)$$

Onda je divergencija tenzora viskoznosti

$$\operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}' = \frac{\eta + \xi}{3} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \eta \Delta \vec{v}, \quad (4.10)$$

pa osnovni dinamički zakon dobija oblik jednačine

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta + \xi}{3\rho} \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}, \quad (4.11)$$

poznate pod nazivom **Navije–Stoksova jednačina**. Ako je gustina konstantna, onda Navije–Stoksov fluid nazivamo Stoksovim fluidom, a iz Navije–Stoksove jednačine sledi tzv. **Stoksova jednačina**:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \frac{\eta}{\rho} \Delta \vec{v}. \quad (4.12)$$

Često se umesto kombinacije $\frac{\eta}{\rho}$ koristi tzv. kinematički koeficijent viskoznosti $\nu = \eta/\rho$. U sledećoj tabeli date su uporedo vrednosti dinamičkog η i kinematičkog koeficijenta ν za neke fluide na temperaturi $T = 288 \text{ K}$:

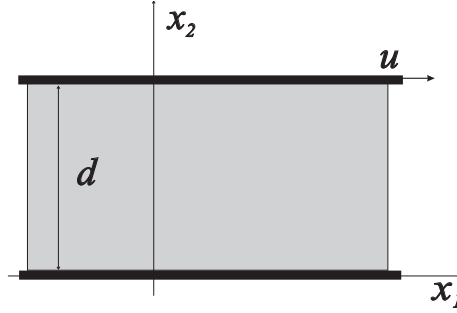
koeficijent [jedinice]	vazduh	voda	živa	maslinovo ulje	glicerin
$\eta \left[\frac{\text{kg}}{\text{ms}} \right]$	1.8×10^{-5}	1.1×10^{-3}	1.6×10^{-6}	0.10	2.33
$\nu \left[\frac{\text{m}^2}{\text{s}} \right]$	1.5×10^{-5}	1.1×10^{-6}	1.2×10^{-7}	1.1×10^{-4}	1.8×10^{-3}

I Stoksova i Navije–Stoksova jednačina su parcijalne diferencijalne jednačine, drugog reda i nelinearne, u opštem slučaju vrlo komplikovane. U nastavku teksta na nekoliko jednostavnih primera stacionarnog proticanja fluida demonstriramo kako se može rešiti Stoksova jednačina.

4.3 Osnovni primeri stacionarnog laminarnog proticanja viskoznog fluida

4.3.1 Ravno Kuetovo strujanje

Treba naći profil brzine u Stoksovom fluidu koji stacionarno protiče između dve paralelne beskonačne ravne ploče (slika 4.1). Zapreminske sile se zanemaruju, a fluid se kreće samo usled kretanja gornje ploče u sopstvenoj ravni konstantnom brzinom \vec{u} . Neka je rastojanje između ploča



Slika 4.1: Ravno Kuetovo strujanje - Stoksov fluid stacionarno i laminarno struji kroz prostor između dve velike paralelne ploče, usled toga što se jedna od ploča pomera u svojoj ravni konstantnom brzinom.

d , a gustina fluida $\rho = \text{const}$. Izaberimo koordinatni sistem tako da donja ploča leži u ravni $x_2 = 0$, gornja u ravni $x_2 = d$, a neka je x_1 osa određena pravcem vektora \vec{u} , tj neka je $\vec{u} = u\vec{e}_1$. Pod pretpostavkom da je kretanje laminarno, tj. u slojevima (dakle da nema značajnog mešanja susednih slojeva, tj. turbulencija), kao i zbog simetrije, uzmimo da je brzina delića u fluidu oblika $\vec{v} = v(x_2)\vec{e}_1$. Onda je

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \left(v \frac{\partial}{\partial x_1} \right) \vec{v} = 0,$$

a pošto se zapreminske sile zanemaruju i nema gradijenta pritiska, Stoksova jednačina se svodi na

$$\Delta \vec{v} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2 v}{dx_2^2} = 0, \quad (4.13)$$

odakle sledi

$$v(x_2) = C_1 x_2 + C_2. \quad (4.14)$$

Integracione konstante u poslednjem izrazu odeđuju se iz graničnih uslova – u ovom slučaju to su tzv. uslovi *slepljivanja*. Naime, usled viskoznosti delići fluida neposredno uz čvrstu površinu se lepe za nju, tako da je brzina delića jednaka brzini granice (površine). U ovom slučaju to znači da je $v(0) = 0$, pošto ploča $x_2 = 0$ miruje, odnosno $v(d) = u$, pošto se ploča $x_2 = d$ kreće brzinom u . Zamenom ovih graničnih uslova u dobijeni izraz za profil brzine, dobijamo dve jednostavne algebarske jednačine, čijim rešavanjem nalazimo konstante C_1 i C_2 , tako da je konačno

$$\vec{v} = \frac{u}{d} x_2 \vec{e}_1. \quad (4.15)$$

4.3.2 Poazejevo strujanje

Pod Poazejevim¹ strujanjem podrazumeva se stacionarno laminarno proticanje Stoksovog fluida kroz cilindričnu cev kružnog poprečnog preseka poluprečnika R , usled delovanja konstantnog gradijenta pritiska u pravcu ose cevi. Zbog simetrije problema najzgodnije je raditi u cilindričnim

¹Jean-Louis-Marie Poiseuille (1799-1869), francuski lekar koji je u cilju izučavanja cirkulacije krvi u ljudskom organizmu sprovodio eksperimente sa strujanjem tečnosti kroz cevi. Smatra se da je on prvi počeo da meri krvni pritisak pomoću živinog manometra.

koordinatama, koje su uvedene tako da se z -osa poklapa sa osom cilindra. Pretpostavimo takođe da brzina fluida ima oblik $\vec{v} = v(r)\vec{e}_z$. Ako zanemarimo zapreminske sile i ako je gradijent pritiska jednak

$$\text{grad } p = -K\vec{e}_z$$

Stoksova jednačina

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v}$$

se svodi na

$$0 = \frac{1}{\rho}K\vec{e}_z + \frac{\eta}{\rho}\Delta\vec{v},$$

odnosno

$$\frac{K}{\eta}\vec{e}_z = -\Delta\vec{v}.$$

Laplasijan vektorske veličine u krivolinijskim koordinatama može da se izračuna korišćenjem identiteta

$$\text{rotrot}\vec{v} = \text{graddiv}\vec{v} - \Delta\vec{v}, \quad (4.16)$$

što se u ovom slučaju, zbog nestišljivosti fluida, tj. uslova $\text{div}\vec{v} = 0$, svodi na

$$\Delta\vec{v} = -\text{rotrot}\vec{v}.$$

Pošto je

$$\text{rot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_r & rv_\varphi & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & v(r) \end{vmatrix} = -\frac{dv}{dr}\vec{e}_\varphi$$

sledi da je

$$\Delta\vec{v} = -\text{rotrot}\vec{v} = \begin{vmatrix} \frac{1}{r}\vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r}\vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\frac{dv}{dr} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right)\vec{e}_z$$

tako da se konačno iz Stoksove jednačine dobija sledeća obična diferencijalna jednačina:

$$\frac{K}{\eta} = -\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv(r)}{dr}\right),$$

Iz ove jednačine prvo sledi

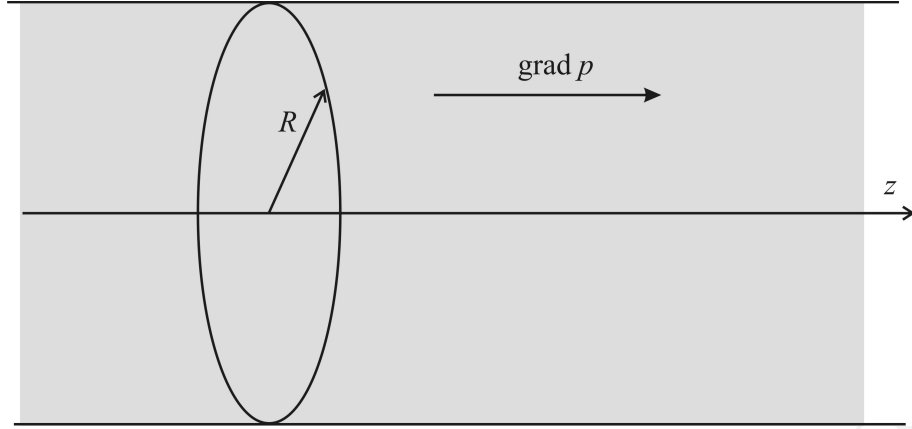
$$r\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{K}{2\eta}r^2 + C_1,$$

a zatim

$$v(r) = -\frac{K}{4\eta}r^2 + C_1 \ln r + C_2.$$

Ukoliko bi integraciona konstanta C_1 bila različita od nule, to bi značilo da delići fluida na osi cevi imaju beskonačno veliku brzinu, što fizički nije realno - to znači da konstanta C_1 mora biti jednaka nuli. Drugu integracionu konstantu C_2 određujemo iz graničnog uslova za $r = R$: $v(R) = 0$, odakle je $C_2 = KR^2/4\eta$, pa se konačno za brzinu dobija izraz

$$v(r) = \frac{KR^2}{4\eta}\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \quad (4.17)$$



Slika 4.2: Poazejevo strujanje - Stoksov fluid laminarno i stacionarno struji kroz cev usled postojanja konstantnog gradijenta pritiska u pravcu ose cevi.

4.3.3 Kuetovo strujanje

U slučaju Kuetovog strujanja Stoksov fluid stacionarno protiče između dva beskonačna koaksijalna cilindra, poluprečnika r_1 i r_2 ($r_1 < r_2$), usled njihove rotacije oko zajedničke ose ugaonim brzinama ω_1 i ω_2 , respektivno, pri čemu se zapreminske sile zanemaruju (slika 4.3). Zbog simetrije problema polje brzine treba tražiti u obliku

$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi, \quad (4.18)$$

gde su (r, φ, z) cilindrične koordinate, pri čemu se osa z poklapa sa zajedničkom osom cilindara.

Supstancijalni izvod brzine je ovde najzgodnije izraziti preko formule

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\text{grad}v^2 - \vec{v} \times \text{rot}\vec{v}, \quad (4.19)$$

koja se može dobiti na sledeći način. Pođimo od izraza $\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b})$. Transformisaćemo taj izraz imajući u vidu da je

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_1}\vec{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\vec{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\vec{e}_3$$

istovremeno vektorski i diferencijalni operator. Tako dobijamo

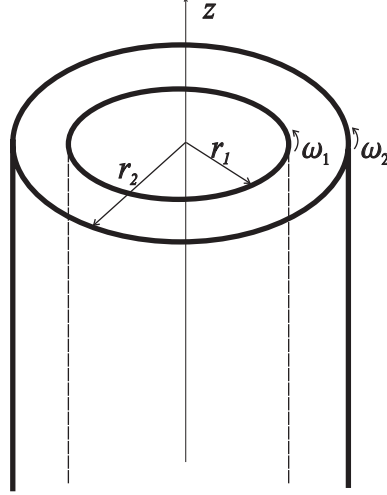
$$\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) = \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b},$$

gde smo \vec{b} u prvom sabirku sa desne strane podvukli da bismo naglasili da ∇ deluje kao diferencijalni operator samo na njega, a ne i na \vec{a} . Slično je

$$\vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}.$$

Sabiranjem poslednjih dveju jednačina dobijamo

$$\vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) = \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) + \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a}$$



Slika 4.3: Kuetovo strujanje - sloj Stoksovog fluida stacionarno i laminarno struji u prostoru između dva dugačka koaksijalna cilindra, usled njihove rotacije oko zajedničke ose.

$$= \nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} = \text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} - (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a},$$

odakle specijalno za $\vec{a} = \vec{b} = \vec{v}$ sledi

$$\vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}) = \frac{1}{2} \nabla(\vec{v} \cdot \vec{v}) - (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v},$$

odnosno

$$(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \frac{1}{2} \nabla(v^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}). \quad (4.20)$$

Zamenom poslednjeg izraza u supstancijalni izvod brzine (6) dobijamo ubrzanje u zadatom obliku.

Zbog stacionarnosti proticanja je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, a ako primenimo izraze za gradijent i rotor u cilindričnim koordinatama, dobijamo

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{v^2}{r} \vec{e}_r. \quad (4.21)$$

Kako je $\Delta \vec{v} = -\text{rot rot } \vec{v}$, Stoksova jednačina u ovom slučaju dobija oblik

$$\frac{v^2}{r} \vec{e}_r = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial p}{\partial z} \vec{e}_z \right) - \frac{\eta}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) \vec{e}_\varphi, \quad (4.22)$$

iz kog, projektovanjem na pravce ortova slede tri skalarne jednačine

$$\frac{v^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4.23)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} - \frac{\eta}{\rho} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right), \quad (4.24)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \quad (4.25)$$

Iz poslednje od ovih jednačina sledi da pritisak ne zavisi od z , a onda se iz pretposlednje jednačine dobija

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = -\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right),$$

pa je

$$p(r, \varphi) = -\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) \varphi + F(r). \quad (4.26)$$

S druge strane, iz smisla ugla φ sledi da je $p(r, \varphi + 2\pi) = p(r, \varphi)$, što znači da je

$$-\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) (\varphi + 2\pi) + F(r) = -\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) \varphi + F(r),$$

odakle je

$$-\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) 2\pi = 0,$$

odnosno

$$-\eta r \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) \right) = 0. \quad (4.27)$$

Iz jednačine (4.26) se onda vidi da pritisak ne zavisi od ugla φ , što je i moglo da se očekuje iz simetrije. Dalje, iz jednačine (4.27) sledi prvo

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rv) = C_1, \quad (4.28)$$

a zatim

$$rv = \int C_1 r dr = \frac{C_1}{2} r^2 + C_2$$

i konačno

$$v(r) = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (4.29)$$

Konstante C_1 i C_2 određuju se iz graničnih uslova:

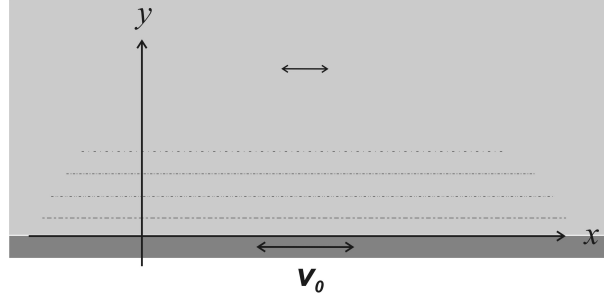
$$v(r_1) = \omega_1 r_1, \quad v(r_2) = \omega_2 r_2. \quad (4.30)$$

Zamenom dobijenog izraza za brzinu u ove granične uslove dobijamo sistem od dve algebarske jednačine po C_1 i C_2 , čijim rešavanjem nalazimo

$$C_1 = 2 \frac{\omega_2 r_2^2 - \omega_1 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}, \quad C_2 = (\omega_1 - \omega_2) \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}. \quad (4.31)$$

4.4 Nestacionarno strujanje viskoznog fluida

Do sada smo razmatrali samo stacionarna strujanja fluida. Sada ćemo na jednom primeru razmotriti rešavanje Stoksove jednačine u slučaju kada brzina fluida eksplicitno zavisi od vremena. Pretpostavimo da se Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η nalazi u poluprostoru $y > 0$ i da se nestacionarno kreće usled toga što se granična ravan $y = 0$ kreće brzinom $v_0(t) = a \cos \omega t$



Slika 4.4: Primer nestacionarnog strujanja Stoksovog fluida: fluid koji ispunjava poluprostor $y > 0$ kreće se usled oscilovanja čvrstog zida koji leži u ravni $y = 0$. Zid osciluje u sopstvenoj ravni.

u pravcu x -ose, gde su a i ω konstante (slika 4.4). Ako zanemarimo zapreminske sile i gradijent pritiska, a zbog simetrije pretpostavimo da brzina delića ima pravac x -ose, pri čemu joj intenzitet zavisi samo od vremena i y -koordinate (tj. od rastojanja od ploče koja osciluje), Stoksova jednačina se svodi na jednačinu

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \quad (4.32)$$

gde je v intenzitet brzine, a $\nu = \eta/\rho$ kinematički koeficijent viskoznosti. Uvedimo kompleksnu funkciju

$$\hat{v} = \hat{F}(y)e^{i\omega t}. \quad (4.33)$$

Ako ovakva funkcija zadovoljava jednačinu (4.32), onda sigurno i njen realni deo zadovoljava tu jednačinu. Potražimo rešenje jednačine (4.32) u obliku (4.33), pri čemu ćemo zahtevati da realni deo funkcije \hat{v} zadovoljava granični uslov

$$\text{Re } \hat{v}(x, y = 0, z, t) = a \cos \omega t = v_0(t). \quad (4.34)$$

Pošto je

$$\frac{\partial \hat{v}}{\partial t} = \hat{F}(y)i\omega e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 \hat{v}}{\partial y^2} = \frac{d^2 \hat{F}}{dy^2} e^{i\omega t}, \quad (4.35)$$

iz jednačine (4.32) sledi da kompleksna funkcija $\hat{F}(y)$ treba da zadovoljava jednačinu

$$\frac{d^2 \hat{F}}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} \hat{F} = 0, \quad (4.36)$$

čije je opšte rešenje funkcija oblika

$$\hat{F}(y) = A \exp \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1 + i)y \right] + B \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1 + i)y \right], \quad (4.37)$$

gde su A i B kompleksne konstante. Odatle je

$$\begin{aligned} \hat{v} &= A \exp \left[\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \exp \left[i \left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \right] \\ &+ B \exp \left[-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right] \exp \left[i \left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \right], \end{aligned} \quad (4.38)$$

pa je brzina jednaka

$$v(y, t) = \exp\left(\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) \operatorname{Re}\left\{A \exp\left[i\left(\omega t + \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)\right]\right\} \\ + \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) \operatorname{Re}\left\{B \exp\left[i\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)\right]\right\}. \quad (4.39)$$

Kada $y \rightarrow 0$ član $e^{\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y}$ u prethodnom izrazu za brzinu teži beskonačnosti, što bi značilo da se na jako velikim rastojanjima od ploče (čije je oscilovanje uzrok kretanja fluida) deliћи kreću jako velikim brzinama. Pošto za to ne postoje nikakvi fizički razlozi, treba uzeti da je konstanta A jednaka nuli, što znači da brzina ima oblik

$$v(y, t) = \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) \left[B_1 \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) - B_2 \sin\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right)\right], \quad (4.40)$$

gde je $B = B_1 + iB_2$, tj. B_1 i B_2 su redom realni i imaginarni deo kompleksne konstante B . Iz graničnog uslova (4.34) konačno sledi da je $B_1 = a$ i $B_2 = 0$, pa je

$$v(y, t) = a \exp\left(-\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right) \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}y\right). \quad (4.41)$$

Iz dobijenog izraza za brzinu vidi se da u svakoj ravni paralelnoj graničnom zidu deliћи takođe harmonijski osciluju sa istom frekvencom kao i zid, ali sa faznim zakašnjenjem koje zavisi od y i sa amplitudom koja se smanjuje sa y po eksponencijalnom zakonu.

Glava 5

Idealan fluid

Realni fluidi su u većoj ili manjoj meri viskozni, međutim česte su situacije kada viskoznost može da se zanemari, što odgovara zanemarivanju tangencijalnih napona. Formalno, to znači da tenzor napona ima oblik:

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}}. \quad (5.1)$$

Videli smo da ovakvo naponsko stanje odgovara fluidima koji miruju, kao i fluidima koji se kreću kao kruto telo, tj. kod kojih nema relativnog međusobnog pomeranja slojeva. U ostalim slučajevima, pretpostavka da naponsko stanje ima oblik (5.1) predstavlja aproksimaciju i tada kažemo da fluid opisujemo modelom *idealnog fluida*.

5.1 Ojlerova jednačina

Pošto je

$$\operatorname{div}(-p\tilde{\mathcal{I}}) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}(-p\tilde{\mathcal{I}}\vec{e}_i) = - \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \operatorname{div}(p\vec{e}_i) = - \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{\partial p}{\partial x_i} = -\operatorname{grad} p,$$

iz opšte jednačine kretanja za kontinualnu sredinu

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \nabla \tilde{\mathcal{P}},$$

sledi diferencijalna jednačina kretanja za idealni fluid

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p, \quad (5.2)$$

koja se naziva **Ojlerova jednačina**. Ona predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu, u kojoj su koordinate i vreme nezavisno promenljive, a unapred je u opštem slučaju zadata jedino masena gustina zapreminskih sila \vec{f} . Gustina i pritisak mogu da se menjaju, tj. mogu da zavise i od koordinata i vremena, tako da Ojlerova jednačina u opštem slučaju nije dovoljna za određivanje polja brzine, već ju je potrebno dopuniti još nekim jednačinama. Uvek može da se iskoristi jednačina kontinuiteta, ali je osim nje potrebna još jedna jednačina, pošto ima ukupno pet nepoznatih funkcija (tri komponente brzine, pritisak p i gustina ρ). Takođe, pošto se radi o parcijalnoj diferencijalnoj

jednačini, potrebno je znati i početne i granične uslove. Ako je granični uslov zadat na čvrstom zidu (uz koji fluid struji), zbog zanemarivanja viskoznosti ne postoji razlog da se deliće lepe za taj zid. Zato se uslov slepljivanja, koji važi za Navije-Stoksove fluide, zamenjuje *uslovom neprobojnosti*, koji je blaži. Naime, tangencijalna komponenta brzine idealnog fluida na čvrstoj granici može imati proizvoljnu vrednost (delići fluida mogu da klize po zidu), ali normalna komponenta brzine u odnosu na granicu mora biti jednaka nuli, jer delići ne mogu da prođu kroz čvrsti zid.

Ukoliko se iskoristi identitet

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v},$$

iz Ojlerove jednačine dobija se tzv. *Gromeka-Lembova* jednačina:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p. \quad (5.3)$$

5.2 Bernulijev integral

Često direktno rešavanje Ojlerove, odnosno Gromeka-Lembove jednačine, može da se izbegne, ako se iskoristi tzv. *Bernulijev integral*, koji predstavlja posledicu ovih jednačina u slučaju kada su zadovoljeni sledeći uslovi:

- kretanje je stacionarno:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0,$$

- zapreminske sile su konzervativne, tj. masena gustina zapreminske sile može da se izrazi kao

$$\vec{f} = -\text{grad} u,$$

gde je u potencijalna energija jedinice mase (ili masena gustina potencijalne energije) i

- fluid je *barotropan*, tj. pritisak je funkcija samo gustine $p = p(\rho)$ (o čemu će kasnije biti više reči) ili je gustina fluida konstantna, tako da možemo uvesti funkciju I relacijom:

$$I = \int \frac{dp}{\rho},$$

što onda znači da je

$$\frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} I.$$

Naime, ako je $\rho = \text{const}$, prethodna jednakost je očigledna ($I = p/\rho$), a za barotropni fluid se dobija na sledeći način:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \text{grad} p &= \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial p}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial p}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \\ &= \frac{1}{\rho} \frac{dp}{d\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) \\ &= \frac{dI}{d\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \rho}{\partial x_2} \vec{e}_2 + \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \vec{e}_3 \right) = \text{grad} I. \end{aligned}$$

Da bismo izveli izraz koji odgovara Bernulijevom integralu pomnožimo Gromeka-Lembovu jednačinu (5.3) skalarno elementom strujne linije: $d\vec{r} = \lambda \vec{v}$. Na taj način dobijamo izraz

$$\left(\frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} \right) \cdot d\vec{r} = (-\text{grad} u - \text{grad} I) \cdot d\vec{r},$$

gde smo iskoristili zadate pretpostavke. Ako skupimo sve članove koji sadrže gradijent i prebacimo ih na levu stranu jednačine, a ostale članove na desnu, sledi

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + u + I \right) \cdot d\vec{r} = (\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}) \cdot d\vec{r}. \quad (5.4)$$

Međutim, mešoviti proizvod na desnoj strani je jednak nuli (pošto su \vec{v} i $d\vec{r}$ kolinearni), pa je

$$\text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + u + I \right) \cdot d\vec{r} = 0,$$

odnosno

$$d \left(\frac{1}{2} v^2 + u + I \right) = 0,$$

gde smo iskoristili formulu $\text{grad} F \cdot d\vec{r} = dF$, koja važi za proizvoljnu funkciju $F = F(x_1, x_2, x_3)$. Odatle konačno sledi da je

$$\frac{1}{2} v^2 + I + u = \text{const} \quad (5.5)$$

duž strujne linije, što predstavlja **Bernulijev integral**. Naravno, pošto se radi o stacionarnom strujanju, kod koga se uvek strujne linije poklapaju sa trajektorijama delića, ovo važi i za trajektorije delića.

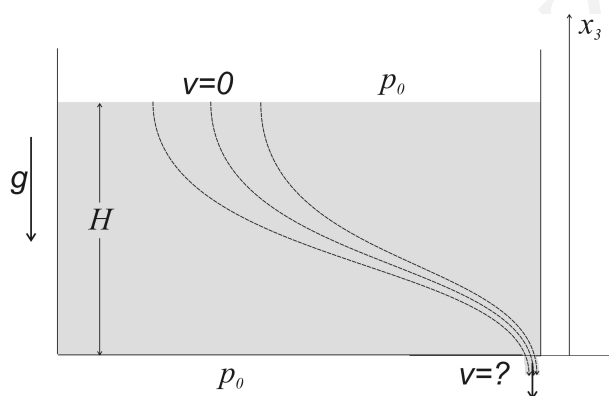
Ako je $\rho = \text{const}$, a jedina zapreminska sila je sila gravitacije: $\vec{f} = -g\vec{e}_z$, Bernulijev integral dobija oblik:

$$\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} + gx_3 = \text{const}. \quad (5.6)$$

Primenimo ovu jednačinu na nalaženje brzine v isticanja tečnosti iz velikog rezervoara. Otvor kroz koji tečnost ističe je vrlo mali i nalazi se na dnu rezervoara, u odnosu na koji ćemo meriti nivo tečnosti u rezervoaru. Pošto je rezervoar veliki, možemo da pretpostavimo da se slobodna površina tečnosti (koja se nalazi na visini $x_3 = H$) sporo spušta, tako da je brzina delića na tom nivou približno jednaka nuli. Pritisak je jednak atmosferskom kako na slobodnoj površini tečnosti, tako i na mestu gde tečnost curi iz rezervoara, pa ako primenimo (5.6) na tačke $x_3 = H$ i $x_3 = 0$ duž jedne strujne linije, lako dobijamo da je tražena brzina jednaka $v = \sqrt{2gH}$. Ovaj rezultat poznat je kao *Toričelijeva teorema*.

Ispostavlja se da Bernulijev integral važi ne samo duž strujne, već i duž vrtložne linije (naravno, ukoliko je $\vec{\omega} \neq 0$). Naime, ako Gromeka-Lembovu jednačinu pomnožimo elementom vrtložne linije $d\vec{r} = \lambda \vec{\omega}$ (umesto elementom strujne linije), opet ćemo dobiti jednačinu (5.4), čija je desna strana jednaka nuli, samo ovaj put zato što su vektori $\text{rot} \vec{v} = 2\vec{\omega}$ i $d\vec{r}$ kolinearni.

Iz načina na koji je Bernulijev integral izveden i činjenice da Stoksova jednačina u slučaju kada je $\text{rot} \vec{v} = 0$ dobija oblik Ojlerove jednačine (pošto je $\Delta \vec{v} = -\text{rot} \text{rot} \vec{v}$), sledi da Bernulijev integral važi duž strujne linije (i trajektorije delića) ne samo za idealan fluid, već i za Stoksov fluid koji struji bezvrtložno.



Slika 5.1: Toričelijeve teorema: primenom Bernulijeve jednačine lako se nalazi da je brzina isticanja tečnosti iz velikog rezervoara jednaka $v = \sqrt{2gH}$.

Glava 6

Potencijalno strujanje

6.1 Potencijal brzine

Ako je $\vec{\omega} = \frac{1}{2}\text{rot}\vec{v} = 0$ kažemo da fluid struji bezvrtložno ili potencijalno. Iz matematike je poznato da kada je $\text{rot}\vec{v} = 0$ sigurno (tj. pod dosta širokim uslovima) postoji skalarna funkcija Φ , takva da je $\vec{v} = \text{grad}\Phi$. Funkciju Φ zovemo *potencijal brzine*. Površine koje imaju osobinu da u svakoj njihovoj tački potencijal ima istu vrednost zovemo *ekvipotencijalne površine*. Iz definicije gradijenta sledi da je vektor brzine u svakoj tački ortogonalan na ekvipotencijalnu površinu koja sadrži tu tačku. Naime, ako skalarno pomnožimo vektor brzine i elementarni vektor $d\vec{r}$ koji leži u ekvipotencijalnoj površini dobićemo: $\vec{v} \cdot d\vec{r} = \text{grad}\Phi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial\Phi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\Phi}{\partial x_3}dx_3 = d\Phi$, što predstavlja promenu vrednosti potencijala pri pomeranju unutar ekvipotencijalne površine za vektor $d\vec{r}$ (u fiksiranom vremenskom trenutku), a to je nula.

6.2 Koši-Lagranžev integral

Razmotrimo sada potencijalno strujanje idealnog barotropnog fluida u polju potencijalne zapreminske sile. Polazeći od Gromeka-Lembove jednačine, dobijamo

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\text{grad}v^2 = -\text{grad}(u + I),$$

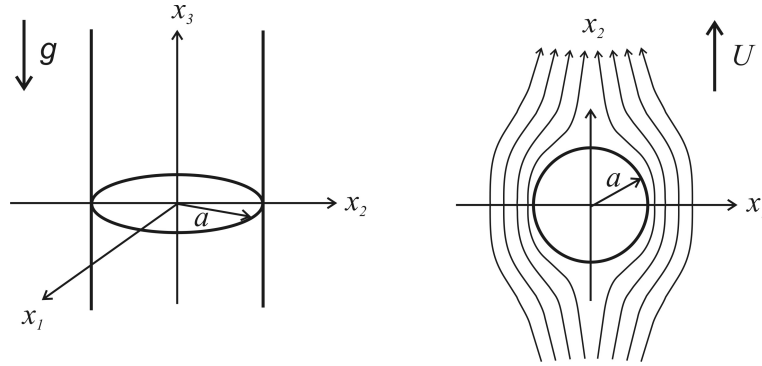
a odatle, pošto je $\vec{v} = \text{grad}\Phi$ i $\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \text{grad}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, sledi

$$\text{grad}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + I + u\right) = 0.$$

Dobijena jednačina znači da su svi parcijalni izvodi po koordinatama funkcije u zagradi jednaki nuli, tj. ona zavisi samo od vremena:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + I + u = F(t). \quad (6.1)$$

Ovo je tzv. *Koši-Lagranžev* (ili nestacionarni Bernulijev) *integral*. Jasno je da se u slučaju stacionarnog potencijalnog strujanja idealnog barotropnog fluida u polju konzervativnih zapreminskih sila Bernulijev i Koši-Lagranžev integral svode na isto, tj. zbir $(\frac{1}{2}v^2 + I + u)$ ima istu vrednost u svakom trenutku i svakoj tački u prostoru.



Slika 6.1: Bezvrtložno poprečno strujanje nestišljivog fluida oko dugačkog cilindra.

6.3 Potencijalno strujanje nestišljivog fluida

Ukoliko nestišljiv fluid struji potencijalno, onda iz uslova nestišljivosti $\text{div} \vec{v} = 0$, kada brzinu izrazimo preko njenog potencijala Φ , sledi $\text{divgrad} \Phi = \Delta \Phi = 0$. Potencijal brzine, dakle, u slučaju nestišljivog fluida mora da zadovoljava Laplasovu jednačinu

$$\Delta \Phi = 0, \quad (6.2)$$

bez obzira na konkretnu prirodu takvog fluida. Ovo u nekim slučajevima omogućava da se nađe polje brzine strujanja nestišljivog fluida bez rešavanja konkretne diferencijalne jednačine kretanja: Ojlerove, Stoksove ili neke druge. Ilustrovaćemo takvu mogućnost kroz sledeći primer.

6.3.1 Potencijalno strujanje oko cilindra

Pretpostavimo da oko jako dugačkog, nepokretnog kružnog cilindra, poluprečnika osnove a , normalno na njegovu osu, stacionarno i bezvrtložno struji nestišljiv fluid, tako da je na jako velikim rastojanjima od cilindra polje brzine homogeno (slika 6.3.1). Uvedimo koordinatni sistem tako da se osa x_3 poklapa sa osom cilindra, a da osa x_2 ima pravac i smer brzine fluida na jako velikim rastojanjima od cilindra, tj. $\lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v} = U \vec{e}_2$, $U = \text{const}$. Uzmimo još i da se ceo sistem nalazi u homogenom gravitacionom polju $\vec{g} = -g \vec{e}_3$. Ako zbog simetrije pretpostavimo da potencijal zavisi samo od cilindričnih koordinata r i φ , onda možemo da ga tražimo rešavanjem Laplasove jednačine u cilindričnim koordinatama:

$$\Delta \Phi = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (6.3)$$

Jedan od čestih načina rešavanja Laplasove jednačine je *metod razdvajanja promenljivih*, koji bi se u ovom slučaju sveo na pretpostavku da rešenje možemo da tražimo u obliku

$$\Phi = R(r)F(\varphi).$$

Ako takav oblik za Φ zamenimo u Laplasovu jednačinu dobijamo:

$$\frac{F}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0,$$

a ako zatim celu jednačinu pomnožimo sa r^2 i podelimo sa RF sledi

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = 0.$$

Leva strana poslednje jednačine napisana je u obliku zbira dva sabirka od kojih jedan zavisi samo od promenljive r , a drugi samo od promenljive φ . Kako su promenljive r i φ međusobno nezavisne, a zbir ova dva sabirka je uvek jednak nuli, zaključujemo da je to moguće jedino ako su oba sabirka jednaka nekim konstantama, koje u zbiru daju nulu, tj:

$$\frac{r}{R} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = C, \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d\varphi^2} = -C. \quad (6.5)$$

Na taj način se Laplasova jednačina, koja je parcijalna diferencijalna jednačina, raspala na dve obične diferencijalne jednačine. Razmotrimo prvo jednačinu (6.5) koju zadovoljava deo potencijala koji zavisi od ugla φ . Ova jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\frac{d^2 F}{d\varphi^2} + CF = 0,$$

čije opšte rešenje zavisi od znaka konstante C . Ako je $C < 0$ opšte rešenje ove jednačine je linearna kombinacija eksponencijalnih funkcija $\exp(\sqrt{-C}\varphi)$ i $\exp(-\sqrt{-C}\varphi)$, međutim takva funkcija nije periodična po φ . Imajući u vidu da je

$$\vec{v} = \text{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial\varphi} \vec{e}_\varphi = F \frac{dR}{dr} \vec{e}_r + \frac{R}{r} \frac{dF}{d\varphi} \vec{e}_\varphi, \quad (6.6)$$

jasno je da uslov $\vec{v}(r, \varphi + 2\pi) = \vec{v}(r, \varphi)$, koji iz očiglednih fizičkih razloga treba da bude zadovoljen za svako $r \geq a$, sa takvom funkcijom $F(\varphi)$ nikako ne može da bude zadovoljen. To znači da je $C \geq 0$. Ako je $C = 0$, to bi značilo da je $F(\varphi)$ linearna funkcija po φ , dakle opet neperiodična, pa ostaje jedino mogućnost da je konstanta C strogo veće od nule, tj. $C = k^2$, gde je k realan broj. U tom slučaju opšte rešenje jednačine (6.5) ima oblik

$$F = A \cos k\varphi + B \sin k\varphi, \quad (6.7)$$

a iz zahteva da brzina bude periodična funkcija sa periodom 2π onda sledi da k treba da bude ceo broj. To ne može da bude nula, jer bi to značilo da je $C = 0$, što je mogućnost koju smo već odbacili, a jasno je da se opštost ne smanjuje ako uzmemo da je $k > 0$.

Jednačina (6.4) koju zadovoljava deo potencijala $R(r)$ može da se prepíše kao

$$r \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = Rk^2,$$

odnosno

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - k^2 R = 0.$$

Ova jednačina poznata je kao Ojlerova diferencijalna jednačina i njeno rešenje traži se u obliku stepene funkcije: $R(r) = Dr^\alpha$. Zamenom pretpostavljenog $R(r)$ i njegovih izvoda $R' = D\alpha r^{\alpha-1}$ i $R'' = D\alpha(\alpha-1)r^{\alpha-2}$ u tu jednačinu sledi:

$$D\alpha(\alpha-1)r^\alpha + D\alpha r^\alpha - Dk^2 r^\alpha = 0,$$

a nakon skraćivanja sa Dr^α :

$$\alpha^2 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = \pm k.$$

To dalje znači da je opšte rešenje jednačine (6.4) funkcija oblika

$$R(r) = D_1 r^k + \frac{D_2}{r^k},$$

pa se za potencijal brzine dobija funkcija oblika

$$\Phi(r, \varphi) = (A \cos k\varphi + B \sin k\varphi) \left(D_1 r^k + \frac{D_2}{r^k} \right), \quad (6.8)$$

a za brzinu

$$\vec{v} = k(A \cos k\varphi + B \sin k\varphi) \left(D_1 r^{k-1} - \frac{D_2}{r^{k+1}} \right) \vec{e}_r + k \left(D_1 r^{k-1} + \frac{D_2}{r^{k+1}} \right) (-A \sin k\varphi + B \cos k\varphi) \vec{e}_\varphi.$$

Na površini cilindra, tj. za $r = a$, brzina ne može da ima normalnu komponentu - to je tzv. *uslov neprobojnosti*. To onda znači da je

$$v_r(r = a, \varphi) = 0 \quad \Rightarrow \quad D_1 a^{k-1} - \frac{D_2}{a^{k+1}} = 0 \quad \Rightarrow \quad D_2 = D_1 a^{2k}. \quad (6.9)$$

S druge strane, na jako velikim rastojanjima od cilindra, tj. za $r \rightarrow \infty$, brzina dobija oblik

$$\begin{aligned} \vec{v} &= k D_1 r^{k-1} [(A \cos k\varphi + B \sin k\varphi) \vec{e}_r + (-A \sin k\varphi + B \cos k\varphi) \vec{e}_\varphi] \\ &= k D_1 r^{k-1} \{ [A(\cos k\varphi \cos \varphi + \sin k\varphi \sin \varphi) + B(\sin k\varphi \cos \varphi - \cos k\varphi \sin \varphi)] \vec{e}_1 \\ &\quad + [A(\cos k\varphi \sin \varphi - \sin k\varphi \cos \varphi) + B(\sin k\varphi \sin \varphi + \cos k\varphi \cos \varphi)] \vec{e}_2 \} \\ &= k D_1 r^{k-1} \{ [A \cos(k-1)\varphi + B \sin(k-1)\varphi] \vec{e}_1 + [-A \sin(k-1)\varphi + B \cos(k-1)\varphi] \vec{e}_2 \}, \end{aligned}$$

što treba da bude jednako $U \vec{e}_2$ za svako φ . Očigledno, to je moguće jedino ako je $k = 1$, $A = 0$ i $D_1 B = U$, tako da je konačni izraz za potencijal brzine u proizvoljnoj tački fluida:

$$\Phi(r, \varphi) = U r \sin \varphi \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right), \quad (6.10)$$

a za brzinu:

$$\vec{v} = U \left[\sin \varphi \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{e}_r + \cos \varphi \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \vec{e}_\varphi \right]. \quad (6.11)$$

Iz ovog izraza vidi se da je brzina na površini cilindra različita od nule, tj. ne može da bude zadovoljen uslov slepljivanja. Drugim rečima, iako pri nalaženju brzine nismo ništa konkretno pretpostavili o prirodi fluida, ovakvo polje brzine (potencijalno) ipak ne može da bude uspostavljeno u Stoksovom fluidu, već samo u idealnom.

6.3.2 Dalamberov paradoks

Pošto je strujanje opisano u prethodnom odeljku potencijalno i stacionarno, fluid konstantne gustine, a zapreminske sile potencijalne, važe i Bernulijev i Koši-Lagranžev integral u obliku:

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \text{const.} \quad (6.12)$$

Konstanta može da se odredi ako su poznate vrednosti brzine i pritiska u bilo kojoj tački u prostoru. Poznato je da intenzitet brzine na jako velikim rastojanjima od cilindra teži U , pa ako se još uzme i da je za $z = 0$ pritisak na jako velikim rastojanjima jednak p_0 , dobija se da je

$$\text{const} = \frac{U^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}.$$

Odatle je pritisak u proizvoljnoj tački fluida jednak

$$p = p_0 - \rho gz + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right)^2 \sin^2 \varphi - \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right)^2 \cos^2 \varphi \right], \quad (6.13)$$

a na površini cilindra, tj. za $r = a$, važi da je

$$p = p_0 - \rho gz + \frac{1}{2}\rho U^2 (1 - 4 \cos^2 \varphi). \quad (6.14)$$

Pošto smo odredili pritisak na površini cilindra, dalje nije teško naći i silu kojom fluid deluje na deo cilindra jedinične dužine. Element površine je

$$d\vec{S} = a d\varphi dz \vec{e}_r = a d\varphi dz (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2),$$

pa je tražena sila

$$\begin{aligned} \vec{F} &= - \int_S p d\vec{S} \\ &= -a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^H dz \left[p_0 - \rho gz + \frac{1}{2}\rho U^2 (1 - 4 \cos^2 \varphi) \right] (\cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2) \\ &= 2aH\rho U^2 \int_0^{2\pi} \cos^3 \varphi d\varphi \vec{e}_1 = 0. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Ovaj rezultat predstavlja primer tzv. **Dalamberovog paradoksa**. Naime, na osnovu svakodnevnog iskustva očekivali bismo da fluid u ovom slučaju deluje nenultom silom na cilindar. Ovde, međutim, nema nikakvog paradoksa - dobijeni rezultat samo znači da je pretpostavka o potencijalnosti strujanja pogrešna, što se vidi i iz činjenice da dobijeno polje brzine ne zadovoljava uslov slepljivanja. U opštem slučaju uslov slepljivanja, koji realno uz čvrste granice ne može da se zanemari, obično dovodi do lokalnih vrtloženja, čija je onda posledica nemogućnost uspostavljanja potencijalnog strujanja. Dalamber je...

6.4 Kompleksni potencijal

Razmotrimo slučaj dvodimeziionalnog bezvrtložnog strujanja nestišljivog fluida, kada Dekartove komponente brzine v_1 i v_2 možemo da izrazimo bilo preko parcijalnih izvoda potencijala Φ , kao:

$$v_1 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \quad v_2 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2},$$

bilo preko parcijalnih izvoda strujne funkcije, kao:

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1}.$$

Izjednačavanjem ovako napisanih izaraza za komponente brzine, dobijamo jednakosti:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1},$$

koje imaju isti oblik kao Koši-Rimanovi uslovi za analitičnost kompleksne funkcije:

$$W(z) = \Phi + i\psi,$$

gde je kompleksna promenljiva z definisana kao $z = x_1 + ix_2$. Ovako definisanu analitičku kompleksnu funkciju zovemo **kompleksni potencijal brzine**. Ako je za neko strujanje zadat kompleksni potencijal onda je jasno da su njime definisani potencijal brzine, kao njegov realni deo, i strujna funkcija, kao njegov imaginarni deo. Pomoću njih onda na standardan način možemo da nađemo brzinu, ali takođe možemo da primetimo da je

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + i \frac{\partial \psi}{\partial x_1} = v_1 - iv_2.$$

Drugim rečima, komponente brzine možemo da nađemo i bez eksplicitnih izraza za potencijal ili strujnu funkciju. Dovoljno je da izračunamo izvod kompleksnog potencijala, pa je njegov realni deo komponenta brzine v_1 , a negativna vrednost njegovog imaginarnog dela je jednaka komponenti v_2 . Iz tih razloga funkciju $\frac{dW}{dz}$ zovemo **kompleksna brzina**.

Primeri kompleksnog potencijala

Homogeno polje brzine

Ako je strujanje homogeno u pravcu ose x_1 : $\vec{v} = U\vec{e}_1$, $U = \text{const}$, lako se proverava da je $\text{rot}\vec{v} = 0$, pa potencijal brzine nalazimo iz jednačina $U = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}$ i $0 = \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}$. Iz druge jednačine sledi da potencijal zavisi samo od x_1 koordinate, pa se onda prva jednačina svodi na jednostavnu običnu diferencijalnu jednačinu, čije je rešenje: $\Phi = Ux_1 + \text{const}$. Slično, za strujnu funkciju se nalazi: $\psi = Ux_2 + \text{const}$. Ako uzmemo da su integracione konstante jednake nuli, onda je kompleksni potencijal: $W(z) = Ux_1 + iUx_2 = Uz$.

Linijski izvor

Za linijski izvor $\vec{v} = \frac{m}{2\pi r} \vec{e}_r$ smo ranije već našli da je strujna funkcija u cilindričnim koordinatama oblika $\psi = \frac{m}{2\pi} \varphi$. Lako se proverava da je $\text{rot} \vec{v} = 0$, pa ako brzinu izrazimo preko gradijenta Φ u cilindričnim koordinatama, iz nepostojanja komponente v_φ zaključujemo da potencijal zavisi samo od r koordinate, pri čemu je

$$\frac{m}{2\pi r} = \frac{d\Phi}{dr} \Rightarrow \Phi = \frac{m}{2\pi} \ln r,$$

pa je kompleksni potencijal za linijski izvor jednak:

$$W(z) = \frac{m}{2\pi} \ln r + i \frac{m}{2\pi} \varphi = \frac{m}{2\pi} \ln z,$$

gde smo iskoristili činjenicu da je moduo kompleksnog broja jednak $|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = r$, a njegov argument ima isti smisao kao polarni ugao φ definisan u ravni Ox_1x_2 , pa je $z = x_1 + ix_2 = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = re^{i\varphi}$, odnosno $\ln z = \ln r + i\varphi$.

Linijski vrtlog

Strujna funkcija za linijski vrtlog $\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi$, kako smo ranije pokazali, ima oblik $\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r$. I u ovom slučaju se radi o potencijalnom strujanju, a potencijal se nalazi iz jednačine:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r} \vec{e}_\varphi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi,$$

odakle jednostavno sledi $\Phi = \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi$, pa kompleksni potencijal za linijski vrtlog ima oblik:

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \varphi - i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r = \frac{\Gamma}{2\pi} (\varphi - i \ln r) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} (\ln r + i\varphi) = -i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln z.$$

Znači, kompleksni potencijal je i za linijski izvor i za linijski vrtlog izražen preko logaritamske funkcije $\ln z$, a jedina razlika je u konstanti kojom se ta funkcija množi. U tom smislu postoji velika formalna sličnost između ova dva strujanja.

Komplikovaniji slučajevi

Znajući kompleksne potencijale za ove jednostavne primere strujanja, možemo lako da konstruišemo kompleksne potencijale za komplikovanija strujanja, pa da onda na osnovu njih odredimo kako izgleda odgovarajuće polje brzine. Na primer, linijskom izvoru jačine m koji je pomeren u odnosu na x_3 osu, tako da kroz ravan Ox_1x_2 prolazi u tački $(x_1 = a_1, x_2 = a_2)$ odgovara kompleksni potencijal:

$$W(z) = \frac{m}{2\pi} \ln(z - a), \quad a = a_1 + ia_2.$$

Kompleksna brzina je odatle

$$\frac{dW}{dz} = \frac{m}{2\pi} \frac{1}{z - a} = \frac{m}{2\pi} \frac{z^* - a^*}{(z - a)(z^* - a^*)} = \frac{m}{2\pi} \frac{(x_1 - a_1) - i(x_2 - a_2)}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2},$$

pa su Dekartove komponente brzine

$$v_1 = \frac{m}{2\pi} \frac{x_1 - a_1}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}, \quad v_2 = \frac{m}{2\pi} \frac{x_2 - a_2}{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2}.$$

Sistemu od n paralelnih linijskih izvora, jačina m_1, \dots, m_n , koji seku ravan Ox_1x_2 redom u tačkama $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)})$, ..., $(a_1^{(n)}, a_2^{(n)})$, odgovarao bi kompleksni potencijal:

$$W(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n m_k \ln(z - a^{(k)}), \quad a^{(k)} = a_1^{(k)} + ia_2^{(k)}.$$

Na sličan način bi mogle da se prave proizvoljne kombinacije linijskih izvora i vrtloga, u homogenom polja brzine. U svakom takvom slučaju kompleksni potencijal bi bio jednostavan zbir elementarnih kompleksnih funkcija iz kojeg je onda na jasno definisan način moguće odrediti odgovarajuće realno polje brzine.

Glava 7

Vrtložno strujanje fluida

7.1 Helmholtcova jednačina

Helmholtcova jednačina odnosi se na vrtložno strujanje idealnog barotropnog fluida. Gromeka-Lembova jednačina za taj slučaj, kao što je ranije već pokazano, ima oblik

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{f} - \text{grad} I,$$

pa ako potražimo rotor cele ove jednačine dobijamo

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{rot} \vec{v} - \text{rot}(\vec{v} \times \text{rot} \vec{v}) = \text{rot} \vec{f},$$

gde smo iskoristili činjenicu da je rotor gradijenta skalarne funkcije identički jednak nuli. Ako iskoristimo i definiciju vektora vrtložnosti: $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v}$, poslednju jednačinu možemo da napišemo u obliku

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{f}. \quad (7.1)$$

Pošto je

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} \quad (7.2)$$

i

$$\begin{aligned} \text{rot}(\vec{v} \times \vec{\omega}) &= \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) + \nabla \times (\vec{v} \times \vec{\omega}) \\ &= (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} - \vec{\omega} (\nabla \cdot \vec{v}) + \vec{v} (\nabla \cdot \vec{\omega}) - (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{\omega} \end{aligned} \quad (7.3)$$

iz jednačine (7.1) konačno sledi Helmholtcova jednačina:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \vec{\omega} \text{div} \vec{v} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{f}, \quad (7.4)$$

gde smo još iskoristili i solenoidalnost vrtložnosti, tj. uvek zadovoljeni uslov $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$.

Ako je fluid nestišljiv, onda je i $\text{div} \vec{v} = 0$, a ako su još i zapreminske sile potencijalne, onda je $\text{rot} \vec{f} = \text{rot grad} U = 0$, pa se Helmholtcova jednačina svodi na

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}. \quad (7.5)$$

7.2 Uopštena Helmholtcova jednačina

Ako Stoksovu jednačinu napišemo u obliku tzv. uopštene Gromeka-Lembove jednačine:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p - \nu \text{rot} \text{rot} \vec{v}, \quad (7.6)$$

odnosno

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = \vec{f} - \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - \nu \text{rot} \text{rot} \vec{v}$$

ili

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - 2\vec{v} \times \vec{\omega} = \vec{f} - \text{grad} \left(\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho} \right) - 2\nu \text{rot} \vec{\omega},$$

pa zatim potražimo rotor ove jednačine, dobijamo tzv. **uopštenu Helmholtcovu jednačinu**:

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{f} + \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (7.7)$$

Prilikom izvođenja ove jednačine smo pored relacija (7.2) i (7.3) iskoristili i identitet $\text{rot} \text{rot} \vec{\omega} = \text{grad} \text{div} \vec{\omega} - \Delta \vec{\omega} = -\Delta \vec{\omega}$. Ako su zapreminske sile potencijalne rotor masene gustine \vec{f} je nula, pa se uopštena Helmholtcova jednačina svodi na jednačinu

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} - (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v} = \nu \Delta \vec{\omega}. \quad (7.8)$$

7.3 Kelvinova teorema

Kelvinova teorema tvrdi da se cirkulacija $\Gamma = \oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l}$ po supstancijalnoj konturi $C(t)$ u idealnom barotropnom fluidu, koji se kreće u polju potencijalnih zapreminskih sila, ne menja u toku njenog kretanja, tj.

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = 0. \quad (7.9)$$

Da bismo je dokazali pokazaćemo prvo da nezavisno od toga kakav fluid razmatramo uvek važi:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = \oint_{C(t)} \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l}. \quad (7.10)$$

Krenućemo od izraza za supstancijalni izvod skalarnog proizvoda brzine \vec{v} i supstancijalnog elementa $d\vec{l}$, koji je uvek jednak:

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{l} + \vec{v} \cdot \frac{d(d\vec{l})}{dt}. \quad (7.11)$$

Kako je $d\vec{l} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, gde su \vec{r}_2 i \vec{r}_1 dve infinitezimalno bliske tačke na uočenoj supstancijalnoj konturi (dakle položaji dva bliska delića u nekom trenutku t), sledi

$$d(d\vec{l}) = d\vec{r}_2 - d\vec{r}_1 = (\vec{v}(\vec{r}_2, t) - \vec{v}(\vec{r}_1, t)) dt,$$

a pošto je

$$\vec{v}(\vec{r}_2, t) = \vec{v}(\vec{r}_1 + d\vec{l}, t) = \vec{v}(\vec{r}_1, t) + (d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v},$$

sledi da je

$$\vec{v} \cdot \frac{d(d\vec{l})}{dt} = \vec{v} \cdot ((d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v}). \quad (7.12)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \vec{v} \cdot ((d\vec{l} \cdot \nabla) \vec{v}) &= \sum_{i=1}^3 v_i \sum_{j=1}^3 dl_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sum_{i,j=1}^3 dl_j v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 dl_j \frac{\partial v_i^2}{\partial x_j} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^3 dl_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^3 v_i^2 \right) = \frac{1}{2} d\vec{l} \cdot \text{grad} v^2, \end{aligned}$$

vraćanjem ovog izraza u (7.12), a zatim u (7.11), dobijamo

$$\frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = d\vec{l} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 \right).$$

Zamenom poslednjeg izraza u izvod cirkulacije dobijamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = \oint_{C(t)} \frac{d}{dt} (\vec{v} \cdot d\vec{l}) = \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \left(\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \text{grad} v^2 \right) = \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{1}{2} \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \text{grad} v^2.$$

Kako je, međutim, $d\vec{l} \cdot \text{grad} F(\vec{r}) = dF(\vec{r})$, sledi da je

$$\oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \text{grad} v^2 = \oint_{C(t)} d(v^2) = 0,$$

ako je \vec{v} dobro definisana funkcija, pa zaista važi (7.10).

Ako je fluid idealan, onda supstancijalni izvod brzine možemo da izrazimo iz Ojlerove jednačine (5.2) i zamenimo u desnu stranu relacije (7.10), čime dobijamo:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \left(\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p \right). \quad (7.13)$$

Pošto su pretpostavke Kelvinove teoreme da su zapreminske sile potencijalne, tj. $\vec{f} = -\text{grad} u$, kao i da je fluid barotropan, kada važi $(\text{grad} p)/\rho = \text{grad} I$, dalje sledi:

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot (-\text{grad} u - \text{grad} I) = - \oint_{C(t)} d(u + I) = 0, \quad (7.14)$$

čime smo zaista dokazali tvrđenje Kelvinove teoreme (7.9).

Jedna od posledica Kelvinove teoreme je takozvana „zamrznutost” vrtložnih površina, cevi i linija. Naime, zamislimo jednu vrtložnu površinu, tj. površinu koju čine vrtložne linije, i uočimo u nekom trenutku jednu malu konturu na njoj. Cirkulacija brzine po toj konturi je $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2 \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = 0$, zbog ortogonalnosti vektora $\vec{\omega}$ i $d\vec{S}$. U nekom sledećem bliskom trenutku delići koji su činili konturu su se pomerili, vrtložna površina takođe. Ako se kontura koju čine delići više ne nalazi u istoj vrtložnoj površini, $\vec{\omega}$ i $d\vec{S}$ više neće biti ortogonalni, što znači da cirkulacija više neće biti jednaka nuli, a to je u suprotnosti sa Kelvinovom teoremom. Znači, na vrtložnim površinama se uvek nalaze isti delići, koji se kreću zajedno sa tim površinama i tu osobinu nazivamo „zamrznutošću”. To, naravno, važi i za vrtložne cevi, kao i za vrtložne linije (koje možemo zamisliti kao presek dve vrtložne površine). Pošto $\int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S}$ ima istu vrednost na svakom preseku jedne vrtložne cevi (tzv. jačina vrtložne cevi), a vrtložna cev se stalno sastoji od istih delića, direktno sledi da se jačina vrtložne cevih ne menja sa vremenom (naravno, u slučaju idealnog barotropnog fluida u polju potencijalnih zapreminskih sila).

7.4 Nastajanje vrtložnog kretanja

Pošto je $\Gamma = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{S} = 2 \int_S \vec{\omega} \cdot d\vec{S} = \text{const}$ i to važi za proizvoljnu supstancijalnu konturu, iz Kelvinove teoreme sledi da u idealnom barotropnom fluidu u polju potencijalnih zapreminskih sila vrtložno kretanje ne može spontano da nestane, ali ni da nastane. Drugim rečima, ako je kretanje takvog fluida u nekom trenutku potencijalno, ono će i u svakom sledećem biti takvo, odnosno ako je u nekom trenutku vrtložno, vrtložnost će postojati u svakom sledećem trenutku. Odatle zaključujemo da su uzroci nastanka vrtložnog kretanja u idealnom fluidu ili narušenje barotropnosti (tj. nastanak uslova u kojima fluid postaje baroklin) ili postojanje nepotencijalnih sila. Naravno, ukoliko fluid nije idealan, vrtložno kretanje može da nastane i kao posledica viskoznosti.

7.4.1 Bjerknesova teorema

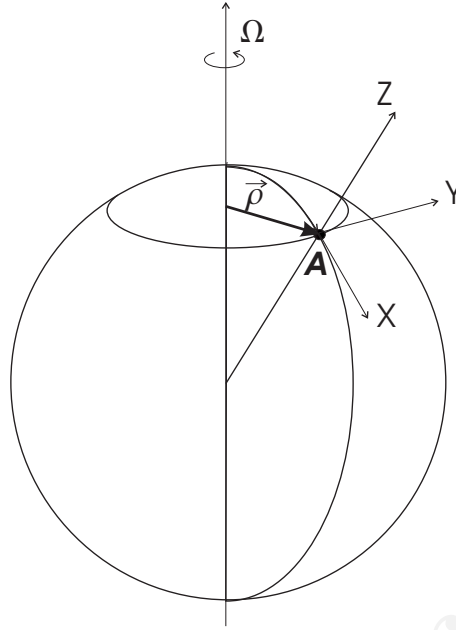
Bjerknesova teorema odnosi se na idealan baroklin fluid, koji se kreće u polju potencijalnih zapreminskih sila. Pošto jednačina (7.13) važi za bilo kakvo kretanje idealnog fluida, zamenom $\vec{f} = -\text{gradu}$ dobijamo

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = - \oint_{C(t)} d\vec{l} \cdot \text{gradu} - \oint_{C(t)} \frac{1}{\rho} d\vec{l} \cdot \text{grad} p = - \oint_{C(t)} du - \oint_{C(t)} \frac{1}{\rho} dp = - \oint_{C(t)} \frac{1}{\rho} dp. \quad (7.15)$$

Pošto za barokline fluide $\frac{1}{\rho} dp \neq d(p/\rho)$ sledi

$$\frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) \neq 0,$$

tj. cirkulacija po konturi sastavljenoj od istih delića može da se menja, odnosno usled baroklinosti potencijalno kretanje može da pređe u vrtložno i obrnuto.



Slika 7.1: Referentni sistem vezan za Zemlju je neinercijalan...

7.4.2 Uticaj rotacije Zemlje na stvaranje vrtloga

U osnovnoj jednačini dinamike (2.24), koja važi za bilo kakvu kontinualnu sredinu zapreminske sile \vec{f} potiču samo od interakcije između tela (tzv. prave sile), a sama jednačina u tom obliku važi samo u inercijalnim sistemima. Ako bismo hteli da napišemo osnovnu jednačinu dinamike u odnosu na neki neinercijalni sistem, onda bi izraz za supstancijalni izvod brzine, koji predstavlja ubrzanje delića, trebalo napisati tako da se u njemu eksplicitno pojavi ubrzanje u odnosu na neinercijalni sistem, tzv. relativno ubrzanja. Nas će ovde zanimati samo relativno kretanje fluida u odnosu na Zemlju (slika 7.1), koja rotira ugaonom brzinom $\vec{\Omega}$, pa ćemo iskoristiti aproksimativnu vezu poznatu iz opšteg kursa mehanike:

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{aps} = \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{rel} - \Omega^2 \vec{\rho} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}. \quad (7.16)$$

U ovoj jednačini indeks „aps” označava da se veličina uz koju taj indeks stoji računa (meri) u odnosu na inercijalni sistem, a indeks „rel” označava veličine merene u odnosu na sistem vezan za neku tačku A na površini Zemlje (neinercijalni sistem), dok je $\vec{\rho}$ vektor čiji je intenzitet jednak rastojanju tačke A od ose rotacije Zemlje, a smer od ose ka tački A .

$$\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{rel} = \vec{g} + \Omega^2 \vec{\rho} - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p$$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2 \oint_{C(t)} (\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}) \cdot d\vec{l} - \oint_{C(t)} \frac{1}{\rho} \text{grad} p \cdot d\vec{l}$$

Ako je fluid barotropan

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -2 \oint_{C(t)} (\vec{\Omega} \times \vec{v}_{rel}) \cdot d\vec{l} = -2\vec{\Omega} \cdot \oint_{C(t)} \vec{v}_{rel} \times d\vec{l} = -2\vec{\Omega} \cdot \frac{d\vec{S}}{dt},$$

gde je $d\vec{S}$ površina koju prebriše kontura za vreme dt (sledi iz osobina veličine $\vec{v}_{rel} \times d\vec{l}$ posmatrane kao vektorski proizvod).

7.4.3 Uticaj viskoznih sila na nastajanje vrtložnog kretanja

U slučaju Stoksovog fluida iz jednačina (7.10) i Stoksove jednačine sledi

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\oint_{C(t)} \vec{v} \cdot d\vec{l} \right) = \oint_{C(t)} \left(\vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v} \right) \cdot d\vec{l}.$$

Ako je fluid barotropan, a zapreminske sile potencijalne prva dva sabirka u poslednjoj podintegralnoj funkciji daju nulti doprinos kada se prointegrale, pa ostaje

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \nu \oint_{C(t)} \Delta \vec{v} \cdot d\vec{l} = -\nu \oint_{C(t)} \text{rot} \text{rot} \vec{v} \cdot d\vec{l} = -2\nu \oint_{C(t)} \text{rot} \vec{\omega} \cdot d\vec{l} = -2\nu \int \int_S \text{rot} \text{rot} \vec{\omega} \cdot d\vec{S},$$

gde smo u poslednjem koraku iskoristili Stoksovu teoremu. Pošto je uvek $\text{div} \vec{\omega} = 0$, uvek važi i relacija $\text{rot} \text{rot} \vec{\omega} = -\Delta \vec{\omega}$, tako da konačno za brzinu promene cirkulacije brzine dobijamo

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 2\nu \int \int_S \Delta \vec{\omega} \cdot d\vec{S},$$

što znači da cirkulacija brzine po supstancijalnoj konturi, u Stoksovom barotropnom fluidu, koji struji u polju potencijalnih zapreminskih sila, može da se menja u slučaju kada je $\Delta \vec{\omega} \neq 0$.

7.5 Dimenziona analiza

Na primeru protoka u slučaju Poazejevog proticanja (odeljak 4.3.2) demonstriraćemo primenu dimenzionane analize, koja se često primenjuje kada ne umemo egzaktno da rešimo neki problem. Pretpostavimo da nam nije poznat izraz za protok Q , ali da znamo (recimo, iz eksperimenta) da protok zavisi od poluprečnika cevi R , gradijenta pritiska K i osobina Stoksovog fluida: gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η . Osim toga, pretpostavićemo i da je Q stepena funkcija tih veličina, oblika

$$Q = C \rho^a K^b R^c \eta^d, \quad (7.17)$$

gde je C bezdimenziona konstanta. Jedinice (dimenzije) veličina sa leve i desne strane gornje jednakosti moraju biti iste. Pošto se u mehanici sve veličine mogu izraziti preko jedinica osnovnih veličina: dužine (L), vremena (T) i mase (M), dimenzije veličina koje se javljaju u toj jednakosti treba izraziti preko njih:

$$|Q| = |MT^{-1}|, \quad |K| = |MT^{-2}L^{-2}|, \quad |\rho| = |ML^{-3}|, \quad |\eta| = |ML^{-1}T^{-1}|. \quad (7.18)$$

U prethodnim izrazima smo oznakom $| = |$ naznačili jednakost jedinica fizičkih veličina sa leve i desne strane jednakosti. Zamenom jedinica u pretpostavljenu relaciju (7.17) sledi

$$|MT^{-1}| = |(ML^{-3})^a (MT^{-2}L^{-2})^b L^c (ML^{-1}T^{-1})^d|, \quad (7.19)$$

odakle poređenjem stepena iste osnovne jedinice sa leve i desne strane jednakosti dobijamo jednačine:

$$M : \quad 1 = a + b + d \quad (7.20)$$

$$T : \quad 1 = 2b + d \quad (7.21)$$

$$L : \quad 0 = -3a - 2b + c - d \quad (7.22)$$

Rešavanjem ovog sistema od 3 jednačine po nepoznatim b , c i d dobijamo:

$$b = a, \quad c = 1 + 3a, \quad d = 1 - 2a. \quad (7.23)$$

Zamenom tako dobijenih b , c i d u (7.17) sledi da je

$$\frac{Q}{R\eta} = C \left(\frac{\rho K R^3}{\eta^2} \right)^a. \quad (7.24)$$

Lako se proverava da su veličine $f_1 = Q/(R\eta)$ i $f_2 = \rho K R^3/\eta^2$ bezdimenzione veličine, što znači da bismo umesto da radimo sa prvobitnih 5 dimenzionih veličina: Q , R , K , ρ i η , mogli da radimo sa samo dve *bezdimenzione* veličine f_1 i f_2 . U opštem slučaju, ako razmatramo samo mehaničke probleme, može se na analogan način (poređenjem dimenzija) pokazati da se umesto $n + 1$ fizičke veličine može uvesti $n - 2$ bezdimenzionih kombinacija tih veličina (tzv. Π -teorema). U slučaju određivanja protoka kod Poazejevog proticanja ostaju još dva koraka: trebalo bi odrediti stepen a i bezdimenzionu konstantu C . To je moguće odrediti iz eksperimenta na sledeći način: za razne vrednosti parametara R , K , ρ i η treba izmeriti protok Q , izračunati veličine f_1 i f_2 i crtati $\ln f_1$ u funkciji $\ln f_2$. Pošto iz relacije (7.24) sledi

$$\ln f_1 = \ln C + a \ln f_2, \quad (7.25)$$

dobijeni grafik bi trebalo da bude prava linija, čiji je nagib određen brojem a , a $\ln C$ odgovara odsečku na ordinati. To je, naravno, tačno jedino ako je pretpostavka (7.17) tačna, što možemo lako da proverimo znajući izraz za brzinu u slučaju Poazejevog strujanja

$$\vec{v} = \frac{KR^2}{4\eta} \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) \vec{e}_z. \quad (7.26)$$

Pomoću formule za protok ovde onda dobijamo

$$Q = \int \int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) r dr d\varphi = 2\pi \rho \frac{KR^2}{4\eta} \int_0^R \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right) r dr = \frac{K\pi\rho R^4}{8\eta}, \quad (7.27)$$

tj. pretpostavka o stepenoj zavisnosti protoka od veličina R , ρ , K i η je bila tačna, a iz grafika (7.25) trebalo bi da se dobije $a = 1$ i $C = \pi/8$.

7.6 Difuzija vrtloga

Zamislamo beskonačno dugačak čvrsti cilindar poluprečnika a , koji rotira konstantnom ugaonom brzinom Ω oko sopstvene ose u Stoksovom fluidu, koji ispunjava ceo prostor van cilindra. Ako se fluid kreće laminarno, samo usled rotacije cilindra i ako se zapreminske sile mogu zanemariti, u stacionarnom režimu možemo uzeti da se delići kreću po kružnicama čiji centri leže na osi cilindra, pri čemu brzina zavisi samo od rastojanja r od ose cilindra:

$$\vec{v} = v(r)\vec{e}_\varphi, \quad (7.28)$$

gde je φ ugao u cilindričnom koordinatnom sistemu u kome se z -osa poklapa sa osom cilindra. Zamenom ovakvog oblika brzine u Stoksovu jednačinu sledi jednačina:

$$\frac{v^2}{r}\vec{e}_r = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr}\vec{e}_r + \frac{\eta}{\rho}\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv)\right)\vec{e}_\varphi, \quad (7.29)$$

a iz nje:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rv) = 0, \quad (7.30)$$

odakle je

$$v(r) = C_1\frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}. \quad (7.31)$$

Konstanta C_1 u ovom slučaju mora biti jednaka nuli, pošto nema nikakvog fizičkog razloga da na jako velikim rastojanjima od ose cilindra brzina postaje neograničeno velika, a konstantu C_2 određujemo iz uslova slepljivanja na površini cilindra: $v(a) = a\Omega$, pa je konačno

$$v(r) = \frac{\Omega a^2}{r}. \quad (7.32)$$

Ako je cilindar jako tanak ($a \rightarrow 0$), a ugaona brzina njegove rotacije veoma velika ($\Omega \rightarrow \infty$), ali tako da je proizvod Ωa^2 konačan, onda možemo uzeti da je profil brzine svuda sem na samoj z -osi oblika:

$$\vec{v} = \frac{\Gamma}{2\pi r}\vec{e}_\varphi, \quad (7.33)$$

gde smo konstantu Γ uveli tako da je

$$\lim_{a \rightarrow 0, \Omega \rightarrow \infty} \Omega a^2 = \frac{\Gamma}{2\pi}. \quad (7.34)$$

Vidimo da smo na ovaj način dobili profil brzine koji odgovara modelu linijskog vrtloga (odeljak 1.7.2), čije smo osobine već razmatrali.

Pretpostavimo dalje da se u nekom trenutku cilindar naglo zaustavi i uzmimo taj trenutak za početni $t = 0$. Kako će se fluid kretati nakon toga? Ako pretpostavimo da se osnovna simetrija neće promeniti, tj. da brzina u svakom trenutku ima oblik:

$$\vec{v} = v(r, t)\vec{e}_\varphi, \quad (7.35)$$

onda iz Stoksove jednačina sledi diferencijalna jednačina:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \nu \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \right). \quad (7.36)$$

Možemo da pokušamo da nađemo rešenje ove jednačine dimenzionom analizom, tj. pretpostavimo da je brzina funkcija rastojanja r , vremena t i kinematičkog koeficijenta viskoznosti ν , prostog stepenog oblika:

$$v(r, t) = Kr^a t^b \nu^c.$$

Poređenjem jedinica veličina sa leve i desne strane prethodne relacije dobijamo da bi brzina trebalo da bude oblika $v = K \frac{r}{t} (t\nu/r^2)^c$. Zamenom takve funkcije u jednačinu (7.36), međutim, lako se proverava da takva funkcija ne može biti rešenje jednačine. Pokušaćemo dalje da nađemo rešenje jednačine u obliku:

$$v(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} f(r^2/t\nu), \quad (7.37)$$

gde je f nepoznata funkcija. Iz jednačine (7.36) u tom slučaju sledi jednačina

$$4f'' + f' = 0, \quad (7.38)$$

gde smo sa $'$ označili izvod funkcije f po njenom argumentu $w = r^2/t\nu$. Rešavanjem ove jednačine dobijamo

$$f(w) = A + Be^{-w/4}, \quad (7.39)$$

gde su A i B integracione konstante koje određujemo iz uslova da je u početnom trenutku profil brzine odgovarao linijskom vrtlogu

$$v(r, t = 0) = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad (7.40)$$

odakle sledi da je $A = 1$, kao i uslova da posle nekog vremena nakon zaustavljanja cilindra i fluid treba da se zaustavi (pošto se kretao samo usled rotacije cilindra):

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(r, t) = 0. \quad (7.41)$$

Znajući da je $A = 1$ iz ovog drugog uslova sledi da je $B = -1$, tako da se konačno dobija

$$v(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} (1 - e^{-r^2/4\nu t}). \quad (7.42)$$

Izračunajmo vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ koji odgovara ovakvom profilu brzine:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \frac{1}{r} \vec{e}_r & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{r} \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\Gamma}{2\pi} (1 - e^{-r^2/4\nu t}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{\Gamma}{4\pi r} \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial r} (1 - e^{-r^2/4\nu t}) = \frac{\Gamma}{8\pi \nu t} e^{-r^2/4\nu t} \vec{e}_z. \quad (7.43)$$

Iz dobijenog izraza vidimo da u fiksiranom trenutku t vrtložnost opada sa udaljavanjem od z ose i to po eksponencijalnom zakonu. Ako dalje izračunamo izvod vrtložnosti po vremenu t :

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \vec{e}_z \frac{\Gamma}{8\pi \nu} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e^{-r^2/4\nu t}}{t} = \vec{e}_z \frac{\Gamma}{8\pi \nu} \frac{e^{-r^2/4\nu t}}{t^2} \left(\frac{r^2}{4\nu t} - 1 \right), \quad (7.44)$$

vidimo da je za fiksirano r on jednak nuli u trenutku $t = \tau = r^2/4\nu$. Nije teško proveriti da je drugi izvod $\vec{\omega}$ po vremenu u tom trenutku negativan, što znači da se za fiksirano r , vrtložnost prvo povećava, do trenutka $t = \tau$, kada dostiže svoju maksimalnu vrednost

$$\omega_{\max} = \frac{\Gamma}{8\pi \nu \tau} e^{-1} = \frac{\Gamma}{2\pi e r^2}, \quad (7.45)$$

a zatim opada do nule. Iz svega ovoga zaključujemo da se usled viskoznosti „vrtlog”, koji je u početnom trenutku zahvatao čestice samo na z osi, širi i rasplinjava, tj. dolazi do *difuzije vrtloga*.

©2009 - S. Elezović-Hadžić

Radna verzija
Fizika kontinuuma

Glava 8

Pogranični sloj

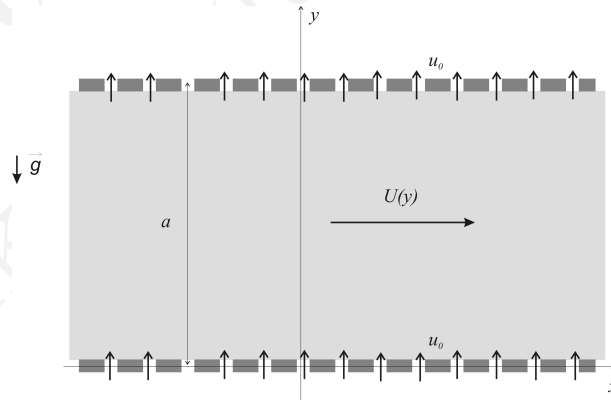
Pretpostavka da je fluid idealan sa dosta velikom tačnošću često može da se primenjuje u oblastima fluida koje su daleko od nekih čvrstih granica. U blizini takvih granica, međutim, dolaze do izražaja viskozne sile, što ćemo demonstrirati na sledećem primeru, koji predstavlja jedan grubi model za proticanje vode kroz podzemni kanal.

Pod delovanjem konstantnog gradijenta pritiska Stoksov fluid gustine ρ i koeficijenta viskoznosti η stacionarno protiče između dve nepokretne ravne, jako velike, paralelne ploče, koje su porozne. Gradijent pritiska ima pravac paralelan pločama, recimo da je $\text{grad} p = K \vec{e}_x$, i neka ploče leže u ravnima $y = 0$ i $y = a$. Zbog poroznosti ploča postoji i strujanje fluida normalno na njihovu ravan (i pravac gradijenta), tako da ćemo pretpostaviti da brzina delića fluida ima oblik

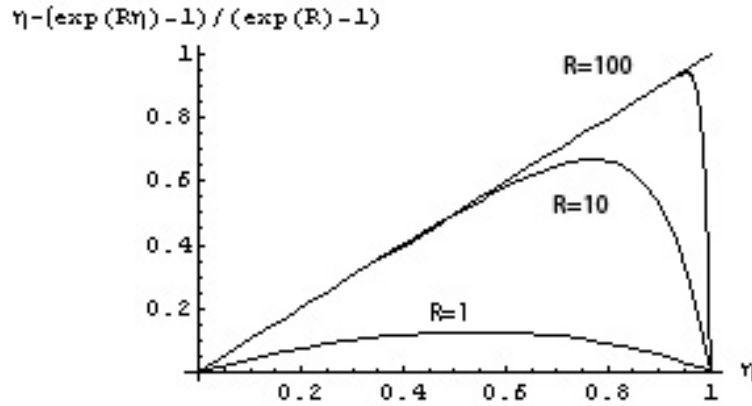
$$\vec{v} = U(y)\vec{e}_x + u_0\vec{e}_y, \quad (8.1)$$

gde je u_0 konstanta, a $U(y)$, tj. komponentu brzine nastalu usled postojanja gradijenta pritiska paralelnog pločama, treba da odredimo iz Stoksove jednačine. Takođe, ovde pretpostavljamo da je jedina zapreminska sila gravitaciona sila, $\vec{f} = -g\vec{e}_y$. Ako pretpostavljeni oblik brzine (8.1) zamenimo u Stoksovu jednačinu (4.12) i tako dobijenu jednačinu projektujemo na x -osu sledi diferencijalna jednačina:

$$u_0 \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho} K + \nu \frac{d^2 U}{dy^2}, \quad (8.2)$$



Slika 8.1: Proticanje Stoksovog fluida kroz kanal sa poroznim zidovima.



Slika 8.2: Grafik horizontalne komponente brzine strujanja Stoksovog fluida kroz kanal sa poroznim zidovima, za razne vrednosti Reynoldsovog broja.

čije opšte rešenje ima oblik

$$U(y) = C_1 \frac{\nu}{u_0} e^{\frac{u_0 y}{\nu}} - \frac{K}{\rho u_0} y + C_1. \quad (8.3)$$

Uzimajući da je tangencijalna komponenta brzine neposredno uz zidove jednaka nuli, tj. $U(0) = U(a) = 0$, dobijaju se vrednosti integracionih konstanata

$$C_1 = \frac{Ka}{\rho \nu} \left(e^{\frac{u_0 a}{\nu}} - 1 \right)^{-1}, \quad C_2 = -C_1 \frac{\nu}{u_0},$$

pa je

$$U(y) = \frac{Ka}{\rho u_0} \left(\frac{e^{\frac{u_0 y}{\nu}} - 1}{e^{\frac{u_0 a}{\nu}} - 1} - \frac{y}{a} \right). \quad (8.4)$$

Ako se umesto y za promenljivu uzme $\eta = y/a$, onda tangencijalna komponenta brzine može da se napiše u obliku

$$U(\eta) = \frac{Ka}{\rho u_0} \left(\frac{e^{R_e \eta} - 1}{e^{R_e} - 1} - \eta \right), \quad (8.5)$$

gde je $R_e = u_0 a / \nu$ bezdimenziona veličina, tzv. *Reynoldsov broj*. U realnim situacijama na koje ovaj model može da se primeni broj R_e je mnogo veći od 1, na primer, za vodu je $\nu = 1.1 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, a ako se uzme da je širina kanala $a = 1 \text{ m}$ i brzina kojom voda prolazi kroz ploče $u_0 = 10^{-4} \text{ m/s}$, približno se dobija $R_e = 100$. Pošto je $0 \leq \eta \leq 1$, u najvećem delu širine kanala je

$$U(\eta) \approx -\frac{Ka}{\rho u_0} \eta,$$

što se može i numerički proveriti (npr. za $R_e = 100$ i $\eta = 0.9$ je $(e^{\frac{u_0 y}{\nu}} - 1)/(e^{\frac{u_0 a}{\nu}} - 1) = 4.5 \cdot 10^{-5} \ll 0.9$). Na slici 8.2 prikazan je profil brzine za nekoliko vrednosti Reynoldsovog broja. Vidi se da tek za vrednosti y bliske a brzina U počinje naglo da opada i smanjuje se do nule uz gornji zid, tj. za $y = a$.

Ako bi viskoznost mogla da se zanemari, onda bi se stavljanjem $\nu = 0$ u jednačinu (8.2) dobila jednačina

$$u_0 \frac{dU}{dy} = -\frac{1}{\rho} K, \quad (8.6)$$

čije je rešenje

$$U(y) = -\frac{Ky}{\rho u_0} + A,$$

gde je A integraciona konstanta. U ovom slučaju nemoguće je zadovoljiti oba granična uslova slepljivanja (a nema ni potrebe, pošto smo zanemarili viskoznost), ali je prihvatljivo uzeti $A = 0$, čime je barem donji granični uslov zadovoljen. U tom slučaju je razlika između brzine za viskozni i neviskozni ($\nu = 0$) fluid zanemarljiva u skoro celoj širini kanala. Jedino u uskom *pograničnom* sloju, u neposrednoj blizini gornjeg zida viskoznost dolazi do izražaja, tako što dovodi do eksponencijalnog smanjivanja brzine od relativno velikih vrednosti do nule.

Uprkos jednostavnosti, ovaj model ispoljava osnovne karakteristike, koje se često javljaju u realnim situacijama:

- u većem delu oblasti kroz koju fluid protiče profil brzine odgovara rešenju jednačine za idealan fluid, koje ne zadovoljava sve granične uslove za viskozni fluid;
- postoji uski pogranični sloj u kome viskoznost dolazi do izražaja;
- debljina pograničnog sloja zavisi od vrednosti Reynoldsovog broja - što je on veći pogranični sloj je už;
- brzina se u pograničnom sloju približava svojoj graničnoj vrednosti po eksponencijalnom zakonu.

Glava 9

Talasi u fluidima

9.1 Jednodimenzionalno prostiranje malih poremećaja u idealnom barotropnom fluidu van polja zapreminskih sila

9.2 Talasi u nestišljivom idealnom fluidu, pod delovanjem gravitacione sile

Pretpostavimo da je na mirnoj površini jako velikog rezervoara u kome se nalazi nestišljiva tečnost došlo do nekog malog poremećaja, usled čega se površina ustalasala. Uvešćemo Dekartov koordinatni sistem tako da mirna površina vode (pre nastanka poremećaja) definiše ravan Ox_1x_2 , a osa Ox_3 je usmerena suprotno gravitacionom ubrzanju, tako da je $\vec{g} = -g\vec{e}_3$. Smatraćemo da je dubina rezervoara beskonačno velika, tako da je brzina delića vode na samom dnu rezervoara jednaka nuli, tj $\lim_{x_3 \rightarrow (-\infty)} \vec{v} = 0$. Pošto nas interesuje kretanje tečnosti prevashodno u površinskom delu, dakle daleko od čvrstih zidova, možemo tretirati tečnost kao idealan fluid. Takođe, pošto je tečnost u početku mirovala, a jedina zapreminska sila koju uzimamo u obzir je gravitaciona sila (koja je potencijalna), možemo da smatramo da je kretanje do kojeg dolazi usled poremećaja bezvrtložno (prema Kelvinovoj teoremi, vrtložno kretanje ne može spontano da nastane u idealnom barotropnom fluidu, koji se nalazi u polju isključivo potencijalnih zapreminskih sila), pa je

$$\vec{v} = \text{grad}\Phi.$$

Pošto je tečnost nestišljiva, važi $\text{div}\vec{v} = 0$, a onda, kao posledica toga, sledi da potencijal brzine Φ zadovoljava Laplasovu jednačinu:

$$\Delta\Phi = 0. \quad (9.1)$$

Problem kretanja talasa po površini nestišljive tečnosti, dakle, može da se razmatra rešavanjem Laplasove jednačine uz odgovarajuće granične uslove. Granični uslovi za potencijal Φ slediće iz uslova da je na samoj površini tečnosti pritisak jednak atmosferskom pritisku p_0 :

$$p(x_1, x_2, x_3 = z(x_1, x_2, t), t) = p_0, \quad (9.2)$$

gde

$$x_3 = z(x_1, x_2, t) \quad (9.3)$$

predstavlja jednačinu slobodne površine tečnosti u proizvoljnom trenutku, kao i već pomenutog uslova da je brzina na velikim dubinama jednaka nuli, tj:

$$\lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \vec{v} = \lim_{x_3 \rightarrow -\infty} \text{grad}\Phi = 0. \quad (9.4)$$

Pretpostavimo da je potencijal funkcija oblika

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi_0(x_1, x_2, t)f(x_3),$$

pa ga uvrstimo u Laplasovu jednačinu (9.1), čime dobijamo:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2} = f(x_3) \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_2^2} \right) + \Phi_0 \frac{d^2 f}{dx_3^2} = 0.$$

Ako poslednju jednačinu podelimo sa Φ sledi:

$$\frac{1}{\Phi_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_2^2} \right) = -\frac{1}{f(x_3)} \frac{d^2 f}{dx_3^2}.$$

Pošto leva strana ove jednačine zavisi samo od vremena t i koordinata x_1 i x_2 , a desna samo od koordinate x_3 , iz međusobne nezavisnosti ovih promenljivih sledi da obe strane treba da budu jednake istoj konstanti C , pa na taj način dobijamo sledeće dve jednačine:

$$\frac{1}{\Phi_0} \left(\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial x_2^2} \right) = C, \quad (9.5)$$

$$-\frac{1}{f(x_3)} \frac{d^2 f}{dx_3^2} = C. \quad (9.6)$$

Poslednju jednačinu možemo da prepisemo kao

$$\frac{d^2 f}{dx_3^2} + Cf(x_3) = 0, \quad (9.7)$$

što je obična diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima, čije opšte rešenje zavisi od znaka konstante C . Ako je C negativan broj, onda je opšte rešenje ove jednačine oblika

$$f(x_3) = A_1 e^{kx_3} + A_2 e^{-kx_3},$$

gde je $C = -k^2$ ($k > 0$). Sa takvim f brzina bi imala oblik

$$\vec{v}(x_1, x_2, x_3, t) = (A_1 e^{kx_3} + A_2 e^{-kx_3}) \left(\frac{\partial \Phi_0}{\partial x_1} \vec{e}_1 + \frac{\partial \Phi_0}{\partial x_2} \vec{e}_2 \right) + \Phi_0 k (A_1 e^{kx_3} - A_2 e^{-kx_3}) \vec{e}_3,$$

što bi zbog članova koji sadrže e^{-kx_3} težilo beskonačnosti kada $x_3 \rightarrow -\infty$. Da bismo to izbegli potrebno je da uzmemo da je konstanta A_2 jednaka nuli, tj. potencijal ima oblik

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi_0(x_1, x_2, t) e^{kx_3}, \quad (9.8)$$

gde smo konstantu A_1 uključili u funkciju Φ_0 . Ako bi C bio pozitivan broj, tj. $C = \kappa^2$, $\kappa > 0$, za f bismo dobili funkciju

$$f(x_3) = B_1 \cos(\kappa x_3) + B_2 \sin(\kappa x_3).$$

Lako se proverava da nije moguće odrediti konstante B_1 i B_2 tako da je zadovoljen uslov da kada $x_3 \rightarrow -\infty$ brzina \vec{v} teži nuli.

Granični uslov na površini tečnosti (9.2) može se dovesti u vezu sa potencijalom brzine pomoću Koši-Lagranževog integrala, koji ovde važi pošto se radi o nestišljivoj idealnoj tečnosti, koja se potencijalno kreće u polju potencijalne zapreminske sile. U ovom slučaju Koši-Lagranžev integral ima oblik

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + gx_3 + \frac{p}{\rho} = F(t),$$

gde je ρ gustina tečnosti, a $F(t)$ neka funkcija vremena. Pošto razmatramo slučaj malih poremećaja, možemo da pretpostavimo da su brzine delića male, pa ćemo zanemariti član $v^2/2$, tako da na površini tečnosti, gde je $p = p_0$, Koši-Lagranžev integral dobija oblik

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\Phi + \frac{p_0 t}{\rho} - \int F(t) dt \right) + gx_3 = 0.$$

Funkcija

$$\Phi' = \Phi + \frac{p_0 t}{\rho} - \int F(t) dt$$

takođe može da se uzme za potencijal brzine, pošto je

$$\vec{v} = \text{grad} \Phi = \text{grad} \Phi',$$

a važi i Laplasova jednačina, pa ćemo u nastavku raditi sa funkcijom Φ' , ali ćemo je pisati bez znaka „prim”. Granični uslov koji tako definisani potencijal Φ na površini tečnosti treba da zadovoljava onda ima oblik

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + gz(x_1, x_2, t) = 0. \quad (9.9)$$

Parcijalnim diferenciranje ovog uslova po vremenu sledi

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial z(x_1, x_2, t)}{\partial t} = 0. \quad (9.10)$$

S druge strane je

$$\frac{dz(x_1, x_2, t)}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} v_2 + \frac{\partial z}{\partial t} \approx \frac{\partial z(x_1, x_2, t)}{\partial t},$$

gde smo zbog pretpostavke da su brzine delića male, kao i da se delići na površini tečnosti malo udaljavaju od ravni $z = 0$, zanemarili nelinearne članove $\frac{\partial z}{\partial x_1} v_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2} v_2$ u odnosu na linearni $\frac{\partial z}{\partial t}$. Kako je na površini tečnosti

$$\frac{dz}{dt} = v_3 = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right|_{x_3=z(x_1, x_2, t)}$$

iz (9.10) sledi

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right]_{x_3=z(x_1, x_2, t)} = 0,$$

odnosno, ponovo primenjujući pretpostavku da je $z(x_1, x_2, t)$ malo, konačno dobijamo približni granični uslov za potencijal na slobodnoj površini tečnosti u lako primenljivom obliku:

$$\left[\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + g \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right]_{x_3=0} = 0. \quad (9.11)$$

Znači, da bismo rešili problem prostiranja talasa male amplitude po površini tečnosti potrebno je da rešimo Laplasovu jednačinu (9.1) uz granične uslove (9.4) i (9.11). Kada na taj način dobijemo Φ , onda iz (9.9) možemo da nađemo i približnu jednačinu slobodne površine tečnosti kao:

$$x_3 = z(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{x_3=0}. \quad (9.12)$$

Već smo pokazali da potencijal možemo da tražimo u obliku $\Phi(x_1, x_2, x_3, t) = \Phi_0(x_1, x_2, t)e^{kx_3}$. Dalje ćemo razmotriti pojednostavljeni slučaj u kome potencijal ne zavisi od koordinate x_2 i

$$\Phi_0 = G(x_1)H(t). \quad (9.13)$$

Iz jednačine (9.5) onda sledi jednačina

$$\frac{d^2 G(x_1)}{dx_1^2} + k^2 G(x_1) = 0,$$

čije je opšte rešenje

$$G(x_1) = C_1 \cos(kx_1) + C_2 \sin(kx_1). \quad (9.14)$$

Iz graničnog uslova (9.11) sledi jednačina

$$\frac{d^2 H(t)}{dt^2} + gkH(t) = 0,$$

čije je opšte rešenje

$$H(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t), \quad (9.15)$$

gde je $\omega = \sqrt{gk}$. Nije teško videti da sa takvim G i H funkciju Φ_0 možemo da napišemo u obliku

$$\Phi_0(x_1, t) = E_1 \cos(kx_1 - \omega t + \alpha_1) + E_2 \cos(kx_1 + \omega t + \alpha_2),$$

gde su E_1 , E_2 , α_1 i α_2 konstante koje se mogu dovesti u vezu sa integracionim konstantama C_1 , C_2 , D_1 i D_2 . Ovo odgovara ravnom monohromatskom talasu koji se prostire u pravcu x_1 ose, pri čemu se prvi sabirak odnosi na prostiranje talasa u pozitivnom smeru te ose, a drugi na prostiranje talasa nasuprot x_1 osi. Brzina prostiranja ovakvog talasa jednaka je

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}. \quad (9.16)$$

Za razliku od zvučnih talasa, gde je fazna brzina talasa bila konstantna i iznosila $c = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}$, ovde c zavisi od talasnog broja k , odnosno od talasne dužine $\lambda = 2\pi/k$. Drugim rečima, postoji *dispersija*.

Razmotrimo dalje samo slučaj talasa koji se prostire u smeru x_1 ose. Potencijal tada ima oblik:

$$\Phi = E e^{kx_3} \cos(kx_1 - \omega t + \alpha),$$

pa iz (9.12) sledi jednačina slobodne površine tečnosti:

$$z(x_1, x_2, t) = -\frac{E\omega}{g} \sin(kx_1 - \omega t + \alpha).$$

Dakle slobodna površina tečnosti ima oblik sinusnog talasa, koji se prostire brzinom $c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{\lambda g}{2\pi}}$, što znači da se talasi veće talasne dužine prostiru brže od kraćih talasa.

Deo III

Termodinamika neprekidnih sredina

Radna Verzija
Fizika kontinuumna

Glava 10

Prvi princip termodinamike u kontinualnoj sredini

Uočimo u proizvoljnoj kontinualnoj sredini malu supstancijalnu zapreminu ΔV , mase Δm i srednje gustine ρ . Razmotrimo šta se dešava sa takvim telom u termodinamičkom smislu, u infinitezimalno kratkom vremenskom intervalu dt . Prema prvom principu termodinamike rad dA koji izvrše sile koje deluju na ovo telo, kao i toplota dQ koju telo primi iz okoline, troši se na povećanje njegove unutrašnje energije. Pošto se ovo malo telo u opštem slučaju i kreće, potrebno je uzeti u obzir i promenu njegove kinetičke energije, tako da prvi princip termodinamike u ovom slučaju ima oblik

$$d(\Delta E_k) + d(\Delta U) = dA + dQ, \quad (10.1)$$

gde je ΔE_k kinetička, a ΔU unutrašnja energija tela. Unutrašnja energija tela jednaka je zbiru kinetičke energije molekula od kojih se telo sastoji, u odnosu na centar mase tela, i potencijalne energije međusobne interakcije molekula. Ona se može izraziti preko masene gustine unutrašnje energije u (unutrašnja energija po jedinici mase) kao

$$\Delta U = u\Delta m = u\rho\Delta V, \quad (10.2)$$

pošto se radi o malom telu (u je ovde masena gustina unutrašnje energije u centru mase tela). Slično, kinetička energija tela približno je jednaka

$$\Delta E_k = \frac{1}{2}\Delta mv^2, \quad (10.3)$$

gde je \vec{v} brzina centra mase tela.

10.1 Rad površinskih sila

Ukupni rad sila koje deluju na telo jednak je zbiru rada površinskih dA^{povr} i rada zapreminskih sila dA^{zapr} . Ukoliko graničnu površinu celog tela ΔS izdelimo na infinitezimalno male površine dS , onda je rad koji izvrše površinske sile na takvoj infinitezimalnoj površini za vreme dt jednak $(\tilde{\mathcal{P}}d\vec{S}) \cdot d\vec{r}$, gde je $\tilde{\mathcal{P}}$ tenzor napona, a $d\vec{r} = \vec{v}dt$ pomeraj površine $d\vec{S}$ za to vreme. Ukupni rad površinskih sila onda dobijamo sumiranjem, tj. integraljenjem po celoj površini ΔS :

$$dA^{povr} = \oint_{\Delta S} (\tilde{\mathcal{P}}d\vec{S}) \cdot d\vec{r} = dt \oint_{\Delta S} (\tilde{\mathcal{P}}d\vec{S}) \cdot \vec{v}. \quad (10.4)$$

Ako vektor $d\vec{S}$ razložimo na njegove Dekartove komponente, tj. napišemo ga u obliku

$$d\vec{S} = (d\vec{S} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3,$$

pa zamenimo u prethodni integral, dalje dobijamo:

$$\begin{aligned} dA^{povr} &= dt \oint_{\Delta S} (\tilde{\mathcal{P}}((d\vec{S} \cdot \vec{e}_1)\vec{e}_1 + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_2)\vec{e}_2 + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_3)\vec{e}_3)) \cdot \vec{v} = \\ &= dt \oint_{\Delta S} ((d\vec{S} \cdot \vec{e}_1)\tilde{\mathcal{P}}\vec{e}_1 + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_2)\tilde{\mathcal{P}}\vec{e}_2 + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_3)\tilde{\mathcal{P}}\vec{e}_3) \cdot \vec{v} = \\ &= dt \oint_{\Delta S} ((d\vec{S} \cdot \vec{e}_1)\vec{P}_{\vec{e}_1} + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_2)\vec{P}_{\vec{e}_2} + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_3)\vec{P}_{\vec{e}_3}) \cdot \vec{v} = \\ &= dt \oint_{\Delta S} ((d\vec{S} \cdot \vec{e}_1)(\vec{P}_{\vec{e}_1} \cdot \vec{v}) + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_2)(\vec{P}_{\vec{e}_2} \cdot \vec{v}) + (d\vec{S} \cdot \vec{e}_3)(\vec{P}_{\vec{e}_3} \cdot \vec{v})) = \\ &= dt \oint_{\Delta S} d\vec{S} \cdot (\vec{e}_1(\vec{P}_{\vec{e}_1} \cdot \vec{v}) + \vec{e}_2(\vec{P}_{\vec{e}_2} \cdot \vec{v}) + \vec{e}_3(\vec{P}_{\vec{e}_3} \cdot \vec{v})) = dt \oint_{\Delta S} d\vec{S} \cdot \vec{B}, \end{aligned}$$

gde je

$$\vec{B} = \vec{e}_1(\vec{P}_{\vec{e}_1} \cdot \vec{v}) + \vec{e}_2(\vec{P}_{\vec{e}_2} \cdot \vec{v}) + \vec{e}_3(\vec{P}_{\vec{e}_3} \cdot \vec{v}).$$

Primenom teoreme Gausa-Ostrogradskog dalje dobijamo

$$dA^{povr} = dt \int_{\Delta V} dV \operatorname{div} \vec{B}, \quad (10.5)$$

pa je potrebno izračunati divergenciju vektora \vec{B} :

$$\operatorname{div} \vec{B} = \frac{\partial}{\partial x_1} (\vec{P}_{\vec{e}_1} \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (\vec{P}_{\vec{e}_2} \cdot \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (\vec{P}_{\vec{e}_3} \cdot \vec{v}).$$

Pošto je

$$\vec{P}_{\vec{e}_i} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot (\tilde{\mathcal{P}}\vec{e}_i) = \sum_{j=1}^3 v_j (\vec{e}_j \cdot (\tilde{\mathcal{P}}\vec{e}_i)) = \sum_{j=1}^3 v_j \mathcal{P}_{ji}$$

sledi:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{B} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^3 v_j \mathcal{P}_{ji} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} (v_j \mathcal{P}_{ji}) = \sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathcal{P}_{ji} + v_j \frac{\partial \mathcal{P}_{ji}}{\partial x_i} \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \mathcal{P}_{ji} + \sum_{i,j=1}^3 v_j \frac{\partial \mathcal{P}_{ji}}{\partial x_i} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{T}_{ji} \mathcal{P}_{ji} + \sum_{j=1}^3 v_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{P}_{ji}}{\partial x_i}, \end{aligned} \quad (10.6)$$

gde je $\mathcal{T}_{ji} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}$. Kako je tenzor napona $\tilde{\mathcal{P}}$ simetričan, prva suma u dobijenom izrazu za $\operatorname{div} \vec{B}$ dalje može da se napiše kao:

$$\sum_{i,j=1}^3 \mathcal{T}_{ji} \mathcal{P}_{ji} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{T}_{ji} \mathcal{P}_{ij} = \sum_{i,j=1}^3 (\mathcal{S}_{ji} + \mathcal{R}_{ji}) \mathcal{P}_{ij} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{S}_{ji} \mathcal{P}_{ij} + \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_{ji} \mathcal{P}_{ij},$$

gde su \mathcal{S}_{ji} i \mathcal{R}_{ji} redom elementi tenzora brzine deformacije i tenzora vrtložnosti, tj.

$$\mathcal{S}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad \mathcal{R}_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right).$$

Pošto je tenzor vrtložnosti antisimetričan, važe sledeće transformacije:

$$\sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_{ji} \mathcal{P}_{ij} = - \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_{ij} \mathcal{P}_{ij} = - \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_{ij} \mathcal{P}_{ji} = - \sum_{j,i=1}^3 \mathcal{R}_{ji} \mathcal{P}_{ij} = - \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_{ji} \mathcal{P}_{ij},$$

gde smo prvo iskoristili antisimetričnost tenzora vrtložnosti, zatim simetričnost tenzora napona, onda smo promenili redosled sumiranja po indeksima i i j i na kraju u celoj dvostrukoj sumi zamenili mesta nemim (tekućim) indeksima i i j . Dalje direktno sledi da je

$$\sum_{i,j=1}^3 \mathcal{R}_{ji} \mathcal{P}_{ij} = 0,$$

što znači da je

$$\sum_{i,j=1}^3 \mathcal{T}_{ji} \mathcal{P}_{ji} = \sum_{i,j=1}^3 \mathcal{S}_{ji} \mathcal{P}_{ij} = \text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}).$$

Imajući u vidu definiciju divergencije tenzora, možemo da napišemo

$$\text{div} \tilde{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \text{div}(\tilde{\mathcal{P}} \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} (\vec{e}_j \cdot (\tilde{\mathcal{P}} \vec{e}_i)) = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{P}_{ji}}{\partial x_j},$$

odakle je

$$\vec{v} \cdot \text{div} \tilde{\mathcal{P}} = \sum_{i=1}^3 v_i \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \mathcal{P}_{ji}}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 v_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{P}_{ij}}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 v_j \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathcal{P}_{ji}}{\partial x_i},$$

gde smo u pretposlednjem koraku zamenili mesta nemim indeksima i i j , a u poslednjem ponovo iskoristili simetričnost tenzora napona. Pošto poslednja suma koju smo dobili figuriše u izrazu (10.6) za divergenciju vektora \vec{B} , konačno možemo da napišemo

$$\text{div} \vec{B} = \text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) + \vec{v} \cdot \text{div} \tilde{\mathcal{P}},$$

pa je, prema (10.5), rad površinskih tela jednak

$$dA^{povr} = dt \int_{\Delta V} \left(\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) + \vec{v} \cdot \text{div} \tilde{\mathcal{P}} \right) dV \approx dt \left(\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) + \vec{v} \cdot \text{div} \tilde{\mathcal{P}} \right) \Delta V, \quad (10.7)$$

gde se poslednji izraz u zagradi računa u centru mase malog tela Δm .

10.2 Rad zapreminskih sila

Ako zapreminu malog tela izdelimo na infinitezimalne deliće dV , rad koji za vreme dt izvrši zapreminska sila masene gustine \vec{f} na tom deliću jednak je $(\vec{f} \rho dV) \cdot d\vec{r} = dt(\vec{f} \rho dV) \cdot \vec{v}$. Ukupni rad zapreminskih sila na celom malom telu dobijamo integracijom po zapremini tog tela, tj:

$$dA^{zapr} = dt \int_{\Delta V} (\vec{f} \rho dV) \cdot \vec{v} \approx dt \Delta V \rho \vec{f} \cdot \vec{v}, \quad (10.8)$$

gde su ρ , \vec{f} i \vec{v} vrednosti tih veličina računate u centru mase tela.

10.3 Promena kinetičke energije ΔE_k

Skalarnim množenjem opšte jednačine dinamike za kontinualnu sredinu

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} + \frac{1}{\rho} \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}$$

vektorom brzine \vec{v} dobijamo:

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}},$$

odnosno

$$\frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{f} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}.$$

Ako ovu jednačinu pomnožimo masom $\Delta m = \rho \Delta V$ malog tela koje razmatramo, imajući u vidu da se ta masa u toku kretanja ne menja, za promenu kinetičke energije tela dobijamo

$$\frac{d\Delta E_k}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\Delta m v^2}{2} \right) = \rho \Delta V (\vec{v} \cdot \vec{f} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}). \quad (10.9)$$

10.4 Vektor \vec{q} gustine fluksa toplote

Osnovna veličina kojom se u fizici kontinuuma opisuje protok toplote je *vektor gustine fluksa toplote* \vec{q} . Svojim smerom i pravcem ovaj vektor pokazuje pravac i smer proticanja toplote, a njegov intenzitet jednak je količini toplote koja u jedinici vremena prođe kroz jediničnu površinu. Ako uočimo neku zapreminu V unutar kontinualne sredine, ograničenu površinom S , onda iz definicije vektora \vec{q} sledi da je ukupna količina toplote koja u jedinici vremena uđe u tu zapreminu jednaka

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S \vec{q} \cdot d\vec{S} = - \int_V \operatorname{div} \vec{q} dV, \quad (10.10)$$

gde smo u poslednjem koraku iskoristili teoremu Gausa-Ostrogradskog. Znak minus pojavio se zato što smo ort normale, tj. vektor $d\vec{S}$, u površinskom integralu orijentisali onako kako je uobičajeno, tj. iz oblasti koju zatvorena površina ograničava prema spoljašnjoj oblasti.

Ako izraz (10.10) primenimo na termodinamiki proces koji razmatramo, možemo da napišemo da je količina toplote dQ koju malo telo Δm primi za vreme dt jednaka

$$dQ = -dt \int_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{q} dV \approx -dt \Delta V \operatorname{div} \vec{q}, \quad (10.11)$$

gde je $\operatorname{div} \vec{q}$ vrednost divergencije vektora gustine fluksa toplote izračunata u centru mase tela.

10.5 Jednačina gustine unutrašnje energije

Zamenom izraza koje smo dobili za rad površinskih (10.7) i zapreminskih sila (10.8) izvršen nad razmatranim malim telom, promenu njegove kinetičke energije (10.9), kao i količinu toplote (10.11) koju to telo primi, u prvi princip termodinamike (10.1) dobijamo sledeću jednačinu

$$dt \rho \Delta V (\vec{v} \cdot \vec{f} + \frac{1}{\rho} \vec{v} \cdot \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}}) + d(u \Delta m) = dt \Delta V \rho \vec{f} \cdot \vec{v} + dt \left(\operatorname{Tr}(\tilde{\mathcal{S}} \tilde{\mathcal{P}}) + \vec{v} \cdot \operatorname{div} \tilde{\mathcal{P}} \right) \Delta V - dt \Delta V \operatorname{div} \vec{q}.$$

Sređivanjem ove jednačine dobijamo

$$d\rho\Delta V = dt\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}})\Delta V - dt\Delta V\text{div}\vec{q},$$

odakle deljenjem sa $\Delta V dt$ sledi jednačina koja opisuje promenu gustine unutrašnje energije:

$$\rho \frac{du}{dt} = \text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) - \text{div}\vec{q}. \quad (10.12)$$

Osim ove jednačine, u termodinamičkim razmatranjima kontinualne sredine potrebno je uzeti u obzir i termodinamičke jednačine stanja:

- *termičku* jednačinu stanja

$$p = p(\rho, T),$$

koja povezuje osnovne termodinamičke parametre: pritisak p , gustinu ρ i apsolutnu temperaturu T , kao i

- *kaloričku* jednačinu stanja

$$u = u(\rho, T),$$

koja povezuje unutrašnju energiju sa gustinom ρ i apsolutnom temperaturom T .

Takođe, potrebno je povezati i vektor gustine fluksa sa termodinamičkim parametrima. U realnim situacijama često važi *Furijev zakon*:

$$\vec{q} = -\kappa \text{grad}T, \quad (10.13)$$

gde je κ , tzv. *koeficijent toploprovodnosti*, konstanta za razmatranu sredinu. Na primer, za vodu je $\kappa = 0.6 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$, a za vazduh $\kappa = 0.025 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$.

Ukoliko važi Furijev zakon i uslov $\text{div}\vec{q} = 0$ (adijabatsko strujanje), direktno sledi da temperatura zadovoljava Laplasovu jednačinu: $\Delta T = 0$, bez obzira na prirodu fluida.

Primer 10.5.1. Usled raznih procesa koji se dešavaju u Zemljinoj unutrašnjosti, kroz Zemljinu koru struji toplota. Srednja vrednost intenziteta vektora \vec{q} gustine fluksa toplote na površini Zemlje iznosi $q_k \approx 0.06 \text{ W m}^{-2}$ iznad kopna. Ako se za srednju vrednost koeficijenta toploprovodnosti za površinske slojeve tla uzme vrednost $\kappa \approx 2 \text{ W K}^{-1} \text{ m}^{-1}$, sledi da je $|\nabla T| \approx q_k/\kappa = 0.03 \text{ K/m}^{-1}$, što znači da se na svaki kilometar dubine temperatura poveća za 30 K . Naravno, ovo je samo u srednjem - zbog nehomogenosti tla vrednost gradijenta temperature na pojedinim mestima može znatno da se razlikuje od izračunate.

Primer 10.5.2. Ako fluid konstantne gustine ρ miruje, tj. ako je $\vec{v} = 0$, onda se jednačina (10.12) svodi na

$$\rho \frac{du}{dt} = -\text{div}\vec{q}.$$

Ukoliko važi Furijev zakon i ako još pretpostavimo da je $u = cT$, gde je $c = \text{const}$, dalje sledi

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c} \Delta T.$$

Jednačina ovog oblika se zove *difuzionna* jednačina, a koeficijent $k = \frac{\kappa}{\rho c}$ je tzv. koeficijent difuzije. Lako se proverava da on ima iste dimenzije kao kinematički koeficijent viskoznosti ν . Za vodu

koeficijent difuzije iznosi $k \approx 1.4 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$, što je približno 6 puta manje od odgovarajuće vrednosti za ν .

Ako se uspostavi stacionarni režim, kada T više ne zavisi eksplicitno od t , prethodna jednačina dobija oblik $\Delta T = 0$. Pretpostavimo da se fluid nalazi između dve beskonačno velike paralelne ploče, koje se nalaze na rastojanju d , pri čemu se jedna ploča ($x = 0$) održava na temperaturi T_0 , a druga ($x = d$) na temperaturi $T_0 + \Theta$. Zbog simetrije možemo da uzmemo da je $T = T(x)$, pa je $\Delta T = d^2T/dx^2 = 0$, odakle sledi da se temperatura između ploča linearno menja sa rastojanjem x , tj. $T = Ax + B$. Iz graničnih uslova $T(0) = T_0$ i $T(d) = T_0 + \Theta$ sledi: $T = \Theta(x/d) + T_0$.

Glava 11

Termodinamika fluida

11.1 Disipacija energije u idealnom nestišljivom fluidu

Jednačina unutrašnje energije (10.12) u slučaju idealnih fluida dobija jednostavniji oblik ako se uzme u obzir konstitutivna jednačina

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}}.$$

Tada je

$$\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) = \text{Tr}(-p\tilde{\mathcal{S}}) = -p\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}) = -p\text{div}\vec{v},$$

pa je

$$\rho \frac{du}{dt} = -p\text{div}\vec{v} - \text{div}\vec{q}.$$

Ova jednačina dobija sasvim jednostavan oblik ako uvedemo dodatne pretpostavke:

- u razmatranom procesu fluid je nestišljiv, tj. $\text{div}\vec{v} = 0$ i
- $\text{div}\vec{q} = 0$, što je zbog relacije (10.10) ekvivalentno tome da je količina toplote koju u jedinici vremena bilo koji deo fluida razmeni sa okolinom jednaka nuli, tj. radi se o *adijabatskom* procesu.

Uz ove pretpostavke sledi

$$\rho \frac{du}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \quad u = \text{const},$$

tj. gustina unutrašnje energije se ne menja sa vremenom. Drugim rečima, u idealnom nestišljivom fluidu, pri adijabatskim procesima, nema disipacije mehaničke energije.

Ukoliko protok toplote postoji, tj. ako je $\text{div}\vec{q} \neq 0$, onda se jednačina unutrašnje energije svodi na

$$\rho \frac{du}{dt} = -\text{div}\vec{q}.$$

U velikom broju situacija bitnih za meteorologiju može se pretpostaviti da važi Furijeov zakon, kao i da je $u = cT$, $c = \text{const}$, pa onda iz prethodne jednačine sledi

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}T = \frac{\kappa}{\rho c} \Delta T, \quad (11.1)$$

koja povezuje temperaturu T i brzinu strujanja \vec{v} idealnog nestišljivog fluida.

11.2 Stoksov fluid

U slučaju Stoksovih viskoznih fluida konstitutivna jednačina ima oblik

$$\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{I}} + 2\eta\tilde{\mathcal{S}}.$$

pa je

$$\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}\tilde{\mathcal{P}}) = \text{Tr}(-p\tilde{\mathcal{S}} + 2\eta\tilde{\mathcal{S}}^2) = -p\text{Tr}(\tilde{\mathcal{S}}) + 2\eta\text{Tr}\tilde{\mathcal{S}}^2 = 2\eta\text{Tr}\tilde{\mathcal{S}}^2 = 2\eta \sum_{i,j=1}^3 S_{ij}^2,$$

gde smo iskoristili činjenicu da je Stoksov fluid po definiciji nestišljiv, kao i osobinu simetričnosti tenzora brzine deformacije. Jednačina promene gustine unutrašnje energije onda dobija oblik

$$\rho \frac{du}{dt} = 2\eta \sum_{i,j=1}^3 S_{ij}^2 - \text{div} \vec{q},$$

što znači da čak i u slučaju adijabatskih procesa postoji mogućnost povećanja unutrašnje energije $\frac{du}{dt} > 0$, pošto je tada

$$\rho \frac{du}{dt} = 2\eta \sum_{i,j=1}^3 S_{ij}^2 \geq 0.$$

Naime, gustina ρ je pozitivna veličina, a svi sabirci u sumi sa leve strane jednačine su nenegativni. Znači, dovoljno je da je bar jedan element tenzora brzine deformacije različit od nule, pa će se čak i pri adijabatskim procesima unutrašnja energija Stoksovog fluida povećavati sa vremenom, tj. postojaće disipacija mehaničke energije (efektivno, to dovodi do zagrevanja fluida). Ovo je, naravno, posledica viskoznosti, koju smo kod idealnih fluida zanemarili.

Ako strujanje nije adijabatsko, a važi Furijeov zakon, kao i $u = cT$, slično kao u slučaju idealnog fluida dobija se jednačina koja povezuje temperaturu T i polje brzine \vec{v} Stoksovog fluida:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} T = \frac{2\eta}{\rho c} \sum_{i,j=1}^3 S_{ij}^2 + \frac{\kappa}{\rho c} \Delta T. \quad (11.2)$$

11.3 Adijabatsko strujanje stišljivog idealnog fluida

Razmotrimo malo detaljnije slučaj adijabatskog strujanja idealnog fluida. U prethodnom odeljku smo pokazali da za idealan fluid u opštem slučaju važi jednačina

$$\rho \frac{du}{dt} = -p \text{div} \vec{v} - \text{div} \vec{q}. \quad (11.3)$$

Ako su termodinamički procesi do kojih dolazi pri razmatranom strujanju adijabatski, tj. $\text{div} \vec{q} = 0$, ova jednačina se svodi na

$$\rho \frac{du}{dt} = -p \text{div} \vec{v}. \quad (11.4)$$

Iz jednačine kontinuiteta

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div} \vec{v} = 0$$

sledi

$$\operatorname{div} \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

pa zamenom u (11.4) dobijamo jednačinu

$$du = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \quad (11.5)$$

S druge strane, iz kaloričke jednačine stanja fluida

$$u = u(\rho, T)$$

sledi

$$du = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\rho dT,$$

pa zamenom (11.5) u ovu jednačinu dobijamo

$$\frac{p}{\rho^2} d\rho = \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_T d\rho + \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\rho dT,$$

odnosno

$$\left(\frac{p}{\rho^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_T \right) d\rho = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\rho dT.$$

Imajući u vidu da je u funkcija ρ i T , kao i da su p , ρ i T povezani termičkom jednačinom stanja $p = p(\rho, T)$, poslednja jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu koja povezuje gustinu i temperaturu, što se eksplicitno vidi, ako je prepisemo kao:

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{\frac{p}{\rho^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial \rho} \right)_T}{\left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\rho},$$

odnosno

$$\frac{dT}{d\rho} = \phi(\rho, T), \quad (11.6)$$

gde je $\phi(\rho, T)$ funkcija koja se dobije kada se u desnu stranu pretposlednje jednačine zamene konkretni izrazi za pritisak i parcijalne izvode unutrašnje energije. Rešavanjem ove jednačine u principu možemo da dobijemo zavisnost temperature od gustine $T = T(\rho)$, pa onda zamenom te zavisnosti u termičku jednačinu stanja dobijamo

$$p = p(\rho, T(\rho)) = F(\rho).$$

Drugim rečima, pritisak može da se izrazi kao funkcija isključivo gustine, što znači da je **idealni fluid, koji termodinamički može da se tretira kao idealan gas, a koji struji adijabatski, istovremeno i barotropan fluid.**

Razmotrimo kako izgleda diferencijalna jednačina (11.6) u slučaju kada je idealan fluid termodinamički idealan gas (tj. kada se interakcija molekula od kojih se gas sastoji može zanemariti). Poznato je da kalorička i termička jednačina stanja idealnog gasa imaju oblik:

$$u = c_V T, \quad p = \rho_m R T,$$

gde je c_V toplotni kapacitet jedinične mase gasa za proces pri kome se zapremina ne menja, ρ_m molarna gustina gasa (broj molova gasa po jedinici zapremine) i $R = 8.31 J/(molK)$ univerzalna gasna konstanta. Pošto je $\rho_m = n/V$, gde je n broj molova u uočenoj zapremini V , onda je $\rho_m = (nM)/(VM) = \rho/M$ gde je M masa jednog mola razmatranog gasa. Termičku jednačinu stanja onda možemo da pišemo u obliku

$$p = \rho R' T, \quad \text{sa} \quad R' = \frac{R}{M}.$$

Iz kaloričke jednačine stanja sledi

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial T} = c_V,$$

pa zamenom u (11.6) dobijamo diferencijalnu jednačinu

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{p}{\rho^2 c_V} = \frac{R' T}{\rho c_V} = \frac{RT}{\rho(M c_V)}.$$

Pošto je M masa jednog mola, a c_V toplotni kapacitet po jedinici mase, onda veličina $C_V = M c_V$ ima smisao molarne specifične toplote, pa prethodnu jednačinu možemo da prepisemo u obliku

$$\frac{dT}{d\rho} = \frac{RT}{\rho C_V}.$$

Razdvajanjem promenljivih dobijamo

$$\frac{dT}{T} = \frac{R}{C_V} \frac{d\rho}{\rho},$$

a zatim integraljenjem obeju strana ove jednačine i

$$T = A \rho^{\frac{R}{C_V}},$$

gde je A integraciona konstanta. Zamenom u termičku jednačinu stanja dobijamo pritisak izražen u funkciji samo gustine kao:

$$p = \rho R' A \rho^{\frac{R}{C_V}} = A' \rho^{\frac{R}{C_V} + 1},$$

gde je $A' = R' A$ takođe konstanta. Ako se još iskoristi poznata termodinamička relacija

$$C_p - C_V = R,$$

gde je C_p molarna specifična toplota za procese pri kojima je pritisak konstantan, izraz za pritisak dobija oblik

$$p = A' \rho^{\frac{C_p}{C_V}}.$$

Konačno, uvodeći uobičajenu oznaku $\gamma = C_p/C_V$ dobijamo jednačinu

$$p = A' \rho^\gamma. \quad (11.7)$$

Primer 11.3.1. Ako idealan fluid, koji je istovremeno i termodinamički idealan gas, struji stacionarno i adijabatski u homogenom gravitacionom polju, onda sigurno važi Bernulijev integral (pošto smo upravo pokazali da adijabatičnost u ovom slučaju znači i barotropnost), tj.

$$\frac{1}{2}v^2 + gx_3 + I = \text{const},$$

duž strujne linije, gde je funkcija $I = \int \frac{dp}{\rho}$. Ako ovde iskoristimo jednačinu adijabate (11.7), onda je

$$I = \int \frac{dp}{\rho} = A'\gamma \int \rho^{\gamma-2} d\rho = A' \frac{\gamma}{\gamma-1} \rho^{\gamma-1} + \text{const} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + \text{const},$$

pa Bernulijev integral dobija oblik:

$$\frac{1}{2}v^2 + gx_3 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} = \text{const}. \quad (11.8)$$

11.4 Barometarska formula

Pri modeliranju mnogih pojava u atmosferi sasvim dobri rezultati se dobijaju ako se pretpostavi da je atmosfera termodinamički idealan gas, koji struji kao idealan fluid ili miruje, tako da važi konstitutivna jednačina $\tilde{\mathcal{P}} = -p\tilde{\mathcal{L}}$. Ako je jedina zapreminska sila koja deluje homogena gravitaciona sila, onda iz osnovne jednačine dinamike sledi

$$0 = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p.$$

Ako uvedemo Dekartov koordinatni sistem tako da je z osa orijentisana vertikalno naviše, tj. nasuprot gravitacionoj sili, onda je $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, pa projektovanjem prethodne jednačine na ose x i y zaključujemo da pritisak ne zavisi od tih koordinata, dok projekcija na z osu daje sledeću jednačinu

$$-g = \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} \quad \Rightarrow \quad dp = -\rho g dz. \quad (11.9)$$

Iz termičke jednačine idealnog gasnog stanja $p = \rho R' T$ onda sledi

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{R' T} dz,$$

odakle se integraljenjem dobija zavisnost pritiska od visine:

$$p(h) = p_0 \exp \left(-\frac{g}{R'} \int_0^h \frac{dz}{T} \right). \quad (11.10)$$

Ova formula poznata je kao **barometarska formula**. U njoj je p_0 vrednost pritiska na nekoj visini izabranoj za početnu (nultu), $R' = R/M$, gde je R univerzalna gasna konstanta, a M srednja molarna masa vazduha. Takođe se zanemaruje promena gravitacionog ubrzanja g sa visinom, što može da se uradi ako h nije suviše veliko.

Konkretna zavisnost pritiska od visine zavisiće od toga kako se temperatura T menja sa visinom. Najjednostavniji je, naravno, slučaj kada je temperatura konstantna, što se sa dosta dobrom

tačnošću može prihvatiti za velike vazdušne slojeve u oblasti atmosfere na visinama od 10 do 20km. Iz barometarske formule (11.10) onda direktno sledi

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{g}{R'T}h} = p_0 e^{-h/H},$$

gde je $H = R'T/g$, koje za temperaturu $T = 227K$ (što je realna temperatura za te visine) iznosi $H = 6.65km$.

U nižim slojevima atmosfere dolazi do značajnog mešanja slojeva usled raznih uticaja, pa se za veće oblasti ne može uzeti da je temperatura konstantna. Ukoliko postoje izmerene numeričke vrednosti temperature $T(z)$ za veći broj vrednosti visine z u intervalu $0 \leq z \leq h$, integral $\int_0^h \frac{dz}{T(z)}$, koji se javlja u barometarskoj formuli, može numerički da se izračuna. Takođe, ako se pretpostavi da je mešanje slojeva sporo, onda može da se smatra da se radi o adijabatskim procesima. U tom slučaju nije zgodno direktno primenjivati barometarsku formulu, već treba iskoristiti jednačinu adijabate (11.7), iz koje sledi

$$dp = A'\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho.$$

Kombinovanjem sa poslednjom jednačinom u (11.9) dobija se

$$A'\gamma\rho^{\gamma-1}d\rho = -\rho g dz \quad \Rightarrow \quad K\rho^{\gamma-2}d\rho = -dz,$$

gde smo sa K označili konstantu $A'\gamma/g$. Dalje integraljenjem poslednje jednačine sledi:

$$\rho(h) = \rho_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}, \quad (11.11)$$

gde je $\rho_0 = \rho(0)$, $H = K\rho_0^{\gamma-1}/(\gamma-1)$. Zamenom dobijenog izraza za gustinu u jednačinu adijabate dobijamo i zavisnost pritiska od visine:

$$p(h) = p_0 \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}. \quad (11.12)$$

Uzimajući u obzir način na koji smo definisali H , lako se pokazuje da je

$$H = \frac{\gamma}{g(\gamma-1)} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Ako se uzme da je za atmosferu $\gamma \approx 1.4$, kao i standardne vrednosti atmosferskog pritiska p_0 i gustine ρ_0 za temperaturu $T_0 = 288K$ na visini $h = 0$, dobija se da je $H = 29.5km$. Ovo znači da zaista nema smisla primenjivati dobijene formule na visini $h = H$ (gde bi se dobile vrednosti $\rho = 0$ i $p = 0$), pošto na tim visinama pretpostavka o adijabatičnosti procesa nije tačna.



V. TALASI U IDEALNOM FLUIDU

37. JEDNODIMENZIONO PROSTIRANJE MALIH POREMEĆAJA
U IDEALNOM FLUIDU

Neka se u pravoj cevi sa pokretnim klipom nalazi idealni i barotropni stišljivi fluid, koji je u stanju mirovanja. Odgovarajućim pomeranjem klipa, možemo izazvati mali poremećaj u fluidu, odnosno malo sabijanje dela fluida u blizini klipa. Ako je ovako izazvana promena gustine fluida mala, što inače pretpostavljamo, možemo uzeti da je

$$\rho = \rho_0 (1 + s) \quad (37.1)$$

Sa ρ smo označili gustinu fluida u kome je izazvan poremećaj, sa ρ_0 gustinu fluida pre pomeranja klipa, a sa s relativnu promenu gustine, koja je jednaka

$$s = \frac{\rho - \rho_0}{\rho_0} \ll 1 \quad (37.2)$$

Poremećaj koji smo izazvali pomeranjem klipa, prouzrokuje kretanje čestica fluida. To nestacionarno kretanje možemo opisati koristeći Eulerovu jednačinu (25.2) i jednačinu kontinuiteta (16.4). Pošto je fluid stišljiv, a kretanje čestica fluida jednodimenziono, ove jednačine biće oblika

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} &= - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_1 \frac{\partial \rho}{\partial x_1} &= 0 \end{aligned} \quad (37.3)$$

Uzeli smo da se čestice fluida kreću duž x_1 ose.

Pošto smo pretpostavili da je fluid barotropan, možemo parcijalni izvod pritiska po koordinati izraziti na sledeći način

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = \frac{dp}{d\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_1} = c^2 \frac{\partial \rho}{\partial x_1}, \quad (37.4)$$

gde je

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \quad (37.5)$$

Ovde treba naglasiti da pretpostavka o barotropnosti posmatranog

može biti zamenjena drugom. Naime, mogli smo pretpostaviti da se kretanje fluida odvija u uslovima toplotne izolacije, tj. da je adijabatsko. Ranije smo pokazali da je idealan fluid koji vrši adijabatsko kretanje obavezno barotropan, što dovodi do istih rezultata.

Uzevši u obzir (37.4) i (37.5), jednačine 37.3) možemo napisati na sledeći način:

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{c^2}{1-s} \frac{\partial s}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + s \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} = 0$$
(37.6)

Ovo je sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Nepoznate funkcije su v_1 i s . Rešavanje ovog sistema je otežano zbog prisustva nelinearnih članova, tj. članova kod kojih se nepoznate funkcije pojavljuju kao koeficijenti. Takav je, na primer, treći član u obe jednačine. Polazna pretpostavka da je poremećaj mali, tj. da je $s \ll 1$, omogućava linearizaciju ovih jednačina. Pre svega, očigledno je da je treći član u drugoj jednačini mnogo manji od drugog. Treći član u prvoj jednačini možemo linearizovati pošavši od razvoja veličine c , koju posmatramo kao funkciju gustine, u stepeni red oko ravnotežne vrednosti gustine:

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \approx \left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{\rho_0} + \left(\frac{d^2p}{d\rho^2}\right)_{\rho_0} (\rho - \rho_0) =$$

$$\cong c_o^2 + p_o s \left(\frac{d^2 p}{dp^2} \right) p_o \quad (37.7)$$

Uzevši ovo u obzir dobijamo da je

$$\frac{c_o^2}{1+s} \frac{\partial s}{\partial x_1} \cong \frac{c_o^2 + p_o s \left(\frac{d^2 p}{dp^2} \right) p_o}{1+s} \frac{\partial s}{\partial x_1} \cong c_o^2 \frac{\partial s}{\partial x_1}$$

Preostali su još drugi član u prvoj jednačini i četvrti član u drugoj jednačini sistema (37.6). Mi ćemo ove članove zanemariti, ali kasnije ćemo pokazati da je tako nešto i zaista opravdano. Prema tome, na osnovu prethodnih razmatranja sistem (37.6) možemo svesti na sledeći uprošćeni sistem linearnih jednačina

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + c_o^2 \frac{\partial s}{\partial x_1} = 0 \quad (37.8)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} = 0$$

Ako prvu jednačinu diferenciramo po x_1 , a drugu po t , zatim oduzmemo tako dobijene jednačine, uzevši pritom u obzir da su mešoviti izvodi brzine jednaki, dobićemo da je

$$\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x_1^2} = 0 \quad (37.9)$$

Na sličan način, diferencirajući prvu jednačinu po t a drugu po x_1 , lako se dobija da je

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} - c_o^2 \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2} = 0 \quad (37.10)$$

Jednačine (37.9) i (37.10) zovu se akustičke jednačine. One su specijalni oblik poznate talasne jednačine, što ukazuje na činjenicu da se mali poremećaji u idealnom fluidu prostiru u vidu talasa. To su akustički, odnosno zvučni talasi, koji se prostiru brzinom c_o :

$$c_o = \sqrt{\left(\frac{dp}{d\rho}\right)_{p_o}} \quad (37.11)$$

Jednačine (37.9) i (37.10) pokazuju da se i poremećaj relativne promene gustine s , a to znači i poremećaj gustine jer je $s \sim \rho$, kao i poremećaj brzine prostiru u obliku talasa istom brzinom c_o . Treba podvući da postoji suštinska razlika između brzina v_1 i c_o . v_1 je brzina čestica fluida, a jednačina (37.10) pokazuje da one osciluju oko svojih ravnotežnih položaja. U početnom trenutku, neposredno posle delovanja klipa, oscilovaće samo čestice u blizini klipa, ali to stanje oscilovanja ne ostaje

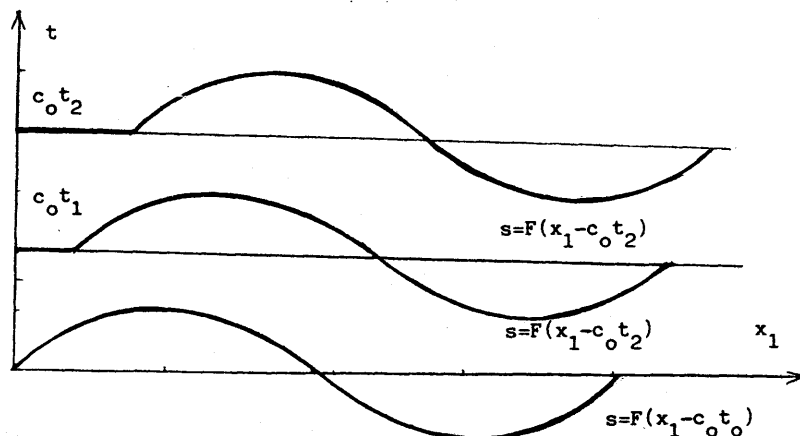
lokalizovano, nego se prostire kroz fluid brzinom c_0 . Prema tome, c_0 nema nikakve veze sa brzinom čestica v_1 i predstavlja brzinu prostiranja poremećaja. Isto važi i za veličinu s , odnosno poremećaj gustine. I on ne ostaje lokalizovan nego se širi brzinom c_0 .

Opšte rešenje talasne jednačine (37.9) je sledećeg oblika

$$s = F(x_1 - c_0 t) + D(x_1 + c_0 t), \quad (37.12)$$

pri čemu prvi deo rešenja opisuje prostiranje talasa u smeru x_1 ose, a drugi deo rešenja prostiranje talasa u suprotnom smeru. Pokažimo ispravnost ovog tvrdjenja.

Uzmimo da je funkcija D jednaka nuli, tj. da je rešenje (37.12) oblika $s = F(x_1 - c_0 t)$. Funkcija $s = F(x_1)$ određuje



Slika 37.1

profil talasa (profil poremećaja gustine) u početnom trenutku $t=0$. U proizvoljnom trenutku t ta funkcija ima isti oblik kao i u početnom trenutku (ista funkcionalna zavisnost), ali će sve tačke

odgovarajuće krive biti pomerene u smeru x_1 ose za $c_0 t$. Ako uzmemo da je reč o sinusoidalnom talasu, tj. ako je $F(x_1 - c_0 t) = \text{const.} \sin(x_1 - c_0 t)$, onda se prethodno rečeno može ilustrovati kao na slici 37.1.

Na sličan način se može pokazati da je funkcijom D predstavljen talas koji se prostire u negativnom smeru x_1 ose.

Rešenje jednačine (37.10) možemo predstaviti u obliku

$$v_1 = f(x_1 - c_0 t) + d(x_1 + c_0 t) \quad (37.13)$$

Lako se može pokazati da vaze sledeće relacije

$$f = c_0 F \quad ; \quad d = -c_0 D \quad (37.14)$$

$$v_1 = \pm c_0 s$$

U poslednjoj relaciji znak "+" treba uzeti u slučaju kada se talasni poremećaj prostire u smeru x_1 ose, a znak "-" u suprotnom slučaju.

Veza izmedju v_1 i s omogućava nam da opravdamo ranije izvršeno zanemarivanje drugog člana u prvoj jednačini sistema (37.6), i četvrtog člana u drugoj jednačini. Pošto je $v_1 = c_0 s$, i pritom je $s \ll 1$, vidimo da je zanemarivanje ovih članova bilo opravdano.

Razmotrimo sada prostiranje malog poremećaja u idealnom gasu. Ako se radi o adijabatskim uslovima, važiće relacija (28.12), odnosno veza izmedju pritiska i gustine biće odredjena jednačinom adijabate:

$$p = p_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\gamma$$

Uzevši u obzir ovu relaciju i jednačinu stanja idealnog gasa ($p = RT$) dobijamo da je

$$c_0^2 = \frac{dp}{d\rho} = \gamma \frac{p}{\rho} = \gamma RT \quad (37.16)$$

Prema tome, brzina zvučnih talasa u idealnom gasu jednaka je

$$c_0 = \sqrt{\frac{p}{\rho} \gamma} = \sqrt{\gamma RT} \quad (31.18)$$

Sa druge strane, iz jednačina (37.1) i (28.12) sledi da je

$$\frac{p}{p_0} = (1 + s)^\gamma \cong 1 + \gamma s, \quad (37.19)$$

jer je $s \ll 1$. Odavde dobijamo da je

$$\frac{p - p_0}{p_0} = \frac{\Delta p}{p_0} = \gamma s = \gamma \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \quad (37.20)$$

Dobili smo očekivani rezultat: poremećaj pritiska se takodje prostire kroz fluid kao talas. Ovaj zaključak važi za svaki barotropni fluid, nezavisno od uslova u kojima se kretanje odvija, ali veza između promene pritiska i promene gustine (37.20) važi, naravno, samo kada je kretanje adijabatsko.

50. BEZDIMENZIONA JEDNAČINA KRETANJA VISKOZNOG
NEISTIŠLJIVOG FLUIDA

Fizičke veličine koje su od interesa kod analize kretanja fluida, izostavimo sada termodinamičku analizu, mogu se podeliti u tri osnovne grupe:

1. Veličine koje karakterišu geometrijske uslove u kojima se odvija kretanje (prečnik cevi, dužina predmeta koji se optiče i sl.).

2. Veličine koje karakterišu dinamičke i kinematičke uslove kretanja fluida (srednja brzina, protok, ubrzanje, sila otpora, gradijent pritiska i sl.).

3. Veličine koje karakterišu individualna svojstva fluida (gustina, koeficijenti viskoznosti i sl.).

U opštem slučaju posmatrano, pri mehaničkoj analizi kretanja viskoznog fluida postavlja se problem odredjivanja oblika funkcionalne relacije izmedju pomenutih veličina. Reč je o funkcionalnoj vezi

$$f(L , V , \rho , \eta , \Delta p, f , t) = 0 \quad (50.1)$$

gde je L karakteristična linearna dimenzija (na primer širina kanala kroz koji fluid protiče), V je karakteristična vrednost brzine (na primer srednja brzina fluida), Δp je karakteristična razlika pritisaka (Δ nije Laplaceov operator, već označava razliku), f je gustina zapreminskih sila, t vreme i μ je koeficijent viskoznosti. Umesto L može figurisati ugao ili neka druga veličina (ili više njih), koja karakteriše geometrijske uslove u kojima se odvija proticanje. U svakom slučaju, ovde smo naveli skup osnovnih fizičkih veličina potrebnih za mehanički

opis kretanja fluida. Moguće je formirati i druge skupove u kojima bi bile uključene i druge fizičke veličine, ali to ne menja značaj i smisao rezultata koje ćemo u nastavku dobiti.

Primetimo da je u funkcionalnoj relaciji (50.1) sadržano 7 fizičkih veličina. Kako u mehanici fluida imamo tri veličine sa nezavisnim dimenzionim relacijama (L, M i T), to sledi da od gornjih 7 veličina možemo formirati 4 bezdimenzionih veličina ($n=7$, $k=3$, $n-k=4$). Ovde govorimo o veličinama koje igraju ulogu nezavisno promenljivih veličina u relaciji (49.10). Već smo ranije rekli da je konkretan izbor triju veličina sa nezavisnim dimenzionim relacijama proizvoljan. To ne moraju obavezno biti L, T i M, ali se najčešće uzimaju L, V i ρ . Sa takvim izborom dobijaju se sledeće četiri bezdimenzione Π velicine:

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{1}{Re} = \frac{\eta}{LV\rho} \quad ; \quad \Pi_2 = E = \frac{\Delta p}{\rho V^2} \\ \Pi_3 &= \frac{1}{Fr} = \frac{fL}{V^2} \quad ; \quad \Pi_4 = S = \frac{VT}{L} \end{aligned} \quad (50.2)$$

Na ovaj način definisane velicine Re , S , Fr i E , koje imaju veliki značaj u dinamici fluida: zovu se Reynoldsov (Re), Strouhalov (S), Froudeov (Fr) i Eulerov broj (E). Smisao ovih brojeva moguće je lakše sagledati ako se izvrši analiza tzv. bezdimenzione jednačine kretanja viskoznog nestišljivog fluida. Ova jednačina se dobija na sledeći način:

Polazi se od Stokesove jednačine kretanja viskoznog nestišljivog fluida. Umesto promenljivih x , t i veličina v , p i f , uvode se nove promenljive i veličine sledećim smenama

$$t' = \frac{t}{T} \quad ; \quad x' = \frac{x}{L} \quad ; \quad v'_i = \frac{v_i}{V} \quad ; \quad p' = \frac{p}{P} \quad ; \quad f' = \frac{f}{F}$$

Ovde su velikim slovima označene karakteristične za dato proticanje vrednosti odgovarajućih fizičkih veličina. Novo uvedene primovane veličine su bezdimenzione, a njihovim uvodjenjem Stokesova jednačina postaje (posmatramo projekciju te jednačinu na jednu od koordinatnih osa)

$$\frac{L}{\sqrt{V}} \frac{\partial v'_i}{\partial \bar{t}} + \sum_{j=1}^{j=3} v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{FL}{V^2} f'_i - \frac{P}{\rho V^2} \frac{\partial p'}{\partial \bar{x}_i} + \frac{V}{\sqrt{L}} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial \bar{x}_j^2} \quad (50.3)$$

Uzevši u obzir definicione relacije (50.2), gornju jednačinu možemo napisati u sledećem obliku

$$\frac{1}{S} \frac{\partial v'_i}{\partial \bar{t}} + \sum_{j=1}^{j=3} v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial \bar{x}_j} = \frac{1}{Fr} f'_i - E \frac{\partial p'}{\partial \bar{x}_i} + \frac{1}{Re} \sum_{j=1}^{j=3} \frac{\partial^2 v'_i}{\partial \bar{x}_j^2} \quad (50.4)$$

Ovo je bezdimenziona jednačina kretanja viskoznog nestišljivog fluida. Treba obratiti pažnju da postupak njenog izvodjenja omogućava definiciju brojeva Re , Fr , S i E , na način koji je nezavisan od postupka koji je zasnovan na primeni π -teoreme.

Brojevi Re , Fr , S i E su od velikog značaja u analizi tzv. sličnih fizičkih pojava. Mi nećemo govoriti o sličnim

fizičkim pojavama, niti o teoriji sličnosti, a ove brojeve smo uveli zato što se na osnovu procene njihove vrednosti može oceniti odnos pojedinih članova u bezdimenzionoj jednačini kretanja, pa se može videti da li su neki od njih zanemarljivi u odnosu na ostale. Već smo ranije rekli da nam najveće probleme stvara nelinearni član $(\vec{v}\vec{v})\vec{v}$ (drugi član u jednačini (50.3)), i zato ćemo od pomenutih brojeva u daljem izlaganju koristiti samo one, koji nam omogućavaju da izvršimo procenu tog člana. Za ostvarenje tog cilja dovoljan nam je Reynoldsov broj, što sledi iz jednačine (50.3). Naime, kada je $Re \gg 1$, možemo u toj jednačini zanemariti poslednji član na desnoj strani, koji predstavlja viskoznu silu po jedinici mase. U suprotnom slučaju, kada je $Re \ll 1$, može se zanemariti nelinearni član (drugi član na levoj strani jednačine), što se može lako videti ako se cela jednačina pomnoži sa Re . Ovaj član se naziva konvektivna ili inercijalna sila, Sila, jer ima dimenzije sile po jedinici mase (ubrzanja). Ovde se može postaviti pitanje zašto vršimo poredjenje samo pomenuta dva člana - viskozne i konvektivne sile, odnosno zašto ne procenjujemo i veličinu drugih članova iz jednačine (50.3), tačnije prvog i drugog člana na desnoj strani te jednačine. Pre svega, da bismo procenili veličinu tih članova, potrebno je da znamo karakteristične vrednost veličina F i P . Međutim, što je važnije, prisustvo tih članova ne komplikuje bitno postupak rešavanja jednačine kretanja. To nije slučaj sa konvektivnom i viskoznom silom, jer prisustvo prve čini jednačinu kretanju nelinearnom, a prisustvo druge uvećava red jednačine. Zato je posebno važno da se proceni odnos te dve sile. Ako se inercijalna sila može zanemariti u poredjenju sa viskoznom, nezavisno od toga kolika je veličina druga dva člana, jednačina kretanja prelazi u linearnu parcijalnu jednačinu drugog reda, a u suprotnom slučaju u nelinearnu parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda. I u jednom i drugom slučaju radi se o znatnom uprošćenju problema rešavanja jednačine kretanja.

Primetimo na kraju da je vrednost Reynoldsovog broja određena fizičkim i geometrijskim uslovima u kojima fluid vrši proticanje, kao i fizičkim karakteristikama samog fluida. Naime, karakteristična vrednost brzine određena je fizičkim uslovima u kojima se sistem nalazi, preko koeficijenta viskoznosti i gustine uključene su fizičke karakteristike samog fluida, a preko karakteristične dužine L uračunavaju se, može se tako reći, geometrijski uslovi u kojima se odvija kretanje. Tako, kod proticanja između dve ravni L je rastojanje između tih ravni, a kod opticanja sfere njen poluprečnik itd.